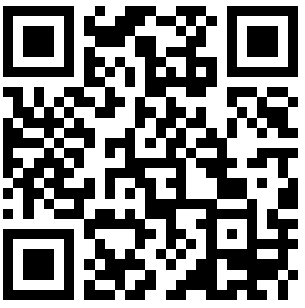
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Tome 52

1890-93.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

TOME LII.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES
ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.
rue de Louvain, 112

MAI 1890 — MAI 1893

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME LII.

CLASSE DES SCIENCES.

1. — Les fonctions pseudo- et hyper-bernoulliennes et leurs premières applications. — Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles; par M. G. de Longchamps.

2 — Détermination des fonctions invariantes de formes à plusieurs séries de variables; par Jacques Deruyts.

3. — Recherches sur le système cutané et sur le système musculaire du lombric terrestre (*Lumbricus agricola* Hoffmeister); par Paul Cerfontaine (avec 4 planches).

4. — Sur quelques formules de calcul intégral; par J. Beaupain.

5. — Contribution à l'étude anatomique des Renonculacées. — *Ranunculus arvensis* L; par Édouard Nihoul (avec 4 planches).

6. — Cirro-stratus et alto-stratus; par J Vincent (avec 1 planche).

7. — Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques; par François Deruyts.

8. — Sur l'application des fonctions sphériques aux nombres de Segner (extraits d'une lettre à M. Catalan); par M. F. Caspary.

9. — Monographie du genre *Galeopsis;* par John Briquet (avec 1 planche).

Digitized by Google

Digitized by Google

LES

FONCTIONS PSEUDO- ET HYPER-BERNOULLIENNES

ET LEURS PREMIÈRES APPLICATIONS.

CONTRIBUTION ÉLÉMENTAIRE A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR

M. G. de Longchamps,

Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, à Paris.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 mars 1889.)

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉLIMINAIRES.

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans les deux premiers, nous exposons quelques applications à des questions classiques de l'algorithme que nous appelons *isobare* et des fonctions nommées par nous *pseudo-Bernoulliennes;* dans le troisième, nous montrons l'influence des fonctions *hyper-Bernoulliennes* sur l'intégration de quelques équations différentielles d'un ordre très général; nous donnons, notamment, l'intégration de l'équation de Riccati, dans tous les cas.

Si ce Mémoire présente quelque intérêt, il le doit incontestablement à cette dernière partie, et l'on inclinera peut-être à penser que les résultats divers présentés dans les deux autres chapitres eussent pu être supprimés, comme portant sur des faits trop connus. Mais, pour arriver à la conception des fonctions hyper-Bernoulliennes, il fallait nécessairement passer par la notion plus simple des fonctions pseudo-Bernoulliennes et montrer, au moins par quelques exemples, l'importance de celles-ci et l'utilité de nos notations.

Quoi qu'il en soit, la méthode qui a dirigé les recherches exposées dans ce Mémoire est fort simple; il n'est peut-être pas inutile de la mettre d'abord en lumière.

Nous considérons une certaine fonction (algébrique ou transcendante) $\varphi(n)$, que nous appelons la *clef*. A cette clef correspond, comme il est dit plus loin, une fonction : c'est *la fonction adjointe*. Les coefficients de cette fonction se calculent d'ailleurs, au moyen de la clef choisie, par une formule que nous appelons *fondamentale,* parce qu'elle sert de base à la fonction adjointe.

Telle est, en résumé, l'idée principale de ce travail, et l'on appréciera sa fécondité, en observant comment les plus simples modifications apportées à la clef entraînent, pour les fonctions correspondantes, des conséquences très variées.

Digitized by Google

Ainsi, pour ne parler que du cas le plus simple, le seul que nous ayions examiné avec quelques détails, celui où $\varphi(n) = an + b$, on obtient des résultats fort différents en attribuant diverses valeurs aux constantes a, b.

Par exemple, que l'on prenne $a = 0$, $b = -2$ (§ 9); et l'on est conduit aux polynômes de Legendre.

Pour $a = 2$, $b = -1$ (§ 10) on obtient les fonctions *tg x* et *tg hyp x*.

Pour $a = 2$, $b = +1$ (§ 11), on trouve, pour les fonctions correspondantes, *x cotg x* et *x cotg hyp x*.

Enfin, si a et b sont supposés quelconques (§§ 14, 16), on a une intégrale de l'équation de Riccati, dans le cas général.

Il y a plus. Avec la même clef on peut trouver des fonctions fort différentes; il suffit de changer l'échelle de récurrence.

La voie que nous avons suivie et qui se trouve résumée dans les quelques lignes qui précèdent aboutira, pensons-nous, à des conséquences nombreuses et intéressantes. Quelques-unes sont exposées, ou simplement effleurées dans ce Mémoire; les autres feront peut-être l'objet de recherches ultérieures, car le sujet semble inépuisable. Ici, nous avons voulu présenter seulement un petit nombre de résultats découlant immédiatement de l'emploi de l'algorithme $(A)_n$; encore, n'avons-nous donné à la clef que des valeurs très simples. Mais, si l'on introduit les algorithmes d'un ordre supérieur

$$\begin{aligned}
((A))_n &= A_1(A)_{n-1} + A_2(A)_{n-2} \cdots + (A)_{n-1}A_1, \\
(((A)))_n &= A_1((A))_{n-1} + A_2((A))_{n-2} \cdots + ((A))_{n-1}A_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et si (c'est un point que nous avons seulement indiqué au § 20) l'on prend, pour clef, des polynômes d'un ordre supérieur; alors, on découvre un vaste sujet de recherches, prenant pour base des fonctions se prêtant remarquablement bien à l'intégration des équations différentielles. Nous estimons que l'étude de ces fonctions nouvelles pourra provoquer des travaux divers, présentant un haut intérêt pour l'analyse.

Digitized by Google

LES

FONCTIONS PSEUDO- ET HYPER-BERNOULLIENNES.

CHAPITRE I.

Les définitions et les premières applications.

1. Nous mettrons en évidence, dans la suite de ce travail, l'importance d'un certain algorithme que nous définirons d'abord.

Imaginons $(n-1)$ nombres

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots \quad A_{n-1}, \tag{1}$$

puis, considérons la suite

$$A_1A_{n-1} + A_2A_{n-2} + A_3A_{n-3} + \cdots + A_{n-1}A_1. \tag{\alpha}$$

Nous pouvons observer que le *poids* de chacun des termes de cette suite est constant. Pour rappeler ce fait, nous dirons que (α) est l'*isobare* des nombres proposés (1). Nous convenons de représenter cette fonction, symboliquement, par $(A)_n$; d'après cela, nous poserons donc

$$(A)_n \equiv A_1A_{n-1} + A_2A_{n-2} + \cdots + A_{n-1}A_1. \tag{2}$$

Supposons maintenant que la suite (1) soit indéfinie et que $(i+1)$ termes consécutifs, pris dans cette suite, vérifient, quel que soit n, la relation de récurrence

$$\varphi(A_{n+i}, \quad A_{n+i-1}, \quad \dots \quad A_n) = 0; \tag{3}$$

Digitized by Google

nous dirons alors que *la récurrence considérée est à l'échelle i* et, en résumé, la suite (1) se trouve bien déterminée, dans les conditions suivantes :

1° On connaît les i premiers termes

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots \quad A_i,$$

de la suite (1);

2° La relation (3) permet de calculer les autres coefficients

$$A_{i+1}, \quad A_{i+2}, \quad \dots$$

et elle fournit, pour exprimer ces quantités, des valeurs bien déterminées.

2. Nous définirons maintenant les *fonctions adjointes.*

Soit

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

Cette fonction est bien déterminée, si les coefficients A sont calculés comme nous l'avons dit et si l'on suppose, en outre, que la série constituée par le second membre soit convergente. Dans ces conditions, nous pouvons introduire cette fonction y, qui se trouve ainsi associée aux nombres récurrents A, calculés comme il a été dit. C'est ce que nous nommerons une *fonction adjointe.*

Aux nombres récurrents A, on peut adjoindre plusieurs fonctions; c'est ainsi que dans certains cas nous poserons

$$y = A_1 x + A_2 x^3 + \cdots + A_n x^{2n-1} + \cdots$$

ou, encore,

$$y = A_0 + A_1 x^2 + \cdots + A_n x^{2n} + \cdots,$$

etc.

Le choix de la fonction adjointe dépend de la nature de la loi de récurrence proposée; mais on verra, dans la suite, comment on est guidé dans ce choix.

Digitized by Google

3. La loi de récurrence que nous adoptons dans ce travail correspond à la formule

$$A_n\varphi(n) = A_1A_{n-1} + A_2A_{n-2} + \cdots + A_{n-1}A_1,$$

qui peut être écrite, d'après la convention faite plus haut,

$$A_n\varphi(n) = (A)_n.$$

Dans cette relation, $\varphi(n)$ représente une fonction quelconque de n, continue et bien déterminée, quel que soit n. Telle est, par exemple, la fonction entière dont nous ferons plus particulièrement usage. Dans tous les cas, nous dirons que $\varphi(n)$ est la *clef* de la récurrence considérée.

Dans ces conditions, on voit que la suite (1) est bien déterminée lorsque l'on donne une récurrence d'échelle i, ainsi que la clef $\varphi(n)$.

Quant à la fonction adjointe, elle est elle-même bien déterminée, si la série correspondante est convergente.

4. Nous devons, avant d'aller plus loin, nous préoccuper de la convergence de la série adjointe et préciser dans quelles conditions cette série est convergente. Nous allons montrer que cette convergence existe toutes les fois que le rapport $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ ne croît pas indéfiniment avec n.

Si nous posons, en effet,

$$A_n = \lambda^n B_n,$$

nous avons

$$A_hA_{n-h} = \lambda^n B_hB_{n-h},$$

et, par conséquent,

$$B_n\varphi(n) = (B)_n.$$

Ainsi, la loi de récurrence est la même pour les nombres B que pour les nombres A. Seules, les constantes initiales A_1, A_2, ... A_i sont modifiées et elles doivent être remplacées par les suivantes :

$$B_1 = \frac{A_1}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{A_2}{\lambda^2}, \quad \cdots \quad B_i = \frac{A_i}{\lambda^i}.$$

Digitized by Google

Prenons alors comme série adjointe

$$y = B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n + \cdots;$$

celle-ci sera convergente si l'on a

$$\text{Lim.}\left(\frac{B_n}{B_{n-1}} x\right) = k, \quad \text{pour } n = \infty, \quad (k < 1);$$

ou

$$\text{Lim.}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{A_n}{A_{n-1}} x\right) = k, \quad (k < 1).$$

Dans un grand nombre de cas, le rapport $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite finie et déterminée θ. Alors on pourra disposer du paramètre arbitraire λ, de façon que la condition précédente soit vérifiée pour toutes les valeurs de x telles que l'on ait

$$\text{Mod.}\frac{\theta x}{\lambda} \leq k < 1;$$

alors, la série y est convergente.

On peut donc, avec une loi de récurrence donnée, obtenir une série adjointe convergente, du moins, en général, la variation de x étant limitée à un nombre fixe, choisi d'ailleurs arbitrairement.

Il importe pourtant d'observer que cette règle comporte une exception, et si $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ croît indéfiniment avec n, on devra, dans ce cas, vérifier, par un raisonnement direct, que la série adjointe est convergente.

Nous passons aux applications que nous avons en vue. Nous montrerons d'abord quel rôle pourrait jouer l'isobare et la fonction adjointe dans certaines questions d'analyse bien connues; nous ferons voir ensuite comment elles conduisent à des fonctions nouvelles dont le rôle, dans l'intégration de certaines équations différentielles, nous paraît remarquable.

5. Le développement en séries des fonctions elliptiques présente, comme l'on sait, des difficultés notables (*); nous voulons indiquer rapidement

(*) Consultez :

1° *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1876, p. 30.

2° D. André, *Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris*, 1877.

3° Catalan, *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, 1885.

Digitized by Google

comment on peut pénétrer dans cette question en y introduisant la notion de l'isobare.

Prenons la fonction elliptique y, sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + ay^2 + by^4}.$$

En admettant que y s'annule avec n, hypothèse admissible, y est une fonction impaire de x.

Posons donc

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \cdots + \alpha_n x^{2n-1} + \cdots$$

D'ailleurs,

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{ay + 2by^3}{\sqrt{1 + ay^2 + by^4}} \frac{dy}{dx} = ay + 2by^3 = 2by\left(\frac{a}{2b} + y^2\right).$$

De cette remarque nous déduisons

$$\frac{1}{2b}\left\{2 \cdot 3 \cdot \alpha_2 + 4 \cdot 5 \cdot \alpha_3 x^2 + \cdots + (2n-1)(2n-2)\alpha_n x^{2n-4} + \cdots\right\}$$
$$= \left\{\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n-2} + \cdots\right\}\left\{\frac{a}{2b} + (\alpha)_2 x^2 + \cdots + (\alpha)_n x^{2n-2} + \cdots\right\}.$$

Posons encore, pour l'écriture symétrique des formules,

$$\frac{a}{2b} = (\alpha)_1;$$

nous obtenons alors la suite d'égalités :

$$\frac{1}{2b} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \alpha_2 = \alpha_1 (\alpha)_1,$$
$$\frac{1}{2b} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha)_2 + \alpha_2 (\alpha)_1,$$
$$\frac{1}{2b} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \alpha_4 = \alpha_1 (\alpha)_3 + \alpha_2 (\alpha)_2 + \alpha_3 (\alpha)_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2b}(2n-1)(2n-2)\alpha_n = \alpha_1 (\alpha)_{n-1} + \alpha_2 (\alpha)_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} (\alpha)_1.$$

Digitized by Google

Comme on a $\alpha_1 = 1$, on déduit de ces formules, par un calcul facile (*),

$$\alpha_2 = \frac{a}{3!},$$
$$\alpha_3 = \frac{a^2 + 12b}{5!},$$
$$\alpha_4 = \frac{a^3 + 132ab}{7!},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Mais nous n'insisterons pas sur ce point; il appartient très incidemment au sujet principal que nous avons ici en vue et l'on doit le considérer comme formant une simple remarque, n'ayant d'autre but que de mettre en évidence l'importance de la notation des isobares.

6. La transcendante π qui, au premier abord, semble bien éloignée des considérations précédentes, peut pourtant s'y rattacher très simplement.

Soit :

$$A_1 = \frac{1}{1}, \quad A_2 = \frac{1}{1.3}, \quad A_3 = \frac{1}{1.3.5}, \quad \cdots \quad A_n = \frac{1}{1.3\ldots(2n-1)};$$

et posons, comme toujours,

$$(A)_n = A_1 A_{n-1} + A_2 A_{n-2} + \cdots + A_{n-1} A_1,$$

puis

$$\frac{1}{2}\pi_n = n!(A)_{n+1}.$$

Nous trouvons alors

$$\pi_1 = 2, \quad \pi_2 = \frac{8}{3}, \quad \pi_3 = \frac{44}{15}, \quad \pi_4 = \frac{64}{21}, \quad \cdots$$

On démontre, par un calcul inutile à produire ici, que la transcendante π est donnée par la formule

$$\pi = 2 \operatorname{Lim}.\{n!(A)_{n+1}\}, \quad \text{pour } n = \infty.$$

(*) Comparez *Nouvelles Annales* (loc. cit.).

Digitized by Google

De cette relation on peut déduire un développement de π en série; on trouve ainsi

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \cdots + \frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)} + \cdots \text{(*)}.$$

7. Nous allons maintenant rattacher à notre formule fondamentale la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Dans la formule :

$$A_n\varphi(n) = (A)_n,$$

posons

$$\varphi(n) = 2^n - 2,$$

et supposons que ces égalités aient lieu pour $n = 2, 3, \ldots$ Prenons, pour fonction adjointe,

$$f(x) \equiv 1 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n + \cdots.$$

Nous avons

$$[f(x)]^2 \equiv 1 + 2A_1x + \cdots + A_n + A_{n-1}A_1 + \vdots + A_n \quad \Big| \quad x^n + \cdots$$

En tenant compte de la relation

$$2^nA_n = 2A_n + (A)_n,$$

on a

$$[f(x)]^2 \equiv 1 + A_1(2x) + \cdots + A_n(2x)^n + \cdots,$$

et, par suite,

$$[f(x)]^2 \equiv f(2x).$$

Cette propriété caractérise la fonction exponentielle. Quant aux coefficients du développement, un calcul très simple, prenant pour base l'égalité

$$\frac{2^n - 2}{n!} = \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!\,1!},$$

prouve que

$$A_n = \frac{k^n}{n!},$$

k désignant la valeur de la première constante A_1. On trouve ainsi, pour

(*) Comparez avec notre Note *Sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce* (ANN. DE L'ÉCOLE NORMALE, 2e série, t. IX, p. 419, décembre 1880.

Digitized by Google

correspondre à la clef particulière que nous avons choisie, la fonction exponentielle et son développement en série.

8. Prenons une autre clef et posons

$$\varphi(n) = -2^{2n-3}(2n-1).$$

La fonction adjointe est

$$s(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \cdots + \alpha_n x^{2n-1} + \cdots, \tag{1}$$

et l'on a, par conséquent,

$$\frac{ds}{dx} = \alpha_1 + 3\alpha_2 x^2 + \cdots + (2n-1)\alpha_n x^{2n-2} + \cdots \tag{2}$$

D'autre part, de l'égalité

$$(\alpha)_n = \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_1,$$

on déduit

$$\begin{aligned}(2n-2)(\alpha)_n = {} & (2n-3)\alpha_1\alpha_{n-1} + (2n-5)\alpha_2\alpha_{n-2} + \cdots + 1\,.\,\alpha_{n-1}\alpha_1 \\ & + 1\,.\,\alpha_1\alpha_{n-1} + 3\,.\,\alpha_2\alpha_{n-2} + \cdots + (2n-3)\,.\,\alpha_{n-1}\alpha_1,\end{aligned}$$

ou

$$(n-1)(\alpha)_n = (2n-3)\alpha_1\alpha_{n-1} + (2n-5)\alpha_2\alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_1. \tag{3}$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$s(x)\frac{ds}{dx} = \alpha_1^2 x + \cdots + \alpha_1\alpha_{n-1} + 3\alpha_2\alpha_{n-2} + \vdots + (2n-3)\alpha_{n-1}\alpha_1 \;\Big|\; x^{2n-3} + \cdots \tag{4}$$

Mais, d'après (3), le coefficient de x^{2n-3} est

$$(n-1)(\alpha)_n,$$

ou

$$-2^{2n-3}(2n-1)(n-1)\alpha_n,$$

puisque nous supposons

$$(\alpha)_n = -2^{2n-3}(2n-1)\alpha_n.$$

Digitized by Google

De cette formule on déduit, successivement,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{1.2.3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{1.2.3.4.5}, \quad \cdots$$

En observant que l'on a, quel que soit l'entier positif n,

$$\frac{2^{2n-1}}{2n!} = \frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!\,1!},$$

on trouve

$$\alpha_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Il résulte de là que

$$-\alpha_{n-1} = (2n-1)(2n-2)\alpha_n.$$

En calculant, d'après cela, le coefficient de x^{2n-3} dans l'égalité (4), on obtient pour l'expression de sa valeur

$$-(2n-2)(2n-1)2^{2n-4}\alpha_n,$$

ou

$$2^{2n-4}\alpha_{n-1}.$$

On a donc, finalement,

$$2s(x)\frac{ds}{dx} = \alpha_1^2 2x + \cdots + \alpha_{n-1}(2n)^{2n-3} + \cdots$$

et, comme $\alpha_1 = 1$,

$$2s(x)\frac{ds}{dx} - s(2x) = 0.$$

Cette équation aux différences mêlées caractérise, comme on peut s'en assurer, la fonction *sin* x; en supposant pourtant : 1° que la fonction s'annule avec x; 2° que $\lim \frac{s(x)}{x} = 1$, pour $x = 0$.

En prenant pour clef l'expression :

$$\varphi(n) = 2(2^{2n-2} - 1),$$

un calcul analogue conduirait à la fonction *cos* x, les deux premiers coefficients étant pris égaux, respectivement, à 1 et à $-\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

En poursuivant le développement du plan dont nous avons posé, dans les préliminaires, les lignes générales, nous arrivons maintenant aux développements des fonctions trigonométriques *tg x*, *cotg x*, *sec x* et *cosec x*. Mais nous abordons ici un terrain plus délicat, parce que ces développements exigent, comme on sait, la connaissance, relativement supérieure, des nombres de Bernoulli ou des nombres qui s'y rattachent plus ou moins directement, tels que les nombres d'Euler (*), ceux de Stirling (**), de M. Boole (***), etc.

Nous allons prendre pour clef l'expression $an + b$, a, b désignant deux constantes, convenablement choisies, suivant les cas. Mais nous devons, au préalable, examiner le cas particulier où a est supposé nul. Alors la clef se réduit à une constante et nous allons rencontrer, pour correspondre à cette hypothèse, les célèbres polynômes de Legendre.

9. Posons (IV)

$$\varphi(n) = -2;$$

la formule fondamentale, mise sous forme explicite, est donc

$$2\alpha_n + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_1 = 0. \tag{1}$$

Nous observons d'abord que cette égalité donne

$$n\alpha_n + (n-1)\alpha_{n-1}\alpha_1 + (n-2)\alpha_{n-2}\alpha_2 + \cdots + 1\,.\,\alpha_1\alpha_{n-1} = 0. \tag{2}$$

En effet, en multipliant (1) par n, on peut écrire

$$\begin{aligned} n\alpha_n + (n-1)\alpha_{n-1}\alpha_1 + (n-2)\alpha_{n-2}\alpha_2 + \cdots + 1\,.\,\alpha_1\alpha_{n-1} \\ + 1\,.\,\alpha_{n-1}\alpha_1 + 2\alpha_{n-2}\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_1\alpha_{n-1} + n\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Les deux lignes étant identiques, on a la relation (2).

(*) Dénomination de M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. LII, p. 161).

(**) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 332.

(***) *Id.*, p. 333.

(IV) Il n'y a pas plus de généralité à prendre $\varphi(n) = k$. En effet, en posant $\alpha_n = \lambda^{n-1}\beta_n$, on a $\alpha_i\alpha_{n-i} = \lambda^{n-2}\beta_i\beta_{n-i}$. D'après cela, l'égalité $k\alpha_n = (\alpha)_n$ devient $k\lambda\beta_n = (\beta)_n$. En prenant $k\lambda = -2$, les nombres β auront pour clef -2.

Digitized by Google

Cette remarque étant faite, prenons, pour fonction adjointe,

$$y = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} + \cdots$$

et, par suite (les séries étant supposées convergentes),

$$y\frac{dy}{dx} = \begin{array}{l|l|l} \alpha_1 + \alpha_1^2 & x + \cdots + \alpha_1\alpha_{n-1} & \\ \quad + 2\alpha_2 & \quad + 2\alpha_2\alpha_{n-2} & \\ & \quad \cdots & \\ & \quad \cdots & \\ & \quad + (n-1)\alpha_{n-1}\alpha_1 & x^{n-1} + \cdots \\ & \quad + n\alpha_n & \end{array}$$

Si la loi de récurrence, qui correspond à (1), a lieu à partir de $n = 2$, on obtient le développement, dénué d'intérêt, de $(1 + 2\alpha_1 x)^{\frac{1}{2}}$. Mais si la loi en question n'a lieu que pour les valeurs entières de n, supérieures à 2, α_1 et α_2 représentent alors deux constantes arbitraires, et l'on a

$$y\frac{dy}{dx} = \alpha_1 + (\alpha_1^2 + 2\alpha_2)x\,;$$

puis, par conséquent,

$$y^2 = k + 2\alpha_1 x + (\alpha_1^2 + 2\alpha_2)x^2\,.$$

En prenant $k = 1$, et en posant

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \alpha_1^2 + 2\alpha_2 = 1$$

on a

$$\sqrt{1 - 2\alpha x + x^2} \equiv 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots \qquad (3)$$

Dans ce développement, les coefficients α_1, α_2, ... α_n, ... sont des fonctions de α; ils se calculent, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$2\alpha_n + (\alpha)_n = 0, \quad (n = 3, 4, \cdots) \qquad (4)$$

avec les valeurs initiales :

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \alpha^2}{2}\,.$$

Digitized by Google

Cela posé, l'égalité (3) donne

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+x^2}} = 1 - \frac{d\alpha_2}{d\alpha}x \cdots - \frac{d\alpha_n}{d\alpha}x^{n-1} + \cdots$$

ou, en revenant à la notation habituelle,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+x^2}} = X_0 + X_1 x + \cdots + X_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

après avoir posé

$$\frac{d\alpha_n}{d\alpha} = -X_{n-1}.$$

En observant que α_n s'annule pour $\alpha = \pm 1$, on a

$$\alpha_n = -\int_{-1}^{\alpha} X_{n-1}\,d\alpha.$$

Les polynômes de Legendre sont donc liés à la fonction α_n par cette égalité; on pourrait déduire de cette remarque toute une théorie de ces polynômes, doués, comme on sait, de si nombreuses propriétés. Mais nous ne voulons pas entrer ici dans ces développements et nous allons aborder l'étude, particulièrement intéressante, des fonctions qui correspondent à la clef $an + b$. Pourtant, nous devions, avant tout, examiner le cas particulier où a est nul; cet examen n'a pas été d'ailleurs sans profit, comme on a pu le reconnaître.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Les fonctions pseudo-Bernoulliennes (*).

10. Prenons donc pour clef la forme entière linéaire $an + b$, a étant différent de zéro. Nous considérerons d'abord le cas particulier où l'on suppose

$$a = 2, \quad b = -1.$$

A cette hypothèse correspondent des nombres G qui se calculent, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$(2n - 1)G_n = (G)_n, \quad (n = 2, 3, \dots). \tag{1}$$

Nous poserons

$$G_n = \theta_n G_1^n,$$

en admettant que cette dernière formule soit vérifiée par toutes les valeurs entières et positives de n.

Les nombres θ se calculent, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$(2n - 1)\theta_n = (\theta)_n.$$

et ils constituent une série arithmétique bien déterminée :

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}, \quad \theta_3 = \frac{2}{3.5}, \quad \theta_4 = \frac{17}{3.5.7.9} \cdots$$

(*) Nous appelons, d'une manière générale, *nombres pseudo-Bernoulliens*, des nombres récurrents A_n, liés aux Bernoulliens B_n par l'égalité

$$A_n = B_n f(n),$$

$f(n)$ désignant une fonction de n bien déterminée.

Nous ajoutons, pour éviter toute ambiguïté, et vu les notations diverses proposées pour les Bernoulliens, que le premier Bernoullien B_1 est, dans ce mémoire, celui qui est égal à $\frac{1}{6}$; de telle sorte que

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \cdots$$

Digitized by Google

Prenons maintenant pour série adjointe

$$y = G_1 x + G_2 x^3 + \cdots + G_n x^{2n-1} + \cdots \tag{2}$$

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = G_1 + 3G_2 x^2 + \cdots + (2n-1)G_n x^{2n-2} + \cdots \tag{3}$$

et

$$y^2 = G_1^2 x^2 + \cdots + (G)_n x^{2n-2} + \cdots \tag{4}$$

Des égalités (1), (3) et (4) on déduit

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = G_1, \tag{5}$$

G_1 désignant une constante arbitraire.

Nous allons considérer deux cas particuliers, en supposant successivement

$$G_1 = 1, \quad G_1 = -\frac{1}{4}.$$

Premier cas ($G_1 = 1$). L'équation (5) donne

$$\operatorname{arc\,tg}\, y = x + k,$$

et, d'autre part, l'égalité (2) prouve que k est nul.

Nous avons donc

$$\operatorname{tg}\, x = \theta_1 x + \theta_2 x^3 + \cdots + \theta_n x^{2n-1} + \cdots \tag{6}$$

Les nombres θ peuvent être comparés aux Bernoulliens B. En effet, en rapprochant l'égalité (6) du développement connu, on trouve

$$\theta_n = \frac{4^n(4^n-1)}{2n!} B_n; \tag{A}$$

ces nombres représentent donc, dans le sens donné tout à l'heure à ce mot, des *pseudo-Bernoulliens;* et, pour les distinguer de ceux que nous allons rencontrer dans le paragraphe suivant, nous les nommerons *pseudo-Bernoulliens de première espèce.*

Digitized by Google

Second cas ($G_1 = -\frac{1}{4}$). Dans cette hypothèse, l'équation (5) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{\frac{1}{4} - y^2} + dx = 0.$$

De celle-ci, on tire

$$L\left(\frac{1}{2} + y\right) - L\left(\frac{1}{2} - y\right) + x + k = 0.$$

La constante d'intégration est nulle, y s'annulant avec x; on a donc

$$L\frac{\frac{1}{2} - y}{\frac{1}{2} + y} = x,$$

ou

$$2y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

Ces égalités donnent

$$\frac{1}{2}\frac{1 - e^x}{1 + e^x} = G_1\theta_1 x + G_1^2\theta_2 x^3 + \cdots + G_1^n\theta_n x^{2n-1} + \cdots$$

avec la condition $G_1 = -\frac{1}{4}$.

De là, on peut tirer le développement de *tang hyp x*.

A cet effet, ayant changé x en $2x$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \theta_1 2G_1 x + \theta_2 2^3 G_1^2 x^3 + \cdots + \theta_n 2^{2n-1} G_1^n x^{2n-1} + \cdots,$$

ou

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{tang hyp } x = \theta_1 x - \theta_2 x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\theta_n x^{2n-1} + \cdots \text{ (*)}.$$

11. Supposons maintenant que la clef soit égale à $2n + 1$, et considérons les nombres récurrents H correspondant à la formule :

$$(2n + 1)H_n = (H)_n. \quad (n = 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

(*) Comparez : 1° SERRET, *Trigonométrie*, p. 275 (où la formule est donnée sous une forme inexacte); 2° BACH, *Thèse d'analyse*. Strasbourg, 1857.

Digitized by Google

En posant

$$H_n = 3^n \tau_n \, H_1^n, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

on a, pour calculer les nombres τ, l'égalité

$$(2n + 1)\tau_n = (\tau)_n$$

avec la condition initiale $\tau_1 = \frac{1}{3}$.

Ces nombres τ, comme on va le voir, sont encore des pseudo-Bernoulliens; pour les distinguer de ceux que nous avons rencontrés tout à l'heure, nous les nommerons *pseudo-Bernoulliens de seconde espèce.* Ils constituent d'ailleurs une série arithmétique bien déterminée, et l'on trouve

$$\tau_1 = \frac{1}{3}, \quad \tau_2 = \frac{1}{3^2 . 5}, \quad \tau_3 = \frac{2}{3^3 . 5 . 7}, \quad \tau_4 = \frac{1}{3^3 . 5^2 . 7}, \ldots$$

Prenons, comme série adjointe à la clef $2n + 1$,

$$y = H_1 x^3 + H_2 x^5 + \cdots + H_n x^{2n+1} + \cdots$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = 3H_1 x^2 + 5H_2 x^4 + \cdots + (2n + 1)H_n x^{2n} + \cdots$$

et

$$y^2 = (H)_2 x^6 + \cdots + (H)_n x^{2n+2} + \cdots$$

De ces égalités, en tenant compte de la formule (1), on déduit

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y^2 = 3H_1 x^4. \tag{2}$$

Si nous posons, par une transformation évidente,

$$xX = 1,$$

il vient

$$\frac{dy}{dX} + y^2 + 3H_1 X^{-4} = 0.$$

C'est une équation de Riccati, dans un cas particulier, et l'on vérifie facilement qu'elle est intégrable par les fonctions élémentaires.

Digitized by Google

Mais il est plus simple de ramener (2) à une équation linéaire, en posant

$$z = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + H_1 x + H_2 x^3 + \cdots \tag{3}$$

On obtient ainsi

$$\frac{dz}{dx} - z^2 - 3H_1 = 0. \tag{4}$$

Comme dans le paragraphe précédent, nous distinguerons deux cas particuliers remarquables, en supposant successivement $H_1 = \frac{1}{3}$, puis $H_1 = -\frac{1}{12}$.

Premier cas ($H_1 = \frac{1}{3}$). L'équation (4) donne alors

$$z = \operatorname{tg}(x + k).$$

D'ailleurs, d'après (3), z est infini pour $x = 0$; on doit donc prendre $k = \frac{\pi}{2}$ et nous avons

$$x \operatorname{cotg} x = 1 - H_1 x^2 - H_2 x^4 \ldots - H_n x^{2n} \ldots$$

En tenant compte de l'hypothèse $3H_1 = 1$ et en utilisant l'égalité (1'), on a

$$x \operatorname{cotg} x = 1 - \tau_1 x^2 - \tau_2 x^4 \ldots - \tau_n x^{2n} \ldots$$

Dans cette égalité, $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ désignent les termes d'une série arithmétique déterminée comme il a été dit plus haut.

La comparaison de l'égalité précédente avec le résultat connu donne

$$\tau_n = 4^n \frac{B_n}{2n!}, \tag{A'}$$

B_n désignant le $n^{\text{ième}}$ Bernoullien.

Second cas ($H_1 = -\frac{1}{12}$). L'équation (4) devient alors

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{1}{4}.$$

On en tire

$$\mathrm{L}\frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}} = x + k.$$

Digitized by Google

D'ailleurs, la constante d'intégration est nulle, parce que l'on doit avoir $z = \infty$ pour $x = 0$. Finalement, on a

$$z = \frac{1}{2}\frac{e^x + 1}{1 - e^x} = -\frac{1}{x} + H_1 x + H_2 x^3 + \cdots$$

Dans cette égalité, remplaçons x par $2x$; il vient

$$x\,\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 - 4H_1 x^2 - 4^2 H_2 x^4 \ldots$$

ou, d'après (1'), et en tenant compte de l'hypothèse : $12H_1 = -1$,

$$x \operatorname{cotg} \operatorname{hyp} x = 1 + \tau_1 x^2 - \tau_2 x^4 \ldots + (-1)^{n-1}\tau_n x^{2n} \ldots$$

De cette formule on peut déduire, si l'on veut, le développement de la fonction

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{e^x - 1}.$$

On sait que ce développement a été donné par Cauchy et qu'il a quelquefois servi à définir les nombres de Bernoulli.

Remarque I. Les formules (A), (A') permettent de rapprocher les pseudo-Bernoulliens de première et de seconde espèce. On a, en effet, d'après ces formules,

$$\theta_n = (4^n - 1)\tau_n.$$

Un calcul facile permettrait donc de former les nombres θ, connaissant les nombres τ, ou *vice versa*.

Remarque II. Les résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents peuvent être résumés dans le tableau suivant :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= \theta_1 x + \theta_2 x^3 + \cdots + \theta_n x^{2n-1} + \cdots \\
\operatorname{tg} \operatorname{hyp} x &= \theta_1 x - \theta_2 x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\theta_n x^{2n-1} + \cdots \\
x \operatorname{cotg} x &= 1 - \tau_1 x^2 - \tau_2 x^4 \cdots - \tau_n x^{2n} \ldots \\
x \operatorname{cotg} \operatorname{hyp} x &= 1 + \tau_1 x^2 - \tau_2 x^4 \cdots + (-1)^{n-1}\tau_n x^{2n} + \cdots
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Calcul des coefficients :

θ, nombres pseudo-Bernoulliens de première espèce.	τ, nombres pseudo-Bernoulliens de seconde espèce.
FORMULE DE RÉCURRENCE :	FORMULE DE RÉCURRENCE :
$(2n-1)\theta_n = (\theta)_n \quad (n = 2, 3, \cdots)$	$(2n+1)\tau_n = (\tau)_n \quad (n = 2, 3, \ldots)$
$\theta_1 = 1$	$\tau_1 = \frac{1}{3}$
$\theta_2 = \frac{1}{3}$	$\tau_2 = \frac{1}{3^2.5}$
$\vdots$	$\vdots$

Relation entre les nombres τ, θ :

$$\theta_n = (4^n - 1)\tau_n .$$

12. Pour compléter les résultats précédents, nous avons encore à rechercher le développement des fonctions $x \operatorname{cosec} x$ et $\sec x$. Le procédé qui nous a servi jusqu'ici rencontre, en abordant ces fonctions, nous devons le reconnaître, un terrain moins favorable. Pour la fonction $x \operatorname{cosec} x$, nous trouverons encore, pour l'expression de la clef, une forme assez simple; mais, comme on le verra au paragraphe suivant, la difficulté subsiste pour le développement de $\sec x$. La raison de cette difficulté tient, selon toute vraisemblance, à ce fait que les coefficients de la série représentant $\sec x$ dépendent des *nombres d'Euler*. Sans doute, ces nombres se rattachent aux Bernoulliens par des formules très diverses (*); mais il ne semble pas possible de trouver, sous une forme explicite et simple, le rapport $\varphi(n)$ qui existe entre un Bernoullien B_n et l'Eulérien correspondant E_n. Cette forme $\varphi(n)$, que nous appelons la clef, nous fera donc défaut pour établir le développement de $\sec x$; mais on verra comment, tournant cet obstacle, nous rattachons pourtant le calcul des coefficients de cette série aux pseudo-Bernoulliens, ci-dessus définis.

(*) Consultez, par exemple, 1° le Mémoire de M. E. CATALAN : *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler et sur quelques intégrales définies* (MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, 1867); 2° une note de M. ED. LUCAS : *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler* (COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DE PARIS, 4 septembre 1876).

Digitized by Google

Posons

$$\frac{{}^{!}x}{\sin x} = 1 + C_1 x^2 + C_2 x^4 + \cdots + C_n x^{2n} + \cdots$$

et proposons-nous de chercher la relation entre C_n et $(C)_n$, en déterminant la clef qui correspond à la fonction *cosec x*.

L'égalité

$$x \operatorname{cosec} x + x \operatorname{cotg} x = 2\left(\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right),$$

donne

$$(1 + C_1 x^2 + \cdots + C_n x^{2n} + \cdots) + (1 - \tau_1 x^2 \cdots - \tau_n x^{2n} \ldots)$$

$$\equiv 2\left(1 - \frac{\tau_1}{4}x^2 \cdots - \frac{\tau_n}{4^n}x^{2n} \ldots\right).$$

On a donc

$$C_n = \tau_n\left(1 - \frac{2}{4^n}\right). \qquad (1)$$

Cette égalité prouve que les nombres C sont encore des pseudo-Bernoulliens donnés d'après la formule (A') du § 11, par la relation

$$C_n = \frac{4^n - 2}{2n!}B_n. \qquad (A'')$$

Mais on peut aussi trouver la clef correspondant aux nombres C, en raisonnant comme il suit.

On a d'abord

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 + \cdots + 2C_n + (C)_n \;\Big|\; x^{2n} + \cdots$$

et

$$x^2 \operatorname{cotg}^2 x = 1 - 2\tau_1 x^2 \cdots - 2\tau_n + (\tau)_n \;\Big|\; x^{2n} + \cdots$$

égalité qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 - 2\tau_1 + 1 \;\Big|\; x^2 + \cdots - 2\tau_n + (\tau)_n \;\Big|\; x^{2n} + \cdots$$

Digitized by Google

On déduit de là, par comparaison,

$$2C_n + (C)_n = -2\tau_n + (\tau)_n$$

ou, en tenant compte des relations (A'), (1),

$$(C)_n = \left(2n - 3 + \frac{1}{4^{n-1}}\right)\tau_n .$$

Finalement, on a

$$\frac{4^n(2n-3)+4}{4^n-2} C_n = (C)_n .$$

Ainsi, la clef de ces nouveaux pseudo-Bernoulliens est

$$\frac{4^n(2n-3)+4}{4^n-2} .$$

On observera que cette expression, comparée à celle des autres clefs, précédemment obtenues, est relativement compliquée. Elle renferme, en effet, en même temps que $2n-3$, l'exponentielle 4^n. Aussi, la considération de cette clef et de la série adjointe conduirait-elle à une équation aux différences mêlées, d'une intégration délicate.

13. En posant

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + D_1 x^2 + \cdots + D_n x^{2n} + \cdots ,$$

on a

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 2D_1 x^2 + \cdots + 2D_n + (D)_n \;\Big|\; x^{2n} + \cdots$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 x = 2D_1 x^2 + \cdots + 2D_n + (D)_n \;\Big|\; x^{2n} + \cdots$$

D'autre part, la formule (6), (§ 10), donne

$$\operatorname{tg}^2 x = \theta_1^2 x^2 + \cdots + (\theta)_{n+1} x^{2n} + \cdots$$

et, par suite,

$$2D_n + (D)_n = (\theta)_{n+1} = (2n+1)\theta_{n+1} .$$

Digitized by Google

Cette formule permet de calculer les nombres D par voie récurrente, connaissant : 1° les nombres θ, et 2° D_1 (*) qui est égal à $\frac{1}{2}$.

Jusqu'ici, nous avons montré le parti que l'on peut tirer de la formule fondamentale pour retrouver certains faits classiques de l'analyse. En donnant à la clef des valeurs différentes de celles que nous avons considérées précédemment, nous allons pénétrer dans une région nouvelle et, par conséquent, plus intéressante.

CHAPITRE III.

Les fonctions hyper-Bernoulliennes et l'équation de Riccati.

14. Prenons pour la clef la valeur $an + b$; *a, b désignant deux entiers quelconques.*

La formule fondamentale est alors

$$(an + b)\alpha_n = (\alpha)_n \tag{1}$$

Soit y la fonction adjointe; nous posons

$$y = \alpha_1 x^{a+b} + \alpha_2 x^{2a+b} + \cdots + \alpha_n x^{na+b} + \cdots \tag{2}$$

Nous venons de voir que, en supposant $a = 2$, $b = \pm 1$, y représente des fonctions élémentaires, lesquelles, développées en séries, ont pour coefficients des nombres *pseudo-Bernoulliens*. Mais si a et b sont des *entiers quelconques*, nous allons trouver, pour correspondre à la clef $an + b$, des fonctions nouvelles. Pour rappeler la voie qui nous a conduit vers elles, nous proposons de les nommer *fonctions hyper-Bernoulliennes*.

Il y a lieu d'observer ici que l'hypothèse $a + b = 0$, doit être écartée;

(*) On peut d'ailleurs lier directement les nombres D aux nombres θ par diverses formules. On trouve, par exemple,

$$2nD_n = \frac{2n-1}{1}\theta_n - \frac{2n-3}{3!}\theta_{n-1} \cdots \pm \frac{\theta_1}{(2n-1)!}.$$

Digitized by Google

elle conduit, en effet, à des résultats sans intérêt. On trouve que, dans ce cas, les nombres α forment une progression géométrique; en outre, la série adjointe est elle-même une progression géométrique.

Supposons donc $a + b \gtrless 0$; les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{dy}{dx} = (a+b)\alpha_1 x^{a+b-1} + \cdots + (an+b)x^{an+b-1} + \cdots \tag{3}$$

et

$$y^2 = \alpha_1^2 x^{2a+2b} + \cdots + (\alpha)_n x^{na+2b} + \cdots;$$

et, pour nous placer d'abord dans le cas le plus simple, admettons que la formule fondamentale ait lieu pour $n = 2, 3, \ldots$ Les équations précédentes donnent, par combinaison,

$$x^{b+1}\frac{dy}{dx} - y^2 = (a+b)\alpha_1 x^{a+2b}, \qquad (a+b \gtrless 0). \tag{4}$$

En posant

$$b+1=0, \quad a=m+2, \qquad (m+1 \gtrless 0)$$

cette équation devient

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = (m+1)\alpha_1 x^m. \tag{R}$$

Dans cette égalité, m représente un nombre entier, positif ou négatif, mais différent de -1; quant à α_1 c'est un coefficient quelconque, différent de zéro.

Mais, avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'observer que l'équation (R) représente, au sens le plus général du mot, l'équation de Riccati, quand l'exposant de x est un nombre entier. C'est ce qu'on peut aisément vérifier.

En effet, on sait que l'équation de Riccati est ordinairement prise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m.$$

Or, en posant

$$Ay = -Y, \quad \alpha_1 = -\frac{AB}{m+1},$$

on a l'équation (R), quand on suppose que m représente un nombre entier, différent de -1. Nous allons examiner tout à l'heure le cas où m est

Digitized by Google

fractionnaire. Pour le moment, nous pouvons déjà énoncer la proposition suivante :

Étant donnée l'équation de Riccati, sous la forme

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = (a-1)\alpha_1 x^{a-2},$$

dans laquelle a *désigne un nombre entier, différent de* 1; *on obtient une intégrale particulière de cette équation en posant*

$$y = \alpha_1 x^{a-1} + \alpha_2 x^{2a-1} + \cdots + \alpha_n x^{na-1} + \cdots$$

Dans cette égalité, les constantes a, α_1 *sont données par l'équation proposée, mise sous la forme indiquée, et les coefficients* α_2, α_3, ... α_n, ... *se calculent, par voie récurrente, au moyen de la formule*

$$(an-1)\alpha_n = (\alpha)_n.$$

Il est presque inutile de noter ici que l'intégrale générale de l'équation (R) se trouve par cela même déterminée, puisqu'elle appartient à la famille des équations que l'on sait complètement intégrer, quand on en possède une intégrale particulière.

L'importance de ce résultat ressort particulièrement de certains faits dont s'est récemment enrichie l'analyse et que nous rappellerons en peu de mots.

On sait que M. Fuchs, dans son Mémoire intitulé : *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* (Acta Mathematica, t. V), examine les équations de la forme

$$F(z, y, y') = y'^m + \Psi_1 y'^{m-1} + \Psi_2 y'^{m-2} + \cdots + \Psi_m = 0,$$

dans laquelle $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ représentent des fonctions entières de y, dont les coefficients dépendent de z, ces fonctions ψ étant telles que ψ_k soit, par rapport à y, au plus du degré $2k$.

Dans le cas où z est supposé constant, il en résulte une relation entre y et y'; soit p le *genre* de cette relation.

Digitized by Google

M. Poincarré a montré que, si $p = 1$, l'équation est intégrable par des quadratures; et, si p est supérieur à 1, l'intégrale est algébrique (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 15 juillet 1884).

D'autre part, M. Fuchs a démontré que, si $p = 0$, l'équation se ramène à celle de Riccati.

En rapprochant ce fait des résultats obtenus tout à l'heure, *on voit que l'équation de M. Fuchs, dans l'hypothèse :* $z =$ *constante,* $p = 0$, *est intégrable par une fonction hyper-Bernoullienne, fonction bien déterminée, que l'on obtient comme il a été dit plus haut.*

Mais, pour compléter l'intégration de l'équation de Riccati, nous devons examiner le cas, plus difficile, où l'exposant m est fractionnaire; les conséquences que nous venons de résumer se trouveront alors applicables *à une équation de Riccati, aussi générale que possible.*

15. Considérons la formule fondamentale

$$A_n \cdot \varphi(n) = (A)_n,$$

dans laquelle $\varphi(n)$ désigne une fonction entière de n, *à coefficients commensurables;* nous voulons faire observer qu'on pourra toujours, par un changement de fonction, substituer à l'égalité précédente une autre formule de même espèce, mais dans laquelle $\varphi(n)$ sera remplacée par une fonction entière *à coefficients entiers.*

En effet, soit D le dénominateur commun des coefficients de $\varphi(n)$.

Si nous posons

$$A_n = B_n D^{n-1},$$

nous avons

$$\varphi(n) \cdot B_n \cdot D^{n-1} = B_1 D^0 B_{n-1} D^{n-2} + B_2 D^1 B_{n-2} D^{n-3} + \cdots + B_{n-1} D^{n-2} B_1 D^0,$$

ou

$$D \cdot \varphi(n) \cdot B_n = (B)_n.$$

$D \cdot \varphi(n)$ représente un polynôme *à coefficients entiers,* et la remarque énoncée se trouve ainsi justifiée.

Cette observation n'est pas essentielle, et le calcul récurrent des nombres A

Digitized by Google

est toujours possible, que les coefficients de la clef soient fractionnaires ou non. Tout au plus, au point de vue matériel, ce calcul se trouverait-il compliqué dans le premier cas. Mais, au point de vue théorique, il est utile d'opérer avec des clefs à coefficients entiers. En effet, ceux-ci forment les exposants de la fonction adjointe, et c'est aussi comme exposants qu'ils entrent dans l'équation différentielle qui correspond à la clef choisie. On voit donc l'intérêt qu'on a, généralement, à les prendre entiers; cette condition est toujours réalisable, comme nous venons de le montrer.

16. Prenons donc la formule fondamentale sous la forme

$$(an + b)\alpha_n = (\alpha)_n,$$

et supposons, pour les raisons données au paragraphe précédent, que a et b désignent deux entiers quelconques.

Reportons-nous à l'équation (4), (§ 14) :

$$\frac{dy}{dx} \cdot x^{b+1} - y^2 = (a + b)\alpha_1 x^{a+2b}, \tag{1}$$

et posons

$$x = (Ab\mathrm{X})^{-\frac{1}{b}}.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{dy}{d\mathrm{X}} + \mathrm{A}y^2 = \mathrm{B}x^m,$$

en prenant

$$m = -\frac{a + 2b}{b}, \quad \mathrm{B} = -\frac{(a + b)\alpha_1}{\mathrm{A}^{\frac{a+b}{b}} b^{\frac{a+2b}{b}}}.$$

Dans ces égalités : A, B, m sont des coefficients donnés, quelconques d'ailleurs; a et b représentent, au contraire, les inconnues.

La première fait connaître le rapport $\frac{a}{b}$,

$$\frac{a}{b} = -(m + 2);$$

l'autre donne

$$b = \frac{1}{\mathrm{A}} \sqrt[m+1]{\frac{\mathrm{B}}{(m + 1)\alpha_1}}.$$

Digitized by Google

Observons maintenant que α_1 est une constante arbitraire, et nous pouvons en disposer, puisqu'on veut uniquement déterminer une intégrale particulière. Nous poserons donc

$$\alpha_1 = \frac{B}{m+1}.$$

Dans ces conditions, les coefficients de la clef sont

$$b = \frac{1}{A}, \qquad a = -\frac{m+2}{A}.$$

Ces valeurs des inconnues a, b ne sont pas, en général, entières; mais on pourra, par la transformation indiquée au paragraphe précédent, opérer le calcul des coefficients de la fonction adjointe, avec une clef à coefficients entiers. D'ailleurs, nous le répétons, cette transformation est facultative et rien n'empêche d'effectuer les calculs de la formule fondamentale avec des coefficients fractionnaires.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme plus simple :

$$x^p \frac{dy}{dx} - y^2 = Hx^q,$$

en posant

$$a = q - 2p + 2, \quad b = p - 1, \quad \alpha_1 = \frac{H}{a+b}.$$

Nous pouvons alors résumer ces résultats dans l'énoncé suivant :

L'équation

$$x^p \frac{dy}{dx} - y^2 = Hx^q. \tag{R'}$$

dans laquelle p, q *désignent deux nombres entiers (ou fractionnaires)* (*), *est intégrable par les fonctions hyper-Bernoulliennes.*

(*) Lorsque p et q sont des nombres fractionnaires, on pose, comme on sait,

$$x = \frac{1}{X^d},$$

d désignant le dénominateur commun des fractions p, q; on est ainsi ramené au cas où p, q sont entiers.

Digitized by Google

Les coefficients a, b *de la clef* an + b *sont donnés par les égalités :*

$$a = q - 2p + 2, \quad b = p - 1.$$

La fonction adjointe, fonction représentant une intégrale particulière de l'équation proposée, est

$$y = \alpha_1 x^{q-p+1} + \alpha_2 x^{2q-3p+3} + \alpha_3 x^{3q-3p+3} + \cdots$$

dont les coefficients se calculent de la manière suivante : 1° α_1 *est égal à* $\frac{H}{a+b}$; 2° *les autres coefficients s'obtiennent, par voie récurrente, au moyen de la formule*

$$(an + b)\alpha_n = (\alpha)_n.$$

L'équation de Riccati peut, comme nous l'avons montré, et dans tous les cas, être ramenée à la forme (R′); on peut donc dire :

L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m,$$

A, B, m *désignant des nombres quelconques, est toujours intégrable par les fonctions hyper-Bernoulliennes.*

17. Nous conservons encore pour expression de la clef la valeur $an + b$, mais nous allons maintenant supposer que la formule fondamentale

$$(an + b)\alpha_n = (\alpha)_n$$

n'ait lieu que pour les valeurs entières de n *supérieures à* 2. Cette simple restriction, affectant l'échelle de récurrence, suffit pour modifier profondément les résultats précédents.

Les égalités (1, 2, 3, 4), (§ 14) conduisent alors à l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} x^{b+1} = y^2 + (a + b)\alpha_1 x^{a+2b} + \left[(2a + b)\alpha_2 - \alpha_1^2\right] x^{2a+2b}, \qquad (1)$$

avec l'hypothèse

$$(2a + b)\alpha_2 - \alpha_1^2 \gtrless 0.$$

Digitized by Google

En posant

$$b+1=-m, \quad a+b=p, \quad (2a+b)\alpha_2-\alpha_1^2=H, \tag{1'}$$

l'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$\frac{dy}{dx}=x^m y^2+p\alpha_1 x^{p-1}+Hx^{2p+m}. \tag{2}$$

Elle appartient à un type classique des équations différentielles, celles qui affectent la forme

$$\frac{dy}{dx}=P+Qy+Ry^2,$$

en supposant :

$$P\equiv p\alpha_1 x^{p-1}+Hx^{2p+m}, \quad Q\equiv 0, \quad R\equiv x^m.$$

Ces équations offrent un intérêt particulier, car, comme on sait, elles peuvent être intégrées complètement quand on en possède une intégrale particulière.

Or, dans le cas de l'équation (2), on obtient une intégrale particulière en posant

$$y=\alpha_1 x^p+\alpha_2 x^{2p+m+1}+\alpha_3 x^{3p+2m+2}+\cdots \tag{3}$$

Dans ce développement, p et m sont donnés par les exposants de l'équation proposée (2); α_1 est le coefficient du terme en x^{p-1}, divisé par p; enfin, α_2 se calcule par l'égalité

$$(2p+m+1)\alpha_2=H+\alpha_1^2, \quad (4), \quad (2p+m+1\gtrless 0).$$

Quant aux autres coefficients α_3, α_4, ..., ils s'obtiennent, par voie récurrente, au moyen de la formule :

$$\left[(p+m+1)n-(m+1)\right]\alpha_n=(\alpha)_n. \quad (n=3,4,\dots).$$

Dans ces conditions, abstraction faite du cas particulier que nous allons examiner, celui où $2p+m+1=0$, on peut dire que les fonctions hyper-Bernoulliennes résolvent complètement l'équation (2).

En reculant encore l'échelle de récurrence, c'est-à-dire en supposant que la formule fondamentale n'ait lieu que pour des valeurs de *n supérieures*

Digitized by Google

à 3, puis à 4, etc., on obtiendrait une intégrale particulière d'équations différentielles de la forme (2), le terme en y^2 de cette équation étant suivi d'une fonction entière de x dont le nombre des termes peut être quelconque.

Voilà donc une classe importante, et très générale, d'équations différentielles qui se trouvent intégrées par les fonctions hyper-Bernoulliennes.

18. Mais il nous faut revenir sur le cas où

$$2p + m + 1 = 0.$$

D'après (4), si l'on suppose que cette égalité soit vérifiée, on a

$$H = -\alpha_1^2;$$

l'équation proposée est alors

$$x\frac{dy}{dx} = y^2x^{-2p} + p\alpha_1 x^p - \alpha_1^2.$$

Elle admet une intégrale particulière, évidente,

$$y = \alpha_1 x^p.$$

Elle peut donc être ramenée à une équation de Bernoulli et son intégration dépend uniquement des quadratures.

Mais si H est quelconque, l'intégration de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y^2x^{-2p} + p\alpha_1 x^p + H,$$

est plus délicate.

Nous transformerons d'abord cette équation en posant

$$x^{-p} = pX, \quad y = \alpha_1 x^p + Y,$$

et nous trouvons, après réduction,

$$X\frac{dY}{dX} + pX^2Y^2 + 2\alpha_1 XY + \frac{\alpha_1^2 + H}{p} = 0.$$

Digitized by Google

Si nous transformons de nouveau, en posant

$$XY = \frac{Z}{p},$$

nous avons

$$\frac{dZ}{dX} - \frac{Z}{X} + Z^2 + 2\alpha_1 Z + \alpha_1^2 + H = 0.$$

Cette équation appartient au type

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Uz + V = 0 \ (*),$$

étudié par M. Cayley (**) et dans laquelle U et V désignent des fonctions de la variable x; notamment, des fonctions rationnelles.

Dans le cas actuel, nous avons

$$U \equiv 2\alpha_1 - \frac{1}{x}, \quad V \equiv \alpha_1^2 + H,$$

et nous voulons obtenir une intégrale particulière de l'équation. La difficulté, pour obtenir celle-ci, tient à ce que cette intégrale appartient, dans le cas

(*) Sur cette équation on peut consulter une note du professeur Johnson (*Annals of Mathematics*, vol. 3; août 1887).

En posant

$$y = v - \frac{U}{2},$$

puis

$$v = \frac{1}{w}\frac{dw}{dx},$$

l'équation devient, comme l'observe M. Johnson,

$$\frac{d^2w}{dx^2} + Rw = 0,$$

dans laquelle

$$R \equiv V - \frac{U^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{dU}{dx}.$$

Mais cette transformation ne paraît pas devoir faire avancer la question posée; c'est-à-dire la découverte d'une intégrale particulière de l'équation.

(**) *Phil. Mag.*, 4e série, vol. 36, pp. 348-351.

Digitized by Google

particulier examiné, au genre de celles que M. Fuchs a nommées *régulières*, pour les valeurs de x, voisines de zéro.

Posons

$$z = \frac{A_1}{x} + A_2 + A_3 x + \cdots + A_n x^{n-2} + \cdots$$

Nous en déduisons successivement

$$\frac{z}{x} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + A_3 + \cdots + A_n x^{n-3} + \cdots$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A_1}{x^2} + A_3 + \cdots + (n-2)A_n x^{n-3} + \cdots$$

$$z^2 = \frac{A_1^2}{x^2} + \frac{2A_1A_2}{x} + (2A_1A_3 + A_2^2) + \cdots + (A)_n x^{n-3} + \cdots$$

puis

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} + z^2 + 2\alpha_1 z + \alpha_1^2 + H = \frac{1}{x^2}(A_1^2 - 2A_1) + \frac{1}{x}(2A_1A_2 - A_2 + 2A_1\alpha_1)$$
$$+ 2\alpha_1 A_2 + A_2^2 + 2A_1A_3 + \cdots$$
$$+ \{(n-3)A_n + (A)_n + 2\alpha_1 A_{n-1}\} x^{n-3} + \cdots$$

En disposant des paramètres A_1, A_2, A_3 de telle sorte que

$$A_1 = 2, \quad A_2 = -\frac{4}{3}\alpha_1, \quad A_3 = \frac{H}{4} + \frac{17}{36}\alpha_1^2,$$

et en calculant, par voie récurrente, les coefficients A_4, A_5, ... au moyen de la formule

$$(n-3)A_n + 2\alpha_1 A_{n-1} + (A)_n = 0, \quad (n = 4, 5, \ldots)$$

la fonction z correspondante représente une intégrale de l'équation proposée.

On observera que les fonctions hyper-Bernoulliennes, qui nous avaient fourni une intégrale particulière de l'équation considérée au paragraphe précédent, se dérobent, dans le cas particulier examiné ci-dessus. C'est là, d'ailleurs, une de ces surprises dont le calcul intégral offre plus d'un exemple; et cette singularité de certaines équations différentielles d'admettre, suivant les cas, des intégrales d'une forme algébrique très différente est

Digitized by Google

probablement l'une des causes de la difficulté que présente la recherche de ces intégrales.

19. L'équation de Boole (*) mérite d'être signalée ici, parce qu'elle nous fournit un exemple où l'on peut appliquer les fonctions hyper-Bernoulliennes, en donnant, comme nous allons le montrer, une discontinuité convenable à la formule de récurrence.

Cette équation (**) est

$$x\frac{dy}{dx} - Ay + By^2 + Cx^p = 0,$$

A, B, C étant des constantes données.

Nous ferons remarquer d'abord qu'on peut toujours supposer p entier, positif; car, s'il n'en est pas ainsi, en posant $p = (-1)^\theta \frac{m}{n}$, $\lambda = (-1)^\theta n$, $x = \frac{X^\lambda}{\lambda}$, l'équation conserve sa forme générale; mais, après cette transformation, l'exposant du dernier terme est égal à m, quantité représentant un nombre entier et positif.

Cela dit, posons

$$y = \rho_1 + \rho_2 x + \cdots + \rho_n x^{n-1} + \cdots$$

Cette fonction y sera une intégrale de l'équation considérée, si l'on a

$$\begin{aligned}
&B\rho_1 - A = 0,\\
&\rho_2(1 - A) + B(\rho)_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\rho_p(p - 1 - A) + B(\rho)_p = 0,\\
&\rho_{p+1}(p - A) + B(\rho)_{p+1} + C = 0,\\
&\rho_{p+2}(p + 1 - A) + B(\rho)_{p+2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\rho_n(n - 1 - A) + B(\rho)_n = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(*) Boole, *Traité des équations différentielles*, 1865, p. 92.

(**) Elle est, comme l'on sait, intégrable par les fonctions ordinaires dans deux cas particuliers: 1° $n = 2A$, 2° $\frac{n \pm 2A}{2n} = i$, i représentant un entier positif.

Digitized by Google

On observera la discontinuité affectant la loi de récurrence des coefficients, et résultant de ce fait que $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_p$ sont fonctions de A et de B seulement; tandis que $\rho_{p+1}, \rho_{p+2}, \dots \rho_n$ sont des fonctions des trois lettres A, B, C.

Avec ces fonctions hyper-Bernoulliennes *à récurrence discontinue* on pourra, de même, trouver une intégrale des équations de la forme

$$x\frac{dy}{dx} - Ay + By^2 + Cx^p + Dx^q + \dots = 0,$$

$p, q, \dots$ représentant des entiers positifs, en nombre limité.

20. Pour faire mieux apprécier la fécondité de l'idée que nous avons mise en lumière dans les développements qui précèdent, nous voulons, en terminant ce travail, dire un mot des fonctions hyper-Bernoulliennes d'un ordre supérieur. Celles-ci, avec une clef de l'ordre p, permettent d'obtenir une intégrale particulière d'une équation différentielle très générale et de l'ordre p.

Adoptons, pour raisonner sur un exemple simple, une clef du second degré en n. Posons

$$(an^2 + bn + c)A_n = (A)_n, \qquad (1)$$

et prenons pour fonction adjointe

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots$$

que nous nommerons *fonction hyper-Bernoullienne du second ordre.*

Nous avons alors

$$y^2 = A_0^2 + \dots + (A)_nx^n + \dots$$

$$x\frac{dy}{dx} = A_1x + \dots + nA_nx^n + \dots$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2A_2x^2 + \dots + n(n-1)A_nx^n + \dots$$

Supposons que la formule (1) ait lieu pour toutes les valeurs entières et positives de n, supérieures à p. Dans ces conditions, les formules précédentes donnent, par combinaison,

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + (b+a)x\frac{dy}{dx} + (2A_0 + c)y - y^2 = \varphi(x), \qquad (2)$$

Digitized by Google

en posant

$$\varphi(x) \equiv A_0(A_0 + c) + A_1(a + b + c)x + \cdots + \left[\{ p(pa + b) + c \} A_p - (A)_p \right] x^p. \qquad (3)$$

Réciproquement, une équation différentielle de la forme (2) étant donnée, on pourra, en général, trouver une intégrale particulière de cette équation.

Le premier membre permet, en effet, de déterminer, avec l'aide du premier terme de $\varphi(x)$, les constantes a, b, c et A_0. Les coefficients A_1, A_2, ... A_p se calculent ensuite en identifiant le second membre de (3) avec le polynôme donné. Quant aux coefficients suivants A_{p+1}, ... A_n, ... on les obtient, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$(an^2 + bn + c)A_n = (A)_n. \quad (n = p + 1,\ p + 2, \ldots).$$

Avec une *clef du troisième degré,* on obtiendrait des *fonctions hyper-Bernoulliennes du troisième ordre* permettant de trouver une intégrale particulière des équations différentielles de la forme

$$Ax^3 \frac{d^3y}{dx^3} + Bx^2 \frac{d^2y}{dx^2} + Cx \frac{dy}{dx} + Dy - y^2 = \varphi(x),$$

etc.

21. Voici une dernière application. Reprenons la formule

$$(an + b)x_n = (x)_n \qquad (n = 3,\ 4, \ldots)$$

et donnons aux paramètres de la clef des valeurs numériques particulières; nous serons ainsi conduits à des résultats très divers. Nous nous bornerons à signaler deux exemples.

Prenons $a = 1$, $b = -1$; et considérons, par conséquent, la formule

$$(n - 1)\lambda_n = (\lambda)_n \qquad (n = 3,\ 4, \ldots) \qquad (1)$$

qui permet de calculer la suite λ_3, λ_4, ... connaissant les deux premiers termes λ_1, λ_2, paramètres dont nous disposerons tout à l'heure.

La fonction adjointe étant

$$y = \lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1} + \cdots$$

Digitized by Google

nous avons, dans le cas présent,

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = \lambda_2 - \lambda_1^2. \qquad 2)$$

Écartons l'hypothèse $\lambda_2 = \lambda_1^2$, qui conduit à des résultats sans intérêt, et distinguons deux cas, suivant que $\lambda_2 - \lambda_1^2$ est positif ou négatif.

1° $(\lambda_2 - \lambda_1^2 > 0)$. Posons alors

$$\lambda_2 - \lambda_1^2 = t^2.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + t^2,$$

et, l'on en tire,

$$x + k = \frac{1}{t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{t}$$

ou

$$y = t \,.\, \operatorname{tg}(tx + tk).$$

D'après cela, nous pouvons écrire

$$\operatorname{tg}(tx + tk) = \frac{1}{t}(\lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1} + \cdots).$$

Posons

$$t = m, \qquad tk = m',$$

nous avons

$$\operatorname{tg}(mx + m') = \frac{1}{m}(\lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1} + \cdots).$$

Pour déterminer les deux premières constantes λ_1, λ_2, dans l'égalité précédente et, aussi, dans celle qu'on en déduit par différentiation, nous ferons $x = 0$.

Nous trouvons ainsi

$$\lambda_1 = m \operatorname{tg} m', \qquad \lambda_2 = \frac{m^2}{\cos^2 m'}, \qquad (3)$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg}(mx + m') = \operatorname{tg} m' + \frac{m}{\cos^2 m'} x + \frac{1}{m}\left[\lambda_3 x^2 + \cdots + \lambda_n x^{n-1} + \cdots\right],$$

Digitized by Google

les coefficients $\lambda_3, \ldots \lambda_n$ se calculant, par voie récurrente, au moyen de la formule (1), en tenant compte des égalités (3).

2° $(\lambda_2 - \lambda_1^2 < 0)$. Considérons encore l'équation (2) et supposons maintenant que le second membre de cette équation soit négatif. Pour éviter toute confusion avec les résultats précédents nous changeons de notation en posant :

$$(n-1)\mu_n = (\mu)_n, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = \mu_2 - \mu_1^2, \qquad \mu_2 - \mu_1^2 = -\frac{\theta^2}{4}, \tag{5}$$

L'équation (5) donne alors

$$\mathrm{L}\frac{y - \frac{\theta}{2}}{y + \frac{\theta}{2}} = \theta x + k$$

ou

$$-y = \frac{\theta}{2}\frac{e^{\theta x} + e^k}{e^{\theta x} - e^k}.$$

En supposant $\theta = 1$, cas particulier remarquable, nous avons

$$-\frac{1}{2}\frac{e^x + e^k}{e^x - e^k} = \mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_n x^{n-1} + \cdots$$

Dans ce développement, les coefficients μ sont déterminés de la manière suivante :

1° $$\mu_1 = -\frac{1}{2}\frac{1 + e^k}{1 - e^k};$$

2° $$\mu_2 = \mu_1^2 - \frac{1}{4} = \frac{e^k}{(1 - e^k)^2};$$

3° Les coefficients $\mu_3, \mu_4, \ldots$ se calculent au moyen de la formule

$$(n-1)\mu_n = (\mu)_n \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉLIMINAIRES 3

CHAPITRE I.

LES DÉFINITIONS ET LES PREMIÈRES APPLICATIONS.

1. Définition de l'isobare 5
2. Définition de la fonction adjointe 6
3. Définition de la clef. 7
4. Convergence de la fonction adjointe 7
5. Développement en séries des fonctions elliptiques 8
6. La transcendante π 10
7. La fonction exponentielle. 11
8. Les fonctions *sin x* et *cos x* 12
9. Les polynômes de Legendre 14

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS PSEUDO-BERNOULLIENNES.

10. Les nombres pseudo-Bernoulliens de première espèce. — Développement des fonctions *tang x* et *tang hyp x* 17
11. Les nombres pseudo-Bernoulliens de seconde espèce. — Développement des fonctions *x cotg x* et *x cotg hyp x* 19
12. Développement de *x cosec x* 23
13. Développement de *sec x* 25

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS HYPER-BERNOULLIENNES.

14. Intégration complète de l'équation de Riccati, dans le cas des exposants entiers. 26
15. Les clefs à coefficients fractionnaires 29
16. Intégration de l'équation de Riccati dans le cas le plus général 30
17. Intégration des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = x^m y^2 + f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction entière de x 32

18. Examen d'un cas particulier remarquable; intégration de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 x^{-2n} + Ax^n + B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34$$

19. L'équation de M. Boole 37
20. Les fonctions hyper-Bernoulliennes et les équations différentielles d'ordre supérieur 38
21. Développement des fonctions

$$\operatorname{tg}(mx + m'), \quad \frac{e^x + e^k}{e^x - e^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39$$

Digitized by Google

DÉTERMINATION

DES

FONCTIONS INVARIANTES DE FORMES

A PLUSIEURS SÉRIES DE VARIABLES;

PAR

JACQUES DERUYTS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 6 juillet 1889.)

Digitized by Google

Digitized by Google

DÉTERMINATION

DES FONCTIONS INVARIANTES DE FORMES

A PLUSIEURS SÉRIES DE VARIABLES.

Nous avons indiqué récemment une méthode régulière pour déterminer les fonctions invariantes de formes à n variables. Nous nous proposons de généraliser notre résultat, pour la théorie des formes à plusieurs séries de n variables.

Nous ramènerons les formes et les covariants quelconques à des « formes primaires » et à des « covariants primaires » de formes primaires. Nous établirons ensuite le mode de formation des covariants primaires de formes primaires.

Toutes les fonctions invariantes sont réductibles à des covariants; par suite, les résultats que nous voulons établir permettront de déterminer toutes les fonctions invariantes de formes quelconques (*).

(*) Nous aurons à faire usage des résultats de nos recherches antérieures; pour abréger, nous désignerons par Mém. I, Mém. II, Mém. III les travaux qui ont les titres suivants : 1° *Sur la généralisation des semi-invariants*; 2° *Sur les transformations linéaires et la théorie des covariants*; 3° *Sur la loi de formation des fonctions invariantes*.

Digitized by Google

I. — Formes primaires. — Covariants primaires.

Soit :

$$\left.\begin{array}{l}(x1) : x1_1,\quad x1_2,\quad \ldots\ldots x1_n,\\ (x2) : x2_1,\quad x2_2,\quad \ldots\ldots x2_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (xi) : xi_1,\quad xi_2,\quad \ldots\ldots xi_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (xn-1) : xn-1_1,\ xn-1_2,\ \ldots\ldots\ xn-1_n,\end{array}\right\}(x)$$

un système de $n-1$ séries de variables cogrédientes.

Nous appellerons *covariant primaire,* un covariant aux $n-1$ séries de variables (x) et satisfaisant aux conditions :

$$x1\frac{d}{dx2}=0,\quad x2\frac{d}{dx3}=0,\ldots\ xi-1\frac{d}{dxi}=0,\ldots\ xn-2\frac{d}{dxn-1}=0\ldots(*)\quad(1)$$

Cette définition des covariants primaires est en concordance avec celle que nous avons introduite, dans le cas de formes à une seule série de variables [Mém. II, § 12; Mém. III, § 2].

Soit f une forme générale, à un nombre quelconque de séries cogrédientes de n variables y, z, u. ... L'expression symbolique de f s'écrit $\xi_y^{\alpha}\eta_z^{\beta}\zeta_u^{\gamma}\ldots$ et peut être considérée comme un covariant des formes linéaires ξ_y, η_y, $\zeta_y\ldots$ Les covariants de formes à une seule série de variables se ramènent à des covariants primaires [Mém. II, § 12]. D'après cette réduction, l'expression symbolique de f est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires $f, f', \ldots$, que nous pourrons toujours supposer linéairement indépendants.

Désignons par F, F', ... les covariants primaires qui ont pour symboles $f, f', \ldots$ Les coefficients de F, F', ... sont fonctions linéaires des coefficients de f; en conséquence, s'ils ont entre eux des relations algé-

(*) La notation $xi-1\frac{d}{dxi}$ représente l'opération polaire $xi\ \ 1_1\frac{d}{dxi_1}+xi-1_2\frac{d}{dxi_2}+\ldots+xi-1_n\frac{d}{dxi_n}$.

Digitized by Google

briques, ces relations se déduisent de relations linéaires (*). Dans le cas de formes à une seule série de variables, nous avons établi qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les coefficients de covariants primaires linéairement indépendants (**) [Mém. II. Addition]. Cette considération s'applique aux covariants symboliques f, f', ... : les coefficients de F, F', ... sont donc linéairement indépendants, et par suite ils n'ont entre eux aucune relation particulière. Ainsi, *toute forme f est une somme de covariants identiques, multipliés par des polaires de covariants primaires* F, F', ... *à coefficients indépendants.*

Les covariants primaires F, F', ... s'expriment en fonction linéaire des coefficients de f. Si nous considérons F, F', ... comme des formes, tout covariant de F, F', ... est un covariant de f et réciproquement.

Nous appellerons *formes primaires,* des covariants primaires dont les coefficients sont indépendants, abstraction faite des relations qui existent nécessairement entre les coefficients de tout covariant primaire. Ainsi, *les covariants de formes quelconques f, ... sont les covariants d'un système de formes primaires* F, F', ...

Remarque. — Dans le cas de formes à une série de variables, un covariant primaire contient les variables (xi), au moins au même degré que les variables $(xi + 1)$: [Mém. II, § 12]. D'après ce qui précède, une forme primaire a pour symbole un covariant primaire de formes à une seule série de variables. Par conséquent : *Une forme primaire contient les variables* (xi), *au moins au même degré que les variables* (xi + 1).

(*) Il suffit de faire usage des considérations suivantes :

Soient q, q', ... des quantités indépendantes; L, L', ... des fonctions linéaires de q, q', ...; Φ, une fonction de degré N des quantités L, L', ...

Si la fonction Φ est nulle, il en est de même des fonctions $\Phi^{(N-1)}$ obtenues en dérivant Φ, N — 1 fois par rapport aux quantités q : les équations $\Phi^{(N-1)} = 0$ établissent des relations du premier degré entre L, L', ...; et, d'après le théorème des fonctions homogènes, l'équation $\Phi = 0$ résulte des équations $\Phi^{(N-1)} = 0$.

(**) Il faut toutefois excepter les relations linéaires générales qui résultent de la définition des covariants primaires.

Digitized by Google

II.

Les considérations précédentes s'appliquent immédiatement aux covariants de formes quelconques $f \ldots$ En effet, tout covariant T a pour expression symbolique un covariant τ de formes linéaires ξ_y, η_y, ζ_y, ... D'autre part, la fonction τ est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires relatifs à $\xi_y, \eta_y, \zeta_y, \ldots$ Il en résulte que *tout covariant de formes $f \ldots$ est réductible à des covariants primaires des mêmes formes $f \ldots$*

D'après le théorème obtenu au paragraphe précédent, les covariants primaires de $f \ldots$ sont les covariants primaires de F, F', ... Par conséquent :

Tout covariant de formes quelconques $f \ldots$ se déduit des covariants primaires d'un système de formes primaires F, F', ...

Remarque I. — Comme on le sait, un covariant, relatif aux $n - 1$ séries de variables (x), est complètement déterminé par sa *source*, c'est-à-dire par le coefficient des plus hautes puissances de $x1_1 x2_2 \ldots xn - 1_{n-1}$. Tout covariant primaire Ψ a pour expression symbolique un covariant primaire ψ de formes linéaires. La source de Ψ a pour symbole la source ψ_0 de ψ; d'un autre côté, ψ_0 est un *semi-invariant de première espèce* [Mém. II, § 12]. Par suite : *la source d'un covariant primaire quelconque est représentée symboliquement par un semi-invariant de première espèce.*

Remarque II. — Dans la suite, nous ferons usage de plusieurs propriétés des semi-invariants. Au point de vue de la clarté, nous croyons utile de les indiquer spécialement, pour les cas particuliers que nous rencontrerons :

1° Soit S_0, une fonction homogène et isobarique des coefficients de formes linéaires symboliques, telles que $s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_n y_n$. La quantité S_0 est un semi-invariant de première espèce, si elle satisfait aux $n - 1$ conditions

$$(i + 1, i)\, S_0 = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n - 1,$$

définies par

$$(i + 1, i) = \sum s_i \frac{d}{ds_{i+1}}.$$

Digitized by Google

2° Un semi-invariant symbolique de première espèce est une somme de produits P de déterminants δ, d'ordre $k = 1, 2, 3, \ldots n - 1, n$, analogues à

$$\delta = \begin{vmatrix} s1_1 & s1_2 & \ldots & s1_k \\ s2_1 & s2_2 & \ldots & s2_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ sk_1 & sk_2 & \ldots & sk_k \end{vmatrix};$$

[les lettres $(s1)$, $(s2)$, ... (sk) désignent les coefficients de formes linéaires $s1_1y_1 + s1_2y1_2 + \ldots + s1_ny_n$; $s2_1y_1 + s2_2y_2 + \ldots + s2_ny_n$; etc.].

Réciproquement, tout produit P, défini comme ci-dessus, est un semi-invariant symbolique de première espèce.

3° Soit H_0, une fonction homogène et isobarique des coefficients de formes analogues à $s_1y_1 + s_2y_2 + \ldots + s_ny_n$; nous supposerons que H_0 satisfait à l'équation $(i + 1, i)H_0 = 0$, pour une valeur particulière de i. D'après cette condition, H_0 n'est pas modifié quand on effectue la transformation de y_i en $y_i + \lambda y_{i+1}$: cette quantité est donc un semi-invariant pour les formes binaires $s_iy_i + s_{i+1}y_{i+1}$. Il suit de là que le poids de H_0 pour l'indice i est égal ou supérieur au poids pour l'indice $i + 1$.

III. — Expressions symboliques relatives aux formes primaires.

Prenons :

$$\begin{gathered} a1_{x1} = a1_1x1_1 + a1_2x1_2 + \ldots + a1_nx1_n, \\ a2_{x2} = a2_1x2_1 + a2_2x2_2 + \ldots + a2_nx2_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ an-1_{xn-1} = an-1_1\,xn-1_1 + an-1_2\,xn-1_2 + \cdots + an-1_n\,xn-1_n, \\ a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n. \end{gathered}$$

Supposons que la forme primaire F est des degrés $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-1}$, par rapport aux séries de variables $(x1)$, $(x2)$, ... $(xn - 1)$ (*) : la fonction F est représentée symboliquement par un covariant primaire f; la source de F,

(*) On a $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \ldots \geqq \nu_{n-1}$ (§ I. Remarque).

Digitized by Google

considéré comme covariant, est représentée symboliquement par un semi-invariant de première espèce, f_0 [§ 2. Rem. I]. Il résulte de nos recherches antérieures [Mém. I, § XI] que l'on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} f_0 = \Theta\, a1_1^{\nu_1 - \nu_2} (\pm a1_1 a2_2)^{\nu_2 - \nu_3} \ldots (\pm a1_1 a2_2 \ldots a j_j)^{\nu_j - \nu_{j+1}} \ldots \\ \times (\pm a1_1 a2_2 \ldots an-2_{n-2})^{\nu_{n-2} - \nu_{n-1}} . (\pm a1_1 a2_2 \ldots an-1_{n-1})^{\nu_{n-1}} . (\pm a1_1 \ldots an-1_{n-1} a_n)^m \end{array}\right\}; \quad (2)$$

dans cette formule, m est le poids de f_0 par rapport à l'indice n; Θ est une opération réductible à des *polaires* relatives aux coefficients symboliques.

On déduit de la formule (2) :

$$f = \Theta\, (\pm a1_1 a2_2 \ldots an-1_{n-1} a_n)^m . \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en prenant

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = (a1_{x1})^{\nu_1 - \nu_2} . (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{\nu_2 - \nu_3} \ldots (\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots a j_{xj})^{\nu_j - \nu_{j+1}} \\ \ldots . (\pm a1_{x1} \ldots an-2_{xn-2})^{\nu_{n-2} - \nu_{n-1}} . (\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots an-1_{xn-1})^{\nu_{n-1}} \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Soit $L(f)$, une expression symbolique, linéaire par rapport aux coefficients de f; soit $L(\varphi)$, la fonction obtenue en remplaçant dans $L(f)$ les coefficients de f par les coefficients correspondants de φ. D'après la formule (3), on a :

$$L(f) = \Theta\, (\pm a1_1 a2_2 \ldots an-1_{n-1} a_n)^m . L(\varphi);$$

si la quantité $L(\varphi)$ est nulle, il en est de même de $L(f)$: conséquemment, deux fonctions linéaires $L(f)$, $L'(f)$, qui ont des valeurs distinctes, ne peuvent pas correspondre à des fonctions $L(\varphi)$, $L'(\varphi)$, exprimables de la même manière au moyen des coefficients $a1, a2, \ldots an - 1$.

On peut donc faire correspondre, sans ambiguïté et réciproquement, une fonction linéaire des coefficients de f et la fonction analogue des coefficients de φ.

Les coefficients des covariants primaires f, φ sont des quantités semblables, en ce sens qu'elles sont cogrédientes et qu'elles ont entre elles les mêmes relations (*). Il résulte de là que si $L(f)$ est un covariant primaire, il en est de même de $L(\varphi)$.

(*) Les relations, dont il s'agit, sont les relations qui existent entre les coefficients de tout covariant primaire.

Digitized by Google

Les considérations que nous avons développées se résument comme il suit : *On peut considérer* φ *comme représentant symboliquement la forme primaire* F : *un covariant primaire de* F *peut être représenté par un covariant primaire, du premier degré par rapport à* φ *et à des fonctions analogues.*

IV.

Afin d'établir une propriété dont nous aurons à faire usage, nous introduirons accessoirement une nouvelle expression symbolique de la forme primaire F.

Désignons par $a(rl)_{xs}$ la forme linéaire :

$$a(rl)_{xs} = a(rl)_1 xs_1 + a(rl)_2 xs_2 + \cdots + a(rl)_n xs_n;$$

nous considérerons le produit linéaire de déterminants

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' = \Pi\, a(1i_1)_{x1}\left[\pm a(1i_2)_{x1} a(2i_2)_{x2}\right] \cdots \left[\pm a(1i)_{x1} a(2i)_{x2} \cdots a(ji)_{xj}\right] \cdots \\ \qquad \cdots \left[\pm a(1i_{n-1})_{x1}\, a(2i_{n-1})_{x2} \cdots a(n-1, i_{n-1})_{xn-1}\right] \end{array}\right\}; \quad \cdots \quad (5)$$

les nombres $i_1, i_2, \ldots i, \ldots i_{n-1}$ ont toutes les valeurs qui satisfont aux relations

$$\nu_2 < i_1 \leqq \nu_1; \nu_3 < i_2 \leqq \nu_2; \ldots \nu_{j+1} < i \leqq \nu_j; \ldots 0 < i_{n-1} \leqq \nu_{n-1}.$$

Nous pouvons, par généralisation, considérer φ' comme représentant la forme primaire F : dans ce système de symboles, une expression symbolique relative à $F \equiv \varphi$ se déduit de l'expression symbolique relative à $F \equiv \varphi'$, en faisant

$$a(11) = a(12) = \cdots = a(1\nu_1) = a1,$$
$$a(21) = a(22) = \cdots = a(2\nu_2) = a2, \text{ etc.}$$

Par conséquent, *une quantité symbolique, rapportée à* $F \equiv \varphi$, *est équivalente à zéro, quand elle change de signe par la permutation des symboles*

$$a(j1), \quad a(j2), \ldots a(j\,.\,\nu_j); \qquad [j = 1, 2, 3 \ldots n-1].$$

D'après la formule (5), on peut remplacer les symboles $a(si)$ et $a(ti)$ par $a(ti)$ et $-a(si)$, sans modifier la fonction φ'. Nous exprimerons cette propriété en disant que les symboles $a(si)$, $a(ti)$ sont « équivalents par per-

Digitized by Google

mutation alternée ». Il en résulte qu'*une expression symbolique relative à* $F \equiv \varphi'$ *n'est pas modifiée quand on effectue des permutations alternées des symboles compris dans les groupes*

$$\left.\begin{matrix} a(1i),\ a(2i)\dots a(ji); \\ [\nu_{j+1} < i \leqq \nu_j] \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (G_{n-j,i})$$

V. — Semi-invariants symboliques d'une forme primaire (*).

Comme nous l'avons rappelé (§ II, rem. II), un semi-invariant symbolique est une somme de produits P, de déterminants δ d'ordre $k = 1, 2, 3, \dots n$, tels que $\delta = (\pm\ s1_1 s2_2 \dots sk_k)$.

Soit S_0, *un semi-invariant symbolique, contenant au premier degré des symboles équivalents par permutation alternée et compris dans un groupe* G : *on peut exprimer* S_0 *par une somme de produits de déterminants* $\delta(G).P'$, *tels que les symboles du groupe* G *soient compris dans un même déterminant* $\delta(G)$.

La transformation dont il s'agit s'obtient en ajoutant à S_0 les expressions symboliques équivalentes qu'on en déduit par les permutations alternées des symboles compris dans G. La démonstration résulte de développements assez étendus, pour lesquels nous renverrons à une Note placée à la fin de ce travail.

Nous appliquerons la propriété énoncée aux semi-invariants symboliques $\psi_0(\varphi')$, relatifs à la fonction φ' considérée comme *réductible à* φ.

Prenons pour G le groupe G_{11} (§ IV) : le semi-invariant $\psi_0(\varphi')$ s'exprimera comme somme de produits P, dont un facteur $\delta(G_{11})$ contient les symboles de G_{11}; nous écrirons : $P = \delta(G_{11}).P'$, en désignant par P' un produit analogue à P.

Supposons, par exemple, que $\delta(G_{11})$ contient des coefficients $a(1i)\,[i > 1]$: nous déduirons de $\delta(G_{11}).P'$ une expression symbolique égale et de signe contraire, en permutant les symboles $a(11)$ et $a(1i)$; en effet, cette permutation n'altère pas le facteur P', mais reproduit en signe contraire le

(*) Pour abréger, nous désignerons sous le nom de *semi-invariants*, les semi-invariants de première espèce.

Digitized by Google

déterminant $\partial(G_{11})$; d'après une propriété établie ci-dessus (§ IV), le terme $\partial(G_{11}).P'$ est équivalent à zéro (*). Ainsi, la fonction $\psi_0(\varphi')$ est réductible à des termes $\partial(G_{11})P'$, tels que $\partial(G_{11})$ ne contient pas de symbole $a(1i)$, ni en général aucun symbole des groupes G_{hk} différents de G_{11}. Dans ces conditions, le produit P' peut être considéré comme un semi-invariant relatif au groupe G_{12} de symboles équivalents par permutations alternées. En employant des notations analogues aux précédentes, on remplacera P' par une somme $\Sigma\partial(G_{12})P''$; le déterminant $\partial(G_{12})$ contiendra les symboles du groupe G_{12} et sera indépendant des symboles compris dans les autres groupes; on aura d'ailleurs $\psi_0 \equiv \Sigma\Sigma\partial(G_{11})\partial(G_{12})P''$.

En continuant ainsi de suite, on obtiendra le théorème suivant :

Tout semi-invariant symbolique $\psi_0(\varphi')$, *rapporté à* $F \equiv \varphi$, *est équivalent à une somme de produits* P, *tels que les symboles* $a(1i)$, $a(2i)$, ... $a(ji)$ *sont compris dans un même déterminant* $\partial(G_{n-j,i})$.

Supposons maintenant

$$a(i1) = a(i2) = \cdots = a(i\nu_i) = ai; \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n-1)$$

la fonction φ' se réduit à φ, et nous obtenons ce théorème :

Un semi-invariant symbolique $\psi_0(\varphi)$, *relatif à* $F \equiv \varphi$, *s'exprime par une somme de produits de déterminants* ∂, *tels que si le symbole* aj *est contenu dans un déterminant* ∂, *il en est de même de* a1, a2, ... aj — 1.

VI. — Interprétation des expressions symboliques relatives à $F \equiv \varphi$.

Considérons un produit Q, de $\nu_1 - \nu_2$, $\nu_2 - \nu_3$, $\nu_3 - \nu_4$, ..., $\nu_{n-2} - \nu_{n-1}$, ν_{n-1} déterminants d'ordre 1, 2, 3, ... $n-2$, $n-1$, formés respectivement au moyen des coefficients semblables $a1$; $a1$ et $a2$; $a1$, $a2$ et $a3$; ...; $a1$, $a2$, ... $an-3$ et $an-2$; $a1$, $a2$, ... $an-2$ et $an-1$. Nous écrirons en abrégé :

$$Q = a1_h \ldots \times (\pm a1_i a2_i) \ldots \times (\pm a1_r a2_s a3_t) \ldots$$

(*) Il en est de même du terme $\partial(G_{11})P'$ modifié par les permutations alternées, relatives aux groupes G_{kl} différents de G_{11}.

Digitized by Google

Le produit Q est le coefficient des plus hautes puissances de $x1_1$, $x2_2$, ... $xn - 1_{n-1}$, xn_n dans le covariant

$$\Pi = a1_{xh} \dots \times (\pm a1_{xk} a2_{xl}) \dots \times (\pm a1_{xr} a2_{xs} a3_{xt}) \dots$$

Prenons

$$\Pi' = bh_{x1} \dots \times (\pm bk_{x1} bl_{x2}) \dots \times (\pm br_{x1} bs_{x2} bt_{x3}) \dots ;$$

nous aurons

$$\Pi' = 0\varphi = 0a1_{x1}^{\nu_1 - \nu_2} (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{\nu_2 - \nu_3} . (\pm a1_{x1} a2_{x2} a3_{x3})^{\nu_3 - \nu_4} \dots ,$$

en posant :

$$0 = \varepsilon bh \frac{d}{da1} \cdots \left(\pm bk \frac{d}{da1} \, bl \frac{d}{da2} \right) \cdots \left(\pm br \frac{d}{da1} \, bs \frac{d}{da2} \, bt \frac{d}{da3} \right) \cdots (*) ;$$

ε est un facteur numérique, qui dépend seulement de ν_1, ν_2, ν_3, ... ν_{n-1}.

Dans l'expression de Π', substituons aux lettres x et b les lettres a et x : nous obtenons

$$\Pi = \varepsilon xh \frac{d\varphi}{dx1} \cdots \left(\pm xk \frac{d\varphi}{dx1} \, xl \frac{d\varphi}{dx2} \right) \cdots \left(\pm xr \frac{d\varphi}{dx1} \, xs \frac{d\varphi}{dx2} \, xt \frac{d\varphi}{dx3} \right) \cdots (**),$$

à condition de remplacer les produits de dérivées de φ par les dérivées multiples correspondantes. Il suit de là que le produit Q, rapporté à $F \equiv \varphi$, représente symboliquement l'expression

$$\varepsilon \frac{d}{dx1_h} \cdots \left(\pm \frac{d}{dx1_k} \frac{d}{dx2_l} \right) \cdots \left(\pm \frac{d}{dx1_r} \frac{d}{dx2_s} \frac{d}{dx3_t} \right) \cdots F.$$

Ainsi, pour interpréter en quantités effectives le produit Q, on peut considérer

$$\frac{1}{\varepsilon'} a1_{x1}^{\nu_1} a2_{x2}^{\nu_2} \dots an - 1_{xn-1}^{\nu_{n-1}},$$

comme représentant la forme primaire F (ε' est un facteur numérique). Toute expression symbolique, relative à $F \equiv \varphi$, s'exprime au moyen de produits Q; de là résulte cette propriété :

Une expression symbolique relative à $F \equiv \varphi$ *peut être rapportée à la fonction* $\frac{1}{\varepsilon'} (a1_{x1})^{\nu_1} (a2_{x2})^{\nu_2} \dots (an - 1_{xn-1})^{\nu_{n-1}}$, *considérée comme symbole de* F.

(*) Cette formule est tout à fait analogue à l'équation (3) : elle s'obtient de la même manière (voir Mém. I, § XI).

(**) La fonction φ est symétrique par rapport aux séries de variables (x) et aux séries de coefficients (a).

Digitized by Google

Représentons par H, une forme quelconque des degrés $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{n-1}$ par rapport à $(x1)$, $(x2)$, $\dots (xn-1)$, et qui aurait pour expression symbolique

$$H \equiv a1_{x1}^{\nu_1} a2_{x2}^{\nu_2} \dots an-1_{xn-1}^{\nu_{n-1}}.$$

Soit $\psi(\varphi)$, le symbole d'un covariant primaire $\psi(F)$ de la forme primaire $F \equiv \varphi$; en interprétant $\psi(\varphi)$ comme se rapportant à la forme H, on obtiendra un covariant primaire $\psi_1(H)$ de cette forme H. D'après la dernière propriété énoncée, la fonction $\psi(F)$ se déduit de $\psi_1(H)$, en remplaçant les coefficients de H par les coefficients de $\varepsilon' F$. Ainsi : *les covariants primaires d'une forme primaire* F *se déduisent des covariants primaires d'une forme générale* H *des mêmes degrés; il suffit de substituer aux coefficients de* H, *les coefficients de* F (*).

VII. — Covariants dérivés.

Soit C, un covariant aux $n-1$ séries de variables $x1, x2, \dots xn-1$; soit L, une forme quelconque aux μ séries de variables cogrédientes $x1, x2, \dots x\mu$: $\left(\mu \gtrless n-1\right)$. Prenons

$$R(C, L) = \Pi_{i=1, j=0}^{i=n-1, j=i} \begin{vmatrix} x1\dfrac{dL}{dy1} & x2\dfrac{dL}{dy1} & \cdots & xi\dfrac{dL}{dy1} \\ x1\dfrac{dL}{dy2} & x2\dfrac{dL}{dy2} & \cdots & xi\dfrac{dL}{dy2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x1\dfrac{dL}{dyj} & x2\dfrac{dL}{dyj} & \cdots & xi\dfrac{dL}{dyj} \\ x1\dfrac{dC}{dx1} & x2\dfrac{dC}{dx1} & \cdots & xi\dfrac{dC}{dx1} \\ x1\dfrac{dC}{dx2} & x2\dfrac{dC}{dx2} & \cdots & xi\dfrac{dC}{dx2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x1\dfrac{dC}{dxi'} & x2\dfrac{dC}{dxi'} & \cdots & xi\dfrac{dC}{dxi'} \end{vmatrix}^{(r_{i,j})} \cdot \Pi_{j=0}^{n} \begin{vmatrix} \dfrac{dL}{dy1_1} & \dfrac{dL}{dy1_2} & \cdots & \dfrac{dL}{dy1_n} \\ \dfrac{dL}{dy2_1} & \dfrac{dL}{dy2_2} & \cdots & \dfrac{dL}{dy2_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{dL}{dyj_1} & \dfrac{dL}{dyj_2} & \cdots & \dfrac{dL}{dyj_n} \\ \dfrac{dC}{dx1_1} & \dfrac{dC}{dx1_2} & \cdots & \dfrac{dC}{dx1_n} \\ \dfrac{dC}{dx2_1} & \dfrac{dC}{dx2_2} & \cdots & \dfrac{dC}{dx2_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{dC}{dxi'_1} & \dfrac{dC}{dxi'_2} & \cdots & \dfrac{dC}{dxi'_n} \end{vmatrix}^{(r_{n,j})}.$$

(*) La même propriété a lieu pour les covariants quelconques de F.

Digitized by Google

Dans cette expression, les notations sont les suivantes :

1° On a $i' = i - j$, dans le produit $\Pi_{i=1,j=0}^{i=n-1,j=i}$; on a $i' = n - j$ dans le produit $\Pi_{j=0}^{n}$;

2° $y1, y2, \dots yj$ représentent des séries de variables comprises dans la suite $x1, x2, \dots x\mu$; on a $x1\frac{dL}{dy1} = x1_1\frac{dL}{dy1_1} + x1_2\frac{dL}{dy1_2} + \cdots + x1_n\frac{dL}{dy1_n}$, etc.

3° Les produits Π_{ij}, Π_j contiennent r_{ij} et r_{nj} déterminants d'ordres i, n analogues à ceux qui sont indiqués explicitement.

Du reste, les séries de variables y peuvent avoir des déterminations distinctes ou non, pour les différents termes des produits Π_{ij} et $\Pi_{j=0}^{n}$.

La quantité R(C, L) est évidemment un covariant. Remplaçons dans cette quantité les produits de dérivées de L et de C par les dérivées multiples correspondantes : nous obtenons ainsi un covariant (*) que nous désignerons par [R(C, L)], quand les dérivées multiples de C et de L sont *indépendantes* des variables (x), sans être nulles toutes à la fois. Nous dirons que [R(C, L)] est un *covariant dérivé* de C et de L.

D'après l'expression de R(C, L), le covariant [R(C, L)] satisfait aux équations :

$$x1\frac{d}{dx2} = 0, \quad x2\frac{d}{dx3} = 0, \dots \quad xn-2\frac{d}{dxn-1} = 0.$$

Par conséquent, *tout covariant dérivé est un covariant primaire.*

Écrivons symboliquement :

$$C \equiv \gamma, \quad L \equiv (l1_{x1})^{q^1}(l2_{x2})^{q^2}\dots(l\mu_{x\mu})^{q^\mu}\ (**);$$

(*) Voir Mém. III, § III.

(**) Nous supposons

$$l1_{x1} = l1_1x1_1 + l1_2x1_2 + \cdots + l1_nx1_n;\ l2_{x2} = l2_1x2_1 + l2_2x2_2 + \cdots + l2_nx2_n;\ \text{etc.}$$

Digitized by Google

la source de $[R(C, L)]$ sera représentée par :

$$q_1!\,q_2!\,..\,q_\mu!\,\prod_{i=1,\,j=0}^{i=n,\,j=\iota}\left|\begin{array}{cccc} \lambda 1_1 & \lambda 1_2 & \cdots & \lambda 1_\iota \\ \lambda 2_1 & \lambda 2_2 & \cdots & \lambda 2_\iota \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda j_1 & \lambda j_2 & \cdots & \lambda j_\iota \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \cdots & \dfrac{d}{dx1_\iota} \\ \dfrac{d}{dx2_1} & \dfrac{d}{dx2_2} & \cdots & \dfrac{d}{dx2_\iota} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{dxi''_1} & \dfrac{d}{dxi''_2} & \cdots & \dfrac{d}{dxi''_\iota} \end{array}\right|^{(r_{i,j})} \gamma, \qquad (6)$$

si l'on désigne par $\lambda 1, \lambda 2, \ldots \lambda j$ des symboles compris dans la suite $l1$, $l2, \ldots l\mu$.

VIII. — Covariants dérivés d'une forme primaire.

Supposons que la forme générale L se réduit à la forme primaire F, représentée symboliquement par

$$F \equiv \varphi \equiv (a1_{x1})^{\nu_1-\nu_2}.\,(\pm\, a1_{x1}a2_{x2})^{\nu_2-\nu_3}.\,(\pm\, a1_{x1}a2_{x2}a3_{x3})^{\nu_3-\nu_4}\ldots$$

La source du covariant $[R(C, F)]$ est représentée par un semi-invariant relatif à φ et exprimable (*) comme somme de semi-invariants analogues à

$$\prod_{i,j}\left|\begin{array}{cccc} a1_1 & a1_2 & \cdots & a1_\iota \\ a2_1 & a2_2 & \cdots & a2_\iota \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ aj_1 & aj_2 & \cdots & aj_\iota \\ \dfrac{d}{dv1_1} & \dfrac{d}{dv1_2} & \cdots & \dfrac{d}{dv1_\iota} \\ \dfrac{d}{dv2_1} & \dfrac{d}{dv2_2} & \cdots & \dfrac{d}{dv2_\iota} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{dvi''_1} & \dfrac{d}{dvi''_2} & \cdots & \dfrac{d}{dvi''_\iota} \end{array}\right|^{(r_{ij})} \gamma,$$

(*) Voir § V.

Digitized by Google

si l'on représente par les lettres (υ) quelques-unes des séries de variables $x1, x2, \ldots xn - 1$.

En passant des expressions symboliques aux expressions effectives (§ VI), on est conduit à énoncer ce théorème : *Tout covariant dérivé d'une forme primaire* F *est une somme de covariants primaires, qui ont des expressions analogues à*

$$\Pi_{i=1,\,j=i}^{i=n-1,\,j=i} \begin{vmatrix} x1\dfrac{dF}{dx1} & x2\dfrac{dF}{dx1} \cdots xi\dfrac{dF}{dx1} \\ x1\dfrac{dF}{dx2} & x2\dfrac{dF}{dx2} \cdots xi\dfrac{dF}{dx2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x1\dfrac{dF}{dxj} & x2\dfrac{dF}{dxj} \cdots xi\dfrac{dF}{dxj} \\ x1\dfrac{dC}{d\upsilon 1} & x2\dfrac{dC}{d\upsilon 1} \cdots xi\dfrac{dC}{d\upsilon 1} \\ x1\dfrac{dC}{d\upsilon 2} & x2\dfrac{dC}{d\upsilon 2} \cdots xi\dfrac{dC}{d\upsilon 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x1\dfrac{dC}{d\upsilon i'} & x2\dfrac{dC}{d\upsilon i'} \cdots xi\dfrac{dC}{d\upsilon i'} \end{vmatrix}^{(r_{ij})} \Pi_{j=0}^{n-1} \begin{vmatrix} \dfrac{dF}{dx1_1} & \dfrac{dF}{dx1_2} \cdots \dfrac{dF}{dx1_n} \\ \dfrac{dF}{dx2_1} & \dfrac{dF}{dx2_2} \cdots \dfrac{dF}{dx2_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dF}{dxj_1} & \dfrac{dF}{dxj_2} \cdots \dfrac{dF}{dxj_n} \\ \dfrac{dC}{d\upsilon 1_1} & \dfrac{dC}{d\upsilon 1_2} \cdots \dfrac{dC}{d\upsilon 1_n} \\ \dfrac{dC}{d\upsilon 2_1} & \dfrac{dC}{d\upsilon 2_2} \cdots \dfrac{dC}{d\upsilon 2_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dC}{d\upsilon i'_1} & \dfrac{dC}{d\upsilon i'_2} \cdots \dfrac{dC}{d\upsilon i'_n} \end{vmatrix}^{(r_{nj})},$$

si l'on convient de remplacer les produits de dérivées de F *et de* C *par les dérivées multiples correspondantes* (*).

IX. — Réduction des covariants primaires aux covariants dérivés.

Nous nous proposons d'établir que tout covariant primaire d'une forme quelconque L est une somme de covariants dérivés de L. A cet effet, nous démontrerons le théorème suivant :

Tout semi-invariant symbolique S_0, *contenant les symboles* $l1, l2, \ldots l\mu$, *peut être obtenu au moyen de covariants primaires symboliques* γ, *expri-*

(*) Les dérivées multiples de F et de C sont supposées indépendantes des variables.

Digitized by Google

mables seulement au moyen des symboles différents de $1\!1, 1\!2, \ldots 1\mu$: *le semi-invariant* S_0 *est réductible à une somme de termes tels que*

$$\frac{d\gamma}{d\omega_\mu} = \Pi_{i=1,j=0}^{i=n,j=i} \begin{vmatrix} \lambda 1_1 & \lambda 1_2 & \cdots & \lambda 1_i \\ \lambda 2_1 & \lambda 2_2 & \cdots & \lambda 2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda j_1 & \lambda j_2 & \cdots & \lambda j_i \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \cdots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \cdots & \frac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dxi''_1} & \frac{d}{dxi''_2} & \cdots & \frac{d}{dxi''_i} \end{vmatrix}^{(r_{ij})} \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

($\lambda 1, \lambda 2, \ldots \lambda j$ désignent, comme précédemment, des symboles compris dans la suite $l1, l2, \ldots l\mu$).

La réduction que nous voulons établir se vérifie directement dans le cas de $\mu = 0$; en effet, tout semi-invariant symbolique S_0 s'écrit, à part un facteur numérique (*) :

$$\left(\frac{d}{dx1_1}\right)^{p_1-p_2}\left(\pm\frac{d}{dx1_1}\frac{d}{dx2_2}\right)^{p_2-p_3}\left(\pm\frac{d}{dx1_1}\frac{d}{dx2_2}\frac{d}{dx3_3}\right)^{p_3-p_4}\ldots\gamma;$$

γ est alors le covariant primaire qui a pour source S_0; $p_1, p_2, \ldots p_n$ sont les poids de S_0 pour les indices $1, 2, 3 \ldots n$. D'après cette remarque, nous établirons le théorème énoncé, en le considérant comme exact pour $\mu = m$, et en le vérifiant dans le cas de $\mu = m + 1$. Nous admettrons donc que tout semi-invariant symbolique S'_0, contenant les symboles $l1, l2 \ldots lm$, est une somme d'expressions analogues à

$$\frac{d\gamma}{d\omega_m} = \Pi_{ij} \begin{vmatrix} \lambda' 1_1 & \lambda' 1_2 & \cdots & \lambda' 1_i \\ \lambda' 2_1 & \lambda' 2_2 & \cdots & \lambda' 2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda' j_1 & \lambda' j_2 & \cdots & \lambda' j_i \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \cdots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \cdots & \frac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dxi''_1} & \frac{d}{dxi''_2} & \cdots & \frac{d}{dxi''_i} \end{vmatrix}^{(r'_{ij})} \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

(*) Mém. III, § V.

Digitized by Google

Dans cette formule (7'), les indices r'_{ij} doivent être interprétés comme les indices r_{ij} employés ci-dessus; les lettres λ' représentent des symboles compris dans le groupe $l1, l2, \dots lm$; le covariant primaire γ se rapporte aux symboles différents de $l1, l2, \dots lm$: du reste, γ et S'_0 doivent être supposés indépendants de $\overline{lm+1}, \overline{lm+2}, \dots l\mu$.

X.

Prenons pour S_0 un semi-invariant qui contient, outre les symboles $l1, l2, \dots lm$, le nouveau symbole $\overline{lm+1}$; afin de simplifier l'écriture, nous remplacerons $\overline{lm+1}$ par l.

La quantité S_0 est développable comme somme de produits $l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_n^{\alpha_n}$, multipliés par des fonctions M indépendantes du symbole l. Soit r_n, la valeur maxima de α_n; désignons par r_{n-1} la valeur maxima de α_{n-1} qui se trouve associée à $\alpha_n = r_n$; en général, nous supposerons que r_i est la valeur maxima de α_i, qui se trouve associée à $\alpha_n = r_n, \alpha_{n-1} = r_{n-1}, \dots \alpha_{i+1} = r_{i+1}$. Nous dirons que $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_i^{r_i} \dots l_n^{r_n}$ est le *terme principal* du symbole l dans le semi-invariant S_0.

Écrivons

$$S_0 = l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_n^{r_n} . M_0 + \sum l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_n^{\alpha_n} . M;$$

d'après la définition des semi-invariants [§ II, Rem. II], nous aurons $(i+1, i)S_0 = 0$, c'est-à-dire

$$l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_n^{r_n} \times (i+1, i) M_0 + r_{i+1} l_1^{r_1} \dots l_i^{r_i+1} l_{i+1}^{r_{i+1}-1} \dots l_n^{r_n} . M_0$$
$$+ \sum \{ l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_n^{\alpha_n} \times (i+1, i) M + \alpha_{i+1} l_1^{\alpha_1} \dots l_i^{\alpha_i+1} l_{i+1}^{\alpha_{i+1}-1} \dots l_n^{\alpha_n} . M \} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, \dots n-1).$$

En considérant le multiplicateur de $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_n^{r_n}$ dans la dernière formule, on obtient

$$(i+1, i) M_0 = 0, \dots i = 1, 2, 3, \dots n-1.$$

La fonction M_0 est donc un semi-invariant indépendant du symbole l : nous la représenterons par la lettre S'_0 que nous avons employée ci-dessus, pour désigner un semi-invariant relatif aux symboles $l1, l2, \dots lm$.

Digitized by Google

Soient $p_1, p_2, \dots p_n$ et $p'_1, p'_2, \dots p'_n$, les poids de S_0 et de S'_0 par rapport aux indices $1, 2, \dots n$: nous aurons $p'_i = p_i - r_i$. Suivant notre supposition (§ IX), on peut écrire $S'_0 = \Sigma \frac{d\gamma}{d\omega_m}$, et on a d'après la formule (7') :

$$\sum_{j=0}^{i} r'_{i,j} = p'_i - p'_{i+1} \dots (i < n) \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Soit H_0, le multiplicateur de $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_{i-1}^{r_{i-1}} l_i^{r_i} l_{i+2}^{r_{i+2}} \dots l_n^{r_n}$, dans le semi-invariant S_0 : ce multiplicateur satisfait à l'équation

$$(i+1,\ i)\, H_0 = 0; (*) \quad \dots\dots\dots \quad (8')$$

du reste, il a, par rapport aux indices i, $i+1$, les poids $p_i - r_i$, p_{i+1}, c'est-à-dire, p'_i et $p'_{i+1} + r_{i+1}$. D'après l'équation (8'), on a [§ II, Rem. II. 3°] :

$$p'_i - p'_{i+1} - r_{i+1} \gtrless 0 \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

Les formules (8) et (9) fournissent la relation

$$\sum_{j=0}^{i} r'_{ij} \gtrless r_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots n-1);$$

par suite, il existe au moins un système de nombres ρ_{ij}, positifs ou nuls, non supérieurs aux nombres r'_{ij} et satisfaisant aux conditions :

$$\sum_{j=0}^{i} \rho_{ij} = r_{i+1}. \ (i = 1, 2, \dots n-1) \quad \dots\dots\dots \quad (9')$$

Nous pourrons donc former le semi-invariant

$$\chi_0 = l_1^{r_1} \Pi_{i=1}^{i=n,\ j=i}_{j=0} \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_{i+1} \\ \lambda'1_1 & \lambda'1_2 & \dots & \lambda'1_{i+1} \\ \lambda'2_1 & \lambda'2_2 & \dots & \lambda'2_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda'j_1 & \lambda'j_2 & \dots & \lambda'j_{i+1} \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \dots & \frac{d}{dx1_{i+1}} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \dots & \frac{d}{dx2_{i+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dxi'_1} & \frac{d}{dxi'_2} & \dots & \frac{d}{dxi'_{i+1}} \end{vmatrix}^{(\rho_{ij})} \cdot \begin{vmatrix} \lambda'1_1 & \lambda'1_2 & \dots & \lambda'1_i \\ \lambda'2_1 & \lambda'2_2 & \dots & \lambda'2_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda'j_1 & \lambda'j_2 & \dots & \lambda'j_i \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \dots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \dots & \frac{d}{dx2_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dxi'_1} & \frac{d}{dxi'_2} & \dots & \frac{d}{dxi'_i} \end{vmatrix}^{(r'_{ij} - \rho_{ij})} \gamma.$$

(*) L'équation $(i+1, i)H_0 = 0$ se déduit immédiatement de la formule $(i+1, i)S_0 = 0$; il suffit d'observer que $l_i^{r_i}$ est la plus petite puissance de l_i, multipliée par $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_{i-1}^{r_{i-1}} l_{i+2}^{r_{i+2}} \dots l_n^{r_n}$, dans la fonction S_0.

Digitized by Google

Le semi-invariant χ_0 est visiblement de la forme $\frac{d\gamma}{d\omega_{m+1}}$ [formule (6)], si l'on observe que la lettre l tient lieu du symbole $\overline{lm+1}$.

Le terme principal du symbole l, dans la fonction χ_0, est $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_n^{r_n}$, d'après la relation (9'), et ce terme principal est multiplié par $\pm \frac{d\gamma}{d\omega_m}$ [formule (7')] (*). Faisons la somme des fonctions χ_0 correspondant aux différents termes de $S_0' = \Sigma \frac{d\gamma}{d\omega_m}$: nous obtiendrons un semi-invariant $\Sigma\chi_0$, tel que $\pm \Sigma\chi_0$ et S_0 ont le même terme principal, $l_1^{r_1} l_2^{r_2} \dots l_n^{r_n}$, multiplié par la même fonction S_0'.

XI.

Soit $l_1^{r_{11}} l_2^{r_{12}} \dots l_n^{r_{1n}}$, le terme principal du symbole l dans le semi-invariant $S_0 \mp \Sigma\chi_0$. La définition du terme principal conduit aux relations suivantes entre les nombres $r_n, r_{n-1}, \dots r_2, r_1$ et $r_{1n}, r_{1n-1}, \dots r_{12}, r_{11}$. 1° On a $r_{1n} \overline{\overline{<}} r_n$, et en général : $r_{1i} < r_i$, si l'on a $r_{1n} = r_n, r_{1n-1} = r_{n-1}, \dots r_{1,i+1} = r_{i+1}$; 2° Les termes correspondants des deux séries $r_n r_{n-1}, \dots r_2, r_1$ et $r_{1n}, r_{1n-1}, \dots r_{12} r_{11}$ ne peuvent pas être égaux en même temps.

On peut appliquer à $S_0 \mp \Sigma\chi_0$ les considérations que nous avons développées pour S_0 : il existe un semi-invariant symbolique $\Sigma\chi_0'$, analogue à $\Sigma\chi_0$ et tel que $S_0 \mp \Sigma\chi_0$ et $\pm \Sigma\chi_0'$ ont le même terme principal $l_1^{r_{11}} l_2^{r_{12}} \dots l_n^{r_{1n}}$, multiplié par la même fonction. Soit $l_1^{r_{21}} l_2^{r_{22}} \dots l_n^{r_{2n}}$, le terme principal du symbole l dans le semi-invariant $S_0 \mp \Sigma\chi_0 \mp \Sigma\chi_0'$; on aura entre les nombres r_{2i} et r_{1i} les mêmes relations qu'entre les nombres r_{1i} et r_i.

En continuant de la même manière, on obtiendra des semi-invariants symboliques $\pm \Sigma\chi_0', \pm \Sigma\chi_0'', \dots \pm \Sigma\chi_0^{(s-1)}$ analogues à $\pm \Sigma\chi_0$. Soit $l_1^{r_{s1}} l_2^{r_{s2}} \dots l_n^{r_{sn}}$, le terme principal du symbole l dans l'expression

$$S_0 \mp \Sigma\chi_0 \mp \Sigma\chi_0' \mp \Sigma\chi_0'' \dots \mp \Sigma\chi_0^{(s-1)} (**);$$

les nombres $r_{s1}, r_{s2}, \dots r_{s,n}$ satisfont aux conditions suivantes :

1° On a $r_{s,n} \overline{\overline{<}} r_{s-1,n}$;

(*) On doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que $\Sigma_i i r_{i+1}$ est pair ou impair.

(**) Tous les signes + ou — ne doivent pas nécessairement se correspondre.

Digitized by Google

2° On a $r_{si} < r_{s-1,i}$, si les relations $r_{sn} = r_{s-1,n}$, $r_{s,n-1} = r_{s-1,n-1}$, ... $r_{s,i+1} = r_{s-1,i+1}$ ont lieu simultanément;

3° On ne peut pas avoir en même temps les n égalités : $r_{s,n} = r_{s-1,n}$, $r_{s,n-1} = r_{s-1,n-1}$, ... $r_{s,2} = r_{s-1,2}$, $r_{s1} = r_{s-1,1}$.

D'après ces conditions, les systèmes de nombres $(r_{s,n}, r_{s,n-1}, \ldots r_{s2}, r_{s1})$ ne peuvent pas se succéder indéfiniment (*). Par conséquent, pour une valeur suffisamment grande de s, on aura

$$S_0 \mp \Sigma\chi_0 \mp \Sigma\chi_0' \mp \ldots \mp \Sigma\chi_0^{(s-1)} = 0.$$

Le semi-invariant S_0, relatif aux $m+1$ symboles $l1, l2, \ldots lm+1$, est donc une somme de semi-invariants χ_0 exprimables sous la forme $\frac{d\gamma}{d\omega_{m+1}}$.

Comme nous l'avons fait observer (§ IX), il résulte de là que tout semi-invariant, relatif à μ symboles $l1, l2, \ldots l\mu$, est une somme de semi-invariants $\frac{d\gamma}{d\omega\mu}$ définis par la formule (7).

EXEMPLE. — Dans le cas de $\mu = 2$, supposons

$$S_0 = \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 & l1_3 \\ l2_1 & l2_2 & l2_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

On trouve :

$$S_0 = \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 & l1_3 \\ l2_1 & l2_2 & l2_3 \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \frac{d}{dx1_3} \end{vmatrix} \gamma + \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 \\ l2_1 & l2_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l1_1 & l1_2 & l1_3 \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \frac{d}{dx1_3} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \frac{d}{dx2_3} \end{vmatrix} \gamma',$$

en prenant

$$\gamma = \frac{1}{2} b_{x1} c_{x1}, \quad \gamma' = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_{x1} & b_{x2} \\ c_{x1} & c_{x2} \end{vmatrix}.$$

(*) Voir Mém. III, § VI.

Digitized by Google

XII.

Considérons maintenant les semi-invariants symboliques, relatifs à la forme quelconque $L \equiv (l1_{x1})^{\eta_1}(l2_{x2})^{\eta_2} \dots (l\mu_{x\mu})^{\eta\mu}$: d'après le théorème que nous venons de démontrer, ces semi-invariants s'expriment linéairement au moyen des fonctions $\frac{d\gamma}{d\omega_\mu}$.

Supposons que S_0 représente la source d'un covariant primaire S, de degré t par rapport à la forme L : la fonction γ contient tous les symboles compris dans S_0, à l'exception de $l1, l2, \dots l\mu$ (§ IX); par conséquent, γ est l'expression symbolique d'un covariant primaire C, de degré $t - 1$ par rapport à L.

La comparaison des formules (6) et (7) montre que le semi-invariant $\frac{d\gamma}{d\omega_\mu}$ représente, à part un facteur numérique, la source d'un covariant dérivé, obtenu au moyen de L et de C. D'après la réduction de S_0 aux fonctions $\frac{d\gamma}{d\omega_\mu}$, la source du covariant S est une combinaison linéaire des sources de covariants dérivés [R(C, L)]. D'autre part, une somme de sources de covariants est la source de la somme des covariants. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Tout covariant primaire S, *de degré* t *par rapport à une forme quelconque* L, *est une somme de covariants dérivés obtenus au moyen de la forme* L *et de covariants primaires* C, *du degré* t — 1 *par rapport à* L.

Nous pouvons appliquer ce théorème, en remplaçant t par $t - 1$, $t - 2, \dots 2, 1$. Par conséquent, la méthode des covariants dérivés permet d'obtenir les covariants primaires d'une forme L, au moyen des covariants primaires indépendants de L. Plus généralement, les covariants primaires d'un système de formes L, L' ... se déduisent des covariants primaires indépendants des différentes formes; ces derniers covariants se réduisent nécessairement à des constantes. Par suite, *tous les covariants primaires de formes quelconques s'obtiennent par la méthode des covariants dérivés.*

Les covariants primaires de formes primaires F, F' ... se déduisent des covariants primaires de formes générales H, H', ..., des mêmes degrés (§ VI) : il suffit de remplacer les coefficients de H, H', ... par les coefficients de F, F', ...

Digitized by Google

Les théorèmes énoncés ci-dessus sont donc applicables aux formes primaires.

Ainsi : *La méthode des covariants dérivés permet de déterminer tous les covariants primaires de formes primaires.*

Nous avons indiqué (§ VIII) une réduction des covariants dérivés, qui est spéciale au cas de formes primaires : cette réduction pourra être utilisée dans la recherche des covariants primaires.

Au début de ce travail, tous les covariants ont été ramenés aux covariants primaires de formes primaires. Les résultats que nous avons obtenus permettent donc de déterminer tous les covariants, et par suite toutes les fonctions invariantes de formes quelconques à plusieurs séries de n variables.

Si l'on suppose $n = 2$, les covariants (ou formes) primaires sont les covariants (ou formes) à une seule série de deux variables; dans la même supposition, les covariants dérivés de formes primaires sont les *transvections* (*Ueberschiebungen*). Par conséquent, on retrouve par l'application de notre méthode les résultats obtenus par Clebsch et M. Gordan, dans la théorie des formes à plusieurs séries de deux variables.

Digitized by Google

NOTE.

Démonstration d'une propriété des semi-invariants symboliques.

N° 1. Ainsi que nous l'avons rappelé (§ II, Rem. II), un semi-invariant symbolique est une somme de produits P, dont les facteurs sont des déterminants d'ordre $k = 1, 2, \ldots n$, analogues à

$$\delta = \begin{vmatrix} s1_1 & s1_2 & \ldots & s1_k \\ s2_1 & s2_2 & \ldots & s2_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ sk_1 & sk_2 & \ldots & sk_k \end{vmatrix},$$

composés des k premiers coefficients de k formes linéaires.

Soit T_0, un semi-invariant symbolique, *linéaire* par rapport aux symboles $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha q$, équivalents par permutations alternées; nous établirons la propriété suivante : *on peut exprimer* T_0 *par une somme de produits* P, *tels que les symboles* $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha q$ *soient tous compris dans un même déterminant.*

Il nous suffira de démontrer ce théorème :

La fonction T_0 *est exprimable par une somme de produits* P, *tels que les symboles* $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha j$ *sont compris dans un même déterminant* $(j \overline{\leqslant} q)$.

Le dernier énoncé est évident pour $j = 1$; nous le supposerons exact pour $j = p$ et nous le vérifierons pour $j = p + 1$. La proposition indiquée ci-dessus se trouvera ainsi établie.

N° 2. D'après notre supposition, on peut écrire $T_0 = \Sigma P$, de telle manière que pour chacun des produits P, les symboles $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p$ sont compris dans un même déterminant.

Considérons un produit P qui a pour facteur un déterminant

$$\delta' = [\pm \alpha p + 1, h1, h2 \ldots], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E_1)$$

indépendant du symbole αp (*) : nous représenterons ce produit par la lettre P'. Parmi

(*) Actuellement, nous ne considérons pas les produits P, qui contiennent dans un même facteur δ les symboles $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p, \alpha p + 1$.

Digitized by Google

les facteurs du même produit P', il se trouve un déterminant δ'' contenant à la fois $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p$; nous écrirons

$$\delta' = [\pm \alpha 1 \alpha 2 \ldots \alpha p,\ k1,\ k2 \ldots]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E_2)$$

puis

$$P' = Q \delta' \delta'',$$

en désignant par Q un produit de déterminants δ indépendants des symboles $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p+1$.

Représentons par μ' et μ'' les ordres des déterminants δ', δ''. En développant δ' et δ'' suivant la règle de Laplace, nous obtenons :

$$P' = Q \Sigma_r \alpha p + 1_{r,p+1} [\pm \alpha 1_{r1} \alpha 2_{r2} \ldots \alpha p_{rp}] \times \delta'(rp+1)\, \delta''(r1, r2, \ldots rp) \quad . \quad . \quad (E_3)$$

Dans cette formule, les notations sont les suivantes :

1° $\delta'(rp+1)$ et $\delta''(r1, r2, \ldots rp)$ sont les sous-déterminants de δ', δ'' qui multiplient respectivement le terme $\alpha p + 1_{r,p+1}$ et le déterminant

$$[\pm \alpha 1_{r1} \alpha 2_{r2} \ldots \alpha p_{rp}];$$

2° La sommation s'étend à toutes les valeurs de $r1, r2, \ldots rp, rp+1$, pour lesquelles on a

$$r1, r2, \ldots rp, rp+1 \leqq \mu,$$

μ étant le plus grand des nombres μ', μ''.

Ajoutons au produit P' (formule E_3) les quantités qu'on en déduit par les permutations alternées de $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p$ avec $\alpha p + 1$; le produit P' sera remplacé par une expression symbolique équivalente; abstraction faite d'un facteur numérique, on aura :

$$P' \equiv Q \Sigma_r [\pm \alpha 1_{r1} \alpha 2_{r2} \ldots \alpha p_{rp}\, \alpha p + 1_{r,p+1}] S_r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E_4)$$

en prenant

$$\left.\begin{aligned} S_r = {} & \delta'(rp+1)\, \delta''(r1, r2, \ldots rp) - \delta'(r1)\, \delta''(rp+1, r2, \ldots rp) \\ & - \delta'(r2)\, \delta''(r1, rp+1, r3 \ldots rp) - \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (E_5)$$

Remarque. — Les nombres $r1, r2, \ldots rp, rp+1$, dans la formule (E_4), doivent nécessairement être supposés distincts. Il en résulte que l'on ne peut pas avoir en même temps les relations $\mu' \leqq \mu''$, $\mu'' = p$. En effet, dans la supposition inverse, $rp+1$, qui est un des nombres $1, 2, 3 \ldots \mu''$, serait compris dans la suite $1, 2, 3 \ldots p$, et il en serait de même de $r1, r2, \ldots rp$. Ainsi les nombres $r1, r2, \ldots rp+1$ ne seraient pas distincts. En conséquence, *si l'on a* $\mu' \leqq \mu''$, *on a nécessairement* $\mu'' > p$.

D'un autre côté, *si l'on a* $\mu'' < \mu'$, *on a nécessairement* $\mu' > p$; c'est ce qui résulte de la relation $\mu'' \geqq p$.

Digitized by Google

N° 3. Nous transformerons la formule (E_5), en faisant usage des propriétés des sous-déterminants : nous examinerons séparément les cas où l'on a $\mu' \gtrless \mu''$ ou bien $\mu'' < \mu'$.

Première supposition : « on a $\mu' \gtrless \mu''$. »

D'après la remarque indiquée ci-dessus (n° 2), l'ordre μ'' du déterminant $\delta'' = \{\pm \alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p, k1, k2, \ldots\}$ est supérieur à p. Par conséquent, il existe des dérivées analogues à $\frac{d}{dk1_{r.p+1}} \delta''(r1, r2, \ldots rp)$, différentes de zéro.

Cela posé, considérons l'expression

$$S'_r = \Sigma_k \{k_1 \delta'(1) + k_2 \delta'(2) + \cdots + k_t S'(t) + \cdots + k_{\mu''} \delta'(\mu'')\} \times \frac{d}{dk_{r.p+1}} \delta''(r1, r2, \ldots rp), \quad . \quad . \quad (E_6)$$

en étendant la sommation aux différentes séries k, de coefficients $k1, k2, \ldots$, comprises dans le déterminant δ''.

Dans la somme S'_r, le sous-déterminant $\delta'(t)$ est multiplié par

$$\Sigma_k k_t \frac{d}{dk_{r.p+1}} \delta''(r1, r2, \ldots rp);$$

cette dernière expression est nulle quand t est différent de $r1, r2, \ldots rp, rp+1$; pour $t = rp+1, r1, r2 \ldots rp$, elle a les valeurs :

$$\delta''(r1, r2, \ldots rp), \quad -\delta''(rp+1, r2, \ldots rp), \quad -\delta''(r1, rp+1, r3, \ldots rp), \text{ etc.}$$

Par suite, les sommes S'_r et S_r sont égales. D'après la formule

$$\delta' = \{\pm \alpha p + 1, h1, h2, \ldots\},$$

on peut remplacer l'équation (E_6) par

$$S_r = S'_r = \Sigma_k \{\pm k, h1, h2, \ldots\} \times \frac{d}{dk_{r.p+1}} \delta''(r1, r2, \ldots rp).$$

En substituant cette valeur de S_r dans la relation (E_4), on trouve que P' s'exprime linéairement au moyen de produits analogues à

$$Q \times \{\pm k, h1, h2, \ldots\} \times \Sigma_r \{\pm \alpha 1_{r1}, \alpha 2_{r2}, \ldots \alpha p+1_{r.p+1}\} \times \frac{d}{dk_{r.p+1}} \delta''(r1, r2, \ldots rp);$$

la dernière somme, Σ_r, est égale à un déterminant δ, contenant $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p+1$. Par conséquent, si l'on suppose $\mu' \gtrless \mu''$, le produit P' est équivalent à une somme de produits analogues, comprenant dans un même déterminant les symboles $\alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha p, \alpha p+1$.

N° 4. *Deuxième supposition :* « $\mu'' < \mu'$. »

L'ordre μ' du déterminant $\delta' = [\pm \alpha p + 1, h1, h2, \ldots]$ est supérieur à p [n° 2. Remarque]; par conséquent, il existe des dérivées, analogues à $\frac{d^p \delta'(rp+1)}{dh1_{r1} dh2_{r2} \ldots dhp_{rp}}$, différentes de zéro.

Digitized by Google

Prenons

$$S''_r = \Sigma_t \left\{ \Sigma_h [\pm h1_{t1} h2_{t2} \dots hp_{tp}] \delta''(t_1, t_2, \dots t_p) \right\} \frac{d^p \delta'(rp+1)}{dh1_{r1} dh2_{r2} \dots dhp_{rp}},$$

en faisant les conventions suivantes :

1° La somme Σ_t se rapporte à tous les systèmes distincts de nombres $t1, t2, \dots tp$, compris dans la suite $1, 2, 3, \dots \mu'$; 2° la somme Σ_h se rapporte à tous les systèmes distincts de coefficients h compris dans le déterminant $\delta' = [\pm \alpha p + 1, h1, h2 \dots]$.

Dans la double somme S''_r, le sous-déterminant $\delta''(t1, t2, \dots tp)$ est multiplié par

$$\Sigma_h [\pm h1_{t1} h2_{t2} \dots hp_{tp}] \frac{d^p \delta'(rp+1)}{dh1_{r1} dh2_{r2} \dots dhp_{rp}};$$

ce multiplicateur est nul quand $t1, t2, \dots tp$ ne sont pas compris dans la suite $r1, r2, \dots rp, rp+1$. D'après cette remarque, et d'après la formule (E_3), on trouve $S''_r = S_r$.

D'un autre côté, la somme S''_r peut s'écrire :

$$\Sigma_h [\pm h1, h2, \dots hp, k1, k2, \dots] \frac{d^p \delta'(rp+1)}{dh1_{r1} dh2_{r2} \dots dh_{rp}};$$

ou bien :

$$\Sigma_h [\pm h1, h2, \dots hp, k1, k2 \dots] \frac{d^{p+1} \delta'}{dh1_{r1} dh2_{r2} \dots dhp_{rp} d\alpha p + 1_{r,p+1}}.$$

Cette expression est aussi égale à S_r, et d'après la formule (E_4), il en résulte que P' est une somme d'expressions analogues à

$$Q \times [\pm h1, h2, \dots hp, k1, k2 \dots][\pm \alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha p, \alpha p + 1, hp + 1, \dots].$$

De cette manière, *le produit* $P' = Q[\pm \alpha p + 1, h1, h2, \dots][\pm \alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha p, k1, k2, \dots]$, (n° 2), *est équivalent à une somme de produits analogues, comprenant dans un même déterminant les symboles* $\alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha p, \alpha p + 1$.

Nous avons obtenu ce même résultat en supposant $\mu' \gtrless \mu''$, puis $\mu'' < \mu'$.

Un semi-invariant T_0, relatif aux symboles $\alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha p, \alpha p + 1$, est une somme de produits P' et de produits de déterminants δ, dont un facteur contient à la fois les symboles $\alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha p, \alpha p + 1$. Le semi-invariant T_0 est donc exprimable par une somme de produits de la dernière catégorie.

D'après les considérations développées au début de cette Note, la proposition que nous avions en vue se trouve complètement établie.

N° 5. *Exemple.* Prenons

$$P' = \begin{vmatrix} \alpha 1_1 & \alpha 1_2 & \alpha 1_3 \\ k1_1 & k1_2 & k1_3 \\ k2_1 & k2_2 & k2_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha 2_1 & \alpha 2_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

En développant les déterminants, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P' = {} & \alpha 1_1\alpha 2_1 \times h_2(k1_2k2_3) - \alpha 1_1\alpha 2_2 \times h_1(k1_2k2_3) \\ & - \alpha 1_2\alpha 2_1 \times h_2(k1_1k2_3) + \alpha 1_2\alpha 2_2 \times h_1(k1_1k2_3) \\ & + \alpha 1_3\alpha 2_1 \times h_2(k1_1k2_2) - \alpha 1_3\alpha 2_2 \times h_1(k1_1k2_2). \end{aligned}$$

Ajoutons à P′ l'expression que l'on en déduit par la permutation alternée des symboles $\alpha 1$, $\alpha 2$; le résultat obtenu est symboliquement équivalent à 2P′, et il s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & (\alpha 1_1\alpha 2_2)\{h_2(k1_1k2_3) - h_1(k1_2k2_3)\} \\ + {} & (\alpha 1_3\alpha 2_1) \times h_2(k1_1k2_2) - (\alpha 1_3\alpha 2_2) \times h_1(k1_1k2_2). \end{aligned}$$

D'après les relations

$$\left.\begin{aligned} & h_2(k1_1k2_3) - h_1(k1_2k2_3) = k2_3(k1_1h_2) - k1_3(k2_1h_2), \\ & h_2(k1_1k2_2) = -k1_2(k2_1h_2) + k2_2(k1_1h_2), \\ & h_1(k1_1k2_2) = -k1_1(k2_1h_2) + k2_1(k1_1h_2), \end{aligned}\right\} (*)$$

on peut remplacer P′ par

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha 1_1 & \alpha 1_2 & \alpha 1_3 \\ k1_1 & k1_2 & k1_3 \\ \alpha 2_1 & \alpha 2_2 & \alpha 2_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k2_1 & k2_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha 1_1 & \alpha 1_2 & \alpha 1_3 \\ \alpha 2_1 & \alpha 2_2 & \alpha 2_3 \\ k2_1 & k2_2 & k2_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k1_1 & k1_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Les produits compris dans la dernière expression sont des semi-invariants symboliques analogues à P : de plus, les symboles $\alpha 1$, $\alpha 2$ se trouvent réunis dans les mêmes déterminants.

(*) Les relations analogues pour le cas général ont été représentées par la formule $S_r = S'_r$ [voir n° 3].

Digitized by Google

RECHERCHES

SUR

LE SYSTÈME CUTANÉ ET SUR LE SYSTÈME MUSCULAIRE

DU LOMBRIC TERRESTRE

(LUMBRICUS AGRICOLA Hoffmeister)

PAR

Paul CERFONTAINE,

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 7 décembre 1889.)

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

Un nombre assez considérable de travaux ont paru tant sur l'anatomie que sur l'histologie du Lombric.

L'ouvrage de M. *Charles Morren* (32), paru en 1826, est la base de nos connaissances sur l'anatomie du Ver de terre. Les travaux d'*Ewald Hering* (15) et de *J. d'Udekem* (30), qui ont fait connaître les ovaires, et celui de *C. Gegenbauer* (12), qui nous a donné les premières notions exactes sur la constitution et la répartition des organes segmentaires, relatent les principales découvertes dont l'anatomie du Lombric a été l'objet pendant la période qui s'étend de 1826 jusqu'en 1868.

En 1869, *Éd. Claparède* (4) publia ses recherches histologiques sur le Ver de terre; son mémoire est encore classique aujourd'hui; c'est un travail anatomique précis, exact, et, si des erreurs s'y sont glissées çà et là, elles proviennent spécialement des méthodes histologiques défectueuses employées à cette époque.

Depuis ce temps, plusieurs travaux importants ont paru sur des points spéciaux relatifs à l'organisation et aussi à la structure de certains organes ou de certains appareils; signalons particulièrement les mémoires de *R. Horst* (18 et 19), de *A. von Mojsisowicz* (29 et 30) sur le système cutané, et les ouvrages récents de *Bergh* (53), de *Friedländer* (54), de *Jacquet* (55) et de *Ude* (56) sur les organes sexuels, le système nerveux, le système vasculaire et la constitution de la paroi du corps.

Citons encore la Monographie des Oligochètes, publiée en 1884 par

Digitized by Google

Fr. Vejdovsky (51) qui, pour être un travail général, n'en renferme pas moins des données importantes sur le Lombric terrestre.

Bien des questions cependant réclament encore une solution et, comme le Ver de terre est un animal facile à se procurer et qui est pris constamment comme type d'Oligochète, il importe que l'on cherche à combler les lacunes que présente encore la connaissance de son organisation.

Qu'il me soit permis de remercier ici publiquement M. le professeur Édouard Van Beneden qui, après m'avoir engagé à entreprendre ce travail, n'a cessé de me prodiguer ses savants conseils et a bien voulu contrôler journellement mes résultats.

J'ai entrepris une série de recherches sur l'ensemble de l'organisation du Lombric, en vue d'arriver à faire une monographie anatomique de cet animal.

J'ai l'honneur d'adresser aujourd'hui à la Classe un mémoire sur le système cutané et sur le système musculaire, me réservant de lui communiquer successivement les résultats de mes recherches sur la constitution des différents appareils du Ver de terre.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

La Bibliographie a été faite dans ces derniers temps d'une façon irréprochable par *Fr. Vejdovsky* (51).

Il nous énumère en tout deux cent quatre-vingt-trois ouvrages, parmi lesquels je citerai ceux qui ont plus spécialement rapport à l'espèce qui nous occupe :

1. Bloomfield, J., On the development of the Spermatozoa. P. I. Lumbricus (*Quart. Journ. of micr. sc.*, vol. XX).
2. Bosc, Histoire naturelle des Vers pour faire suite au Buffon. Article Naïade et Lombric. Paris, 1830.
3. Charvin, P., Le Lombric terrestre. Paris, imp. appart., 1852.
4. Claparède, E., Histologische Untersuchungen über den Regenwurm (*Z. f. w. Z.*, Bd. XIX, 1869).
5. Clarke, J. Lockhart, On the nervous system of Lumbricus terrestris (*Roy. Soc. Proc.*, VIII, 1856).
6. Cohn, F., Ueber die Phosphorescenz der Regenwürmer (*Z. f. w. Z.*, 1873).
7. Dufour, L., Notice sur les cocons ou les œufs du Lumbricus terrestris (*Ann. sc. nat.*, 1re série, t. V, 1825).
8. Dufour, L., Nouvelle notice sur les œufs du Lumbricus terrestris (*ibid.*, 1828).
9. Dugès, Ant., Recherches sur la circulation, la respiration et la reproduction des Annélides abranches (*ibid.*, 1828).
10. Fitzinger, L., Beobachtungen über die Lumbrici (*Isis*, 1833).

Digitized by Google

11. Fraisse, P., Ueber Spermatophoren bei Regenwürmern (*Arbeit. in zool. Inst. in Würzburg*, Bd. V).

12. Gegenbauer, C., Ueber die sogenannten Respirationsorgane der Regenwürmer (*Z. f. w. Z.*, Bd. IV, 1853).

13. Grass, Lumbricorum terrestrium regeneratio (*Acta Acad. nat. curios.*, 1689).

14. Grube, Ed., Ueber den Lumbricus variegatus Müller's und ihm verwandte Anneliden (*Wiegmann's Archiv*, 1844).

15. Hering, Ew., Zur Anatomie und Physiologie der Generationsorgane des Regenwurmes (*Z. f. w. Z.*, IV, 1857).

16. Hoffmeister, W., De vermibus quibusdam ad genus lumbricorum pertinentibus. Berolini, 1842.

17. Hoffmeister, W., Die bis jetzt bekannten Arten aus der Familie der Regenwürmer. Braunschweig, 1845.

18. Horst, R., Aanteekeningen op de anatomie van Lumbricus terrestris (*Tijdschr. nederl. dierk. Vereen.*, deel III, 1876).

19. Horst, R., Die Lumbricidenhypodermis (*ibid.*, deel IV, afl. 1, p. 56).

20. Kleinenberg, N., The development of the Earthworm (*Quart. Journ. of micr. sc.*, 1880).

21. Lankester, E., Anatomy of the Earthworm (*Transact. of the micr. Soc. London*, 1864).

22. Lankester, E., On the structure and origin of the Spermatophors (*Quart. Journ. of micr. sc.*, 1871).

23. Leo, J., Dissertatio inauguralis de structura Lumbrici terrestris. Regiomonti, 1820.

24. Leo, J., Ueber die Fortpflanzung der Regenwürmer (*Isis*, 1820).

25. Leydig, Fr., Ueber das Nervensystem der Anneliden (*Müller's Archiv*, 1862).

26. Leydig, Fr., Ueber Phreoryctes menkeanus nebst, etc. (*Arch. f. micr. Anat.*, I, 1865).

27. Meckel, J.-F., Ueber die Zeugung der Regenwürmer (*Meckel's deutsch. Arch. f. Phys.*, 1815).

28. Meckel, H., Ueber Geschlechtsapparat einiger hermaphroditen Thiere (*Müller's Archiv*, 1844).

29. Mojsisowicz, A. (von), Ueber den Bau der Lumbricidenhypodermis (*Sitz. d. kais. Acad. d. Wiss. in Wien*, 1877).

30. Mojsisowicz, A. (von), Zur Lumbricidenhypodermis (*Zool. Anzeiger*, 1879).

31. Montègre, A. (de), Observations sur le Lombric ou Ver de terre. Paris, Musée d'hist. nat., 1815.

Digitized by Google

32. Morren, Ch., Descriptio structurae anatomicae et expositio historiae naturalis Lumbrici vulgaris sive terrestris. Bruxelles, 1826.

33. Morren, Ch., De Lumbrici terrestris historia naturalis nec non anatome tractatus. Bruxelles, 1822.

34. Newport, G., On the reproduction of lost parte in Earthworm (*Proc. Linn. Soc.*, 1855).

35. Perrier, Edm., Recherches pour servir à l'histoire des Lombricins terrestres (*Nouv. arch. du Mus.* Paris, 1872).

36. Perrier, Edm., Organisation des Lombricins terrestres (*Arch. de zool. exp. et gén.*, 1873-1874).

37. Perrier, Edm., Note sur l'accouplement des Lombricins (*ibid.*, 1875).

38. Pontallié, Recherches sur la nutrition et la reproduction du Lombric terrestre (*Ann. sc. nat.*, 1853).

39. Power d'Arcy, On the endothelium of, etc. (*Quart. Journ. of micr. sc.*, 1878).

40. Quatrefages, A. (de), Mémoire sur le système nerveux (*Comptes rendus Acad. sc. Paris*, 1852).

41. Quatrefages, A. (de), Note sur la classification des Annélides (*Ann. sc. nat.*, 1865).

42. Ratzel und Warschawsky, Zur Entwicklungsgeschichte der Regenwürmer (*Z. f. w. Z.*, 1868).

43. Rorie, James, On the nervous system of Lombricus terrestris (*Quart. Journ. of micr. sc.*, 1863).

44. San Giovanni, Ueber die Reproduction des Regenwurmes (*Froriep's Notizen*, 1824).

45. Schwalbe, Ueber die Muskelfasern von Lumbricus (*Arch. f. micr. Anat.*, 1869).

46. Surriray, Notes sur quelques parasites et produits organiques du Lombric terrestre (*Ann. sc. nat.*, 1836).

47. Treviranus, G., Ueber die Zeugung des Regenwurmes (*Tiedemann's Zeitschr. f. Phys.*, 1835).

48. Trouessart, E., Sur les constructions terriformes des Vers de terre en France (*Comptes rendus Acad. sc. Paris*, t. XCV).

49. Udekem, J. (d'), Développement du Lombric terrestre (*Mém. cour. et mém. sav. étr. Acad. Belg.*, 1855).

50. Udekem, J. (d'), Mémoire sur les Lombricins (*Mém. Acad. roy. de Belg.*, 1862).

51. Vejdovsky, Fr., System und Morphologie der Oligochaeten. Prag, 1884.

52. Wichmann, Vom Gürtel des Regenwurmes (*Berol. naturf. Fr. Berl.*, 3, 1777).

Digitized by Google

Ajoutons-y quelques ouvrages publiés depuis lors, à savoir :

53. Bergh, Untersuchungen über den Bau und die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Regenwürmer (*Z. f. w. Z.*, XLIV, 1886).

54. Friedländer, B., Beiträge zur Kenntniss des Centralnervensystems von Lumbricus (*ibid.*, 1888).

55. Jacquet, M., Recherches sur le système vasculaire des Annélides (*M. T. zu Neapel*, 1885).

56. Ude, Herrmann, Ueber die Rückenporen der terricolen Oligochaeten nebst Bemerkungen, etc. (*Z. f. w. Z.*, Bd. XLIII, 1886, p. 87).

Digitized by Google

RECHERCHES

SUR

LE SYSTÈME CUTANÉ ET SUR LE SYSTÈME MUSCULAIRE

DU LOMBRIC TERRESTRE

(LUMBRICUS AGRICOLA Hoffmeister).

I.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Mon intention n'est pas ici de décrire tous les caractères extérieurs du Ver de terre; je veux relever seulement certains points encore discutés aujourd'hui.

On lit généralement dans les traités de zoologie que le nombre d'anneaux chez le Lombric est d'environ cent quatre-vingts.

Il y a là certainement de l'exagération, car, en général, je n'ai compté que de cent à cent cinquante anneaux et, chez le plus grand exemplaire que j'aie eu entre les mains, un individu qui, conservé dans l'alcool, mesure 33 centimètres de long, je ne compte que cent quarante-trois anneaux. Et cependant, d'après la diagnose donnée dans ces derniers temps par *Ude* (56) pour le *Lumbricus agricola* (*herculeus* de Savigny), c'est bien de cette espèce qu'il s'agit.

La forme du Ver est cylindroïde, mais elle varie constamment quand l'animal est en mouvement.

La forme cylindrique est surtout apparente à l'extrémité antérieure et la coupe transversale y est toujours nettement circulaire, que l'individu soit pris à l'état d'extension ou à l'état de contraction.

Digitized by Google

Dans la région moyenne et dans la partie postérieure, la forme est cylindrique, un peu aplatie ventralement quand le Ver est à l'état d'extension; mais, lors de la contraction, la forme varie énormément, la coupe transversale devient, dans ce cas, un quadrilatère irrégulier, à trois côtés plans ou légèrement concaves et un quatrième côté convexe. Le côté convexe est le plus grand et situé du côté du dos, la face ventrale est constituée par un côté plan légèrement concave et les deux autres côtés, plus petits que ce dernier, sont latéraux, mais plus rapprochés de la ligne médio-ventrale que de la ligne médio-dorsale.

Les angles du quadrilatère sont occupés chacun par un groupe de soies.

Le nombre des soies est déterminé pour chaque segment et est le même pour tous. Tous les anneaux portent des soies; il n'y a d'exception que pour le segment buccal et l'anneau anal. Quelquefois, cependant, plusieurs segments à l'extrémité postérieure ne portent pas de soies.

Un organe très apparent sur des individus bien développés, c'est ce que l'on désigne sous le nom de *clitellum* ou ceinture. Il se fait remarquer par sa couleur pâle blanc-jaunâtre et règne surtout du côté du dos et sur les faces latérales du corps. Il a l'apparence d'une selle plutôt que d'une véritable ceinture. Sa place et son étendue ont été controversées dans les différents ouvrages traitant de ces questions.

Comme on le sait depuis le mémoire de *Hermann Ude* (56) sur les pores dorsaux des Oligochètes et sur la systématique des Lombricides, la ceinture chez l'espèce *agricola* occupe l'étendue de six segments et ce sont les segments 32, 33, 34, 35, 36, 37; sur les bords de la face ventrale de la ceinture règnent deux bourrelets très apparents désignés par Ude sous le nom de *Tubercula pubertatis;* ils occupent les segments 33, 34, 35 et 36.

A propos de ces chiffres, disons qu'il faut s'entendre sur la numération des segments du Lombric. Il en est parmi les auteurs qui comptent comme numéro 1 le segment buccal, d'autres ne commencent la numération qu'au segment suivant. C'est ainsi que, pour *Claparède* (4) et d'autres, les orifices sexuels mâles se trouvent sur le 15e anneau antérieur, tandis que pour *H. Ude* (56) et *Bergh* (53) ils sont sur le 14e segment antérieur. De même pour la région de la ceinture, pour les premiers on a cet organe du 32e au

Digitized by Google

37e segment, tandis que pour les seconds elle se trouve du 31e au 36e segment inclus. Je me rallierai à la première opinion, et cela pour des considérations que je ferai valoir en parlant du système nerveux central. La diversité d'opinion provient de ce qu'on n'est pas bien fixé sur la valeur morphologique du segment buccal.

Depuis les *Tubercula pubertatis* de *Hermann Udc* jusqu'aux orifices sexuels mâles, donc du 31e jusqu'au 15e segment, s'étendent deux bourrelets peu apparents sur le vivant, mais qui deviennent très nets après traitement par certains réactifs, tel que le liquide de Kleinenberg, ou acide picro-sulfurique.

Nous reviendrons sur ces organes en faisant l'étude de la ceinture. Quant aux teintes irisées que présentent les Lombrics vivants, nous en parlerons à propos de la cuticule.

Nous verrons qu'elles ont leur raison d'être dans les stries de la cuticule et dans un pigment que l'on rencontre dans la couche des muscles circulaires.

II.

PAROI DU CORPS.

Nous étudierons la constitution de la paroi du corps ou tube musculo-cutané, en y distinguant, comme on l'a fait jusqu'ici, les parties suivantes :

A. La *cuticule ;*

B. L'*hypoderme ;*

C. Les *couches musculaires ;*

D. La *membrane péritonéale.*

Dans l'étude de l'hypoderme, nous consacrerons un chapitre à

1° L'*hypoderme proprement dit,* un autre à

2° La *ceinture* ou *clitellum* avec ses dépendances.

Et les trois premiers chapitres de la partie histologique de ce travail traitant respectivement de la *cuticule,* de l'*hypoderme,* de la *ceinture,* constitueront dans leur ensemble l'étude du *système cutané* du Ver de terre.

Digitized by Google

A. Cuticule.

La cuticule est une mince membrane constituant l'enveloppe extérieure du corps.

On arrive aisément à la détacher chez des individus ayant macéré dans une solution très étendue d'acide chromique (1 pour 2,000) ou dans le liquide de Müller fortement dilué.

Vejdovsky (51) préconise à cet effet l'emploi de l'alcool très faible ou de l'eau. Cette dernière présente cependant un grand inconvénient; le Ver mort se décompose rapidement dans l'eau, de sorte que l'on ne peut prolonger la macération au delà d'environ vingt-quatre heures sans altérer profondément les tissus, au point qu'ils se déchirent au moindre contact lorsqu'on veut enlever la cuticule; si l'on veut la détacher avant ce délai, elle ne se prête pas bien à l'examen microscopique, parce qu'un grand nombre d'éléments hypodermiques y restent adhérents et empêchent de voir les détails de structure.

Quant à l'alcool faible, c'est lui qui donne les meilleurs résultats.

Des individus, tués au préalable, sont placés dans une quantité assez notable d'alcool au tiers. Après trois ou quatre jours, il suffit d'inciser la paroi du corps dans toute la longueur, et la cuticule se détache pour ainsi dire spontanément.

Je suis arrivé de la sorte à faire des préparations de cuticules entières, bien propres, exemptes de tout élément des couches plus profondes.

Il est bon de se servir de ciseaux courbes dans cette opération, afin de mieux éviter les déchirures le long du bord de l'incision. On fait une légère entaille vers le milieu du corps, puis on la prolonge successivement jusqu'aux deux extrémités.

On arrive au même résultat en employant de l'alcool plus fort, par exemple à 65°, ce qui prouve que ce n'est pas uniquement par suite de la macération que la cuticule se détache, mais surtout par suite de la contraction subie par les parties sous-jacentes, alors que la cuticule elle-même se contracte très peu.

Digitized by Google

Par suite de ce fait, l'espace, si l'on peut ainsi s'exprimer, que la cuticule circonscrit et dans lequel sont les parties molles devient plus grand que le contenu et celui-ci se détache de son enveloppe; de là l'apparition de plis dans la cuticule.

Ce phénomène nous explique aussi pourquoi, dans les coupes pratiquées à travers les téguments, nous trouvons si souvent la cuticule détachée de l'hypoderme sous-jacent. Ce qui milite encore en faveur de cette manière de voir, c'est que, lorsqu'on fend longitudinalement les morceaux de Lombric avant de les durcir, le décollement de la cuticule se fait à un bien moindre degré. On peut comparer ce phénomène à ce qui se passe chez les Tuniciers. Dans les exemplaires conservés dans l'alcool, chez certaines espèces, les parties molles se détachent complètement de la tunique externe. Seulement, la chose est moins apparente chez le Lombric.

La cuticule ainsi détachée présente encore les reflets irisés que l'on observe sur les Lombrics vivants; cette irisation est surtout apparente pendant la vie à la face dorsale et plus particulièrement dans le tiers antérieur du corps.

C'est dans l'ouvrage de *Perrier* (36) sur les Lombricins terrestres que nous trouvons la meilleure interprétation sur les causes de ces teintes : « C'est en partie à la présence des stries de la cuticule que les téguments des Lombrics doivent les reflets irisés qu'ils présentent et qui se relient aux phénomènes d'interférence bien connus en physique sous le nom de phénomènes des réseaux, combinés peut-être aux phénomènes d'anneaux colorés que doit nécessairement produire la lumière se jouant à travers une enveloppe aussi mince. La diminution d'éclat et même la disparition complète de ces teintes, qui s'observe chez les Lombrics conservés dans l'alcool, tient en partie aux contractions que détermine ce liquide et qui transforment la surface habituellement lisse de ces animaux en une surface ridée peu propre à la production des jeux de lumière, en partie aux coagulations qui se produisent et qui enlèvent aux tissus la semi-transparence qui contribue pendant la vie à l'éclat des teintes. »

Il est évident que les stries de la cuticule sont pour une large part dans la production des teintes irisées en question; cependant, le pigment brun-

Digitized by Google

noir que l'on trouve dans la couche des muscles circulaires y joue également un grand rôle, ce que *Perrier* (36) ne semble pas prendre en considération, puisqu'il ajoute même que la semi-transparence des tissus contribue à l'éclat des teintes.

Ces irisations sont surtout apparentes là où le pigment est le plus abondant et les jeux de lumière ne se manifestent nullement dans les endroits où ce pigment fait défaut.

De même, une cuticule détachée et placée sur fond blanc ne présente pas d'irisations, alors que, placée sur fond noir, elle donne lieu aux phénomènes en question dans toute son étendue.

Nous avons dit que l'on place dans l'alcool des individus préalablement tués. La manière de tuer les Lombrics sans donner lieu à des inconvénients pour les recherches ultérieures, c'est là une question de la plus haute importance.

Je vais indiquer successivement les diverses méthodes qui m'ont donné de bons résultats.

1° Le chloroforme, agissant, non pas directement par ses vapeurs, ce qui donne lieu à de violentes contractions et à une abondante sécrétion de mucus, mais, suivant les indications de *Perrier* (36), peut être utilement employé. A cet effet on place les individus dans une cuvette à dissection et, après les avoir submergés dans de l'eau, on place dans un des coins du baquet un verre à montre renfermant quelques gouttes de chloroforme; on recouvre le tout d'une plaque de verre.

Le chloroforme diffuse lentement dans l'eau et les Vers sont ordinairement anesthésiés au bout d'une demi-heure; d'autres fois, cependant, l'action doit se prolonger plus longtemps, ce qui tient à la vigueur plus ou moins grande des individus, à l'épaisseur de la couche d'eau, à la quantité de chloroforme, etc. L'animal s'endort peu à peu sans subir de contractions et, si l'action est suffisamment prolongée, meurt dans un état d'extension parfaite;

2° Un second procédé, très recommandable lorsqu'on veut fixer les tissus par l'action des alcools successifs, c'est de placer, comme tantôt, les individus dans une cuvette renfermant une couche d'eau d'un demi-centimètre d'épais-

Digitized by Google

seur et, après avoir recouvert d'un papier-filtre, on y laisse tomber, goutte à goutte, de l'alcool fort (95°, par exemple); au bout de quelque temps, les Vers sont morts et parfaitement étendus;

3° Enfin, une méthode qui est excellente, sinon la meilleure de toutes, c'est l'emploi du curare.

A l'aide d'une petite seringue, après avoir percé la paroi du corps au moyen de la canule, on injecte environ 2 centimètres cubes d'une solution de curare à 1 pour 500. On place ensuite l'animal dans l'eau et, après un quart d'heure environ, il est complètement immobilisé.

Soit dit, en passant, le chloral, qui donne de si beaux résultats pour d'autres animaux, ne peut être employé ici; j'ai fait usage sans succès de diverses solutions, depuis un demi jusqu'à 3 pour 100. Dans les solutions faibles, l'animal n'est pour ainsi dire pas incommodé, et, dans les solutions fortes, il se livre à de violentes contractions, tout en résistant très longtemps.

Il serait donc inutile d'essayer des solutions plus concentrées encore, puisque l'animal mourrait dans un état de contraction fort préjudiciable pour les recherches ultérieures.

Structure. — La structure de la cuticule ne peut s'observer que sur des préparations fraîches parce que l'examen doit se faire dans l'eau ou, mieux encore, dans l'alcool. On fait avantageusement usage d'alcool méthylique, qui a un indice de réfraction moindre que les alcools supérieurs, de telle façon que l'on y peut mieux voir les éléments de la cuticule.

D'un côté, les préparations à l'alcool ou à l'eau, fermées au moyen de paraffine, gomme-laque, etc., sont gâtées au bout de quelques jours; d'un autre côté, on ne peut observer aucun détail de structure sur des préparations montées dans le baume de Canada, résine d'Ammar, glycérine, parce que, dans ces substances, les éléments de la cuticule ayant un indice de réfraction très voisin, sinon identique, les préparations deviennent complètement transparentes, au point que l'on ne peut absolument plus rien voir.

On éprouve quelquefois bien des difficultés pour arriver à bien étendre

Digitized by Google

sur porte-objet des membranes aussi minces. C'est cependant une condition *sine qua non* pour que l'examen puisse bien être fait.

La manière d'opérer la plus recommandable est la suivante : on découpe un morceau de cuticule dans telle ou telle région du corps que l'on veut examiner. On opère dans une cuvette à dissection à moitié remplie du liquide dans lequel l'examen doit être fait. Un porte-objet est placé au fond du baquet et, à l'aide d'une aiguille, on amène le morceau de cuticule au-dessus de la lame de verre. En soulevant alors cette dernière d'un côté et tout en maintenant de ce même côté la cuticule appliquée contre le verre, on verra celle-ci s'étaler sans qu'il reste de plis à mesure qu'elle sort du liquide. Après avoir convenablement essuyé le porte-objet, il ne reste plus qu'à ajouter une goutte de liquide et placer le couvre-objet pour pouvoir procéder à l'examen microscopique.

La cuticule, à un faible grossissement, se présente comme une mince membrane parsemée d'une quantité innombrable de petits points noirs (pl. I, fig. 5).

Sur chaque segment, si l'on fait exception pour le segment céphalique et le plus souvent un, quelquefois plusieurs segments à l'extrémité postérieure, on aperçoit comme huit petits tubes disposés en quatre groupes de deux et répondant aux soies. C'est qu'au niveau des soies la cuticule s'invagine vers l'intérieur pour leur constituer une sorte de gaine qui s'enlève en même temps que la cuticule. Quelquefois la soie y reste engagée comme dans un fourreau et c'est alors qu'on obtient ce que nous montre la figure 5, planche I.

Deux invaginations semblables répondent aux orifices des canaux segmentaires; elles se trouvent sur le bord antérieur de chaque segment, à la face ventrale, en avant des soies. Il en est de même au niveau des orifices sexuels mâles et femelles, sur le 15^{e} et le 14^{e} anneau, et aux orifices des réceptacles séminaux, dans les sillons séparant le 9^{e} du 10^{e} et le 10^{e} du 11^{e} segment.

On constate le même fait au niveau de l'anus, et la plus remarquable des invaginations, qui peut atteindre 2 centimètres de longueur, est au niveau de l'orifice buccal.

Digitized by Google

Claparède (4) décrit pareille invagination au niveau des pores dorsaux; mais *Hermann Ude* (56) a démontré, dans ces derniers temps, qu'il n'en est pas ainsi.

On peut s'en assurer sur des coupes longitudinales ou transversales de la paroi du corps; au niveau de ces orifices, que l'on trouve en général chez l'espèce qui nous occupe à partir du 8e segment antérieur, au fond des sillons intersegmentaires, sur la ligne médio-dorsale, la cuticule s'arrête brusquement sans subir aucune modification et présente simplement une solution de continuité. L'erreur commise par le savant génevois se comprend aisément, vu que cet auteur s'était fondé sur l'examen de coupes faites tangentiellement à la surface du corps.

Les pores dorsaux s'ouvrent au fond des sillons intersegmentaires; de plus, l'emploi des réactifs fixateurs produit toujours une certaine contraction qui infléchit plus ou moins vers l'intérieur les différentes couches de la paroi du corps, de sorte qu'une coupe horizontale, parallèle à la surface, passera à la fois par la cuticule et les autres couches constituantes de l'enveloppe musculo-cutanée, et c'est ainsi que *Claparède* a pu conclure à une invagination de la cuticule au niveau des pores dorsaux.

Un examen plus minutieux, fait à un plus fort grossissement, nous montre la cuticule parsemée d'une quantité de petites croix (pl. I, fig. 2), et, à l'intersection des deux branches de chaque croix, se trouve, soit une tache sombre, quand on met au point le plan superficiel, soit un point clair, quand c'est le plan profond qui s'y trouve. Cette tache ou ce point clair n'est autre chose qu'un trou dans la cuticule, et c'est à travers ces orifices que des glandes mono-cellulaires situées dans la couche sous-jacente (*hypoderme de Weissmann*) déversent à la surface du corps leur produit de sécrétion.

Dans toute l'étendue de la ceinture, du 32e au 37e anneau inclus, ces orifices sont beaucoup plus nombreux que partout ailleurs, ce qui est en rapport avec l'énorme quantité de glandes développées dans l'hypoderme de cette région du corps (pl. I, fig. 3).

Ces petits orifices font défaut sur une étroite bande en avant et en arrière de chaque sillon intersegmentaire. Ils manquent également, comme *Claparède* (4) et *Mojsisowicz* (29) le font remarquer, autour des follicules séti-

Digitized by Google

gères ; il en est de même autour de toutes les ouvertures au niveau desquelles la cuticule s'invagine vers l'intérieur du corps (pl. II, fig. 19).

Dans les quatre ou cinq segments antérieurs et dans quelques segments de l'extrémité postérieure, ces orifices excréteurs de glandes sont relativement très peu nombreux sur une bande étroite répondant au milieu de chaque segment. Dans l'étendue de cette bande, on trouve de petits espaces ronds ou ovalaires où la cuticule amincie présente encore des ouvertures beaucoup plus petites que celles des glandes, et ces espaces répondent à des organes de sens que je décrirai plus loin dans l'étude de l'hypoderme (pl. I, fig. 1).

Ces espaces sont surtout abondants aux extrémités du Ver, mais on les trouve encore éparpillés çà et là sur toute la surface du corps. Cependant, c'est toujours sur un cercle passant par les huit soies et répondant, par conséquent, au milieu des segments qu'on les rencontre en plus grande abondance et plus particulièrement au voisinage même des soies (pl. II, fig. 19).

Ces îlots de fins pores ont été décrits en premier lieu par *F.-E. Schulze,* mais uniquement sur le lobe antérieur du segment céphalique. *Mojsisowicz* (29) ne les signale également que sur le premier segment antérieur.

La petite croix que l'on remarque à chaque canal excréteur de glande et dont les bras vont diminuant de largeur à partir même de l'orifice provient de ce que la cuticule est parcourue par deux systèmes de stries qui sont beaucoup plus apparentes au voisinage des orifices glandulaires, par suite d'un écartement plus accentué des éléments constitutifs de la cuticule.

Ces deux systèmes de stries ont été décrits par *Claparède* (4) comme se coupant sous un angle de 70° à 75°; pour *Perrier* (36), l'angle est de 80°; enfin, pour *Mojsisowicz* (29), il est à peu près droit. Cette dernière manière de voir est la vraie.

Quant à la direction de ces stries, il n'y a que *Mojsisowicz* qui en parle ; il décrit un système comme longitudinal, l'autre comme circulaire.

Il nous dit que, sur une coupe transversale du corps, on peut distinguer dans la cuticule deux assises, une externe longitudinale et une interne

Digitized by Google

épaisse de faisceaux circulaires [1]. Il donne une figure schématique de cette disposition.

D'après mes observations, je ne puis nullement confirmer cette manière de voir de *Mojsisowicz* (29), car, en examinant de face un morceau de cuticule et en tenant compte de son orientation, on peut aisément s'assurer de ce que les deux systèmes de stries sont obliques par rapport à l'axe du corps.

Les deux systèmes se coupent à angle droit et toutes les stries font avec l'axe longitudinal du corps un angle de 45°.

Il est donc évident qu'une coupe transversale passera obliquement à travers tous les faisceaux de la cuticule et, par suite, il est impossible d'observer sur pareille coupe deux assises de faisceaux dont l'une serait longitunale et l'autre circulaire.

Une autre question, c'est de savoir si les deux systèmes de stries sont, oui ou non, dans un même plan.

D'Udekem (50) nous dit que la surface externe de la cuticule est striée dans deux sens par des lignes formant des losanges; pour lui, toutes ces lignes seraient donc dans un même plan.

Claparède (4) ne nous dit rien à ce propos. *Vogt* et *Yung* [2] laissent la question irrésolue, car, d'après eux, « ces stries sont peu profondes et nous n'avons pas réussi à diviser la cuticule en carrelets ou en rubans par l'emploi de réactifs. »

F.-E. Schulze nous rapporte qu'il est parvenu à dissocier la cuticule en faisceaux après l'action du liquide de Müller.

Pour arriver à dissocier les éléments constitutifs de la cuticule, il suffit de prendre sur porte-objet, un morceau de cuticule d'un individu ayant macéré dans l'alcool au tiers et en déchirant, autant que possible, au moyen d'aiguilles fines, il arrive presque toujours que l'on peut observer sur

[1] « Wie F.-E. Schulze zuerst beobachtete sind die Fasern dieses Streifensystems isolirbar, und lassen sich an Querschnitten, durch die Cuticula, zwei verschiedene Schichten an derselben unterscheiden; eine dicke, innere circuläre und eine äussere aus längsverlaufenden Fasern gebildete. » (Siehe Fig. 7.)

[2] Vogt und Yung, *Traité pratique d'anatomie comparée*, 1885.

Digitized by Google

le bord de certains fragments des rubans isolés de substance cuticulaire (pl. I, fig. 4).

Cette seule observation permet d'affirmer avec certitude que les deux systèmes de stries ne sont pas dans un même plan, puisque les faisceaux dont les stries ne sont que les limites sont dans des plans différents.

Les préparations de faisceaux isolés ne permettent pas plus que l'examen de la cuticule par transparence de trancher la question de savoir s'il y a deux ou plusieurs assises de faisceaux.

Pour cela il faut recourir à des coupes passant perpendiculairement à travers les faisceaux d'une direction, longitudinalement à travers ceux de l'autre direction.

On détache un morceau du tube musculo-cutané et après l'avoir bien étalé et enchâssé, on en fait des coupes dans une direction faisant angle de 45 degrés avec l'axe longitudinal du corps.

L'examen de telles préparations colorées sur porte-objet [1] nous montre que la cuticule reste presque toujours en place, même dans des coupes très fines; quand on pratique au contraire des coupes longitudinales ou transversales, la cuticule se détache souvent, se déchire même dans la plupart des cas. Ceci tient : 1° en partie à ce que la cuticule s'imprègne mal de paraffine, mais 2° certes aussi à l'obliquité des coupes par rapport aux faisceaux de la cuticule, et 3° à ce que dans le cas des coupes faisant angle de 45° avec l'axe longitudinal du corps on étale la paroi du corps et alors la cuticule reste mieux accollée aux parties molles que lorsqu'on durcit un morceau de Ver non fendu en longueur.

[1] La cuticule ne se colore pour ainsi dire pas dans les matières colorantes couramment employées dans les laboratoires, telles que le carmin boracique, le picrocarminate d'ammoniaque, etc. On arrive à la colorer en bleu par l'hématoxyline en suivant ce procédé :

1° Enduire le porte-objet d'une mince couche d'une solution de coton poudre à 1 % dans l'essence de girofle;

2° Ranger les coupes;

3° Évaporer à l'étuve à 50 ou 60 degrés pendant une ou deux heures;

4° Laver à l'essence de térébenthine;

5° Laver à l'alcool absolu;

6° Colorer pendant une heure à la chambre humide par une solution d'hématoxyline de *Paul Mayer*.

Digitized by Google

L'examen le plus attentif ne permet pas de distinguer les faisceaux coupés transversalement de ceux coupés longitudinalement, mais dans certaines préparations il apparaît une ligne assez nette marquant la limite entre deux couches. Cette ligne se trouvant vers le milieu de l'épaisseur, il est éminemment probable que dans ce cas la cuticule est constituée par deux assises (pl. I, fig. 8).

C'est également sur ces coupes qu'on a le plus souvent l'occasion de voir que les ouvertures décrites dans la cuticule communiquent avec les glandes hypodermiques et leur servent de canaux excréteurs.

Un point très intéressant que nous dévoilent aussi ces préparations, c'est qu'indépendamment de ces canaux on distingue dans la cuticule une infinité de petites lignes y produisant une sorte de striation perpendiculaire à la surface du corps. Toutes ces petites lignes nous indiquent probablement de petits canalicules traversant la cuticule. Ce seraient là de véritables canaux poriques: mettant le protoplasme des cellules hypodermiques en rapport avec l'extérieur (pl. I, fig. 8).

Claparède (4), s'étant trompé sur la véritable signification des orifices excréteurs des glandes, avait pris ceux-ci pour des canaux poriques (*Porencanäle*).

Quand on fait l'examen de la cuticule d'individus n'ayant macéré que deux ou trois jours dans l'alcool au tiers, on observe un fait assez intéressant et qui a son importance parce qu'il nous indique la forme qu'affectent les cellules hypodermiques au voisinage de la cuticule.

C'est la présence d'un réseau à mailles polygonales à la face interne de la cuticule.

Perrier (36) est le seul qui ait fait mention de cette particularité.

Il nous dit : « Les alvéoles, au lieu d'affecter une forme polygonale, se présentent avec une forme arrondie; ce sont les espaces alvéolaires (*Wabenräume*) que Claparède considère comme glandes rudimentaires. »

Il regarde donc les avéoles comme correspondant aux glandes de l'hypoderme, et les lignes délimitant les alvéoles comme répondant aux cellules de ce même hypoderme.

Cette manière de voir doit être complètement abandonnée en ce sens que

Digitized by Google

les alvéoles correspondent aux cellules, les lignes qui les délimitent à la substance intercellulaire.

Perrier (36) a été conduit probablement à émettre cette idée, parce que si l'on fait par transparence l'examen de la paroi du corps, dans une région où les glandes sont assez abondantes et qu'on met au point à mi-hauteur environ de la couche hypodermique, on voit des espaces clairs arrondis ou ovalaires séparés par des lignes plus sombres. Dans cette image, les espaces arrondis ou ovalaires sont les glandes, les lignes qui les délimitent sont des parties amincies des cellules protoplasmiques interposées entre ces glandes.

En partant de ce fait, *Perrier*, en examinant la face interne de la cuticule, a cru sans doute revoir les mêmes éléments affectant les mêmes rapports.

Les polygones, il les décrit comme arrondis, alors qu'ils sont parfaitement polygonaux, si ce n'est légèrement arrondis aux angles quand on examine le réseau au voisinage immédiat de la cuticule.

Voici deux arguments décisifs en faveur de ma manière de voir :

1° J'ai dit plus haut que sur une étroite bande en avant et en arrière de chaque sillon intersegmentaire, il n'y a pas d'ouvertures de glandes dans la cuticule, par conséquent en ces endroits il n'y pas d'éléments glandulaires dans l'hypoderme ; or, c'est précisément là que le réseau est le plus régulier et que les mailles sont parfaitement polygonales (pl. I, fig. 7) ;

2° En second lieu, quand il existe des orifices de glandes dans la cuticule, ceux-ci apparaissent sur le trajet des lignes qui délimitent les polygones, alors qu'ils devraient se trouver au milieu des alvéoles dans le cas où celles-ci répondraient en réalité aux glandes (pl. I, fig. 6).

Il arrive de temps en temps que l'on trouve un orifice de glande vers le milieu d'un grand polygone ; c'est que la travée sur laquelle se trouvait l'orifice s'est détachée de la cuticule lors de l'enlèvement de cette dernière. Cela se comprend aisément ; dans le cas où les orifices glandulaires font défaut, il est tout naturel que le réseau soit plus régulier, puisque les polygones sont alors délimités par des lignes continues, alors que dans les régions glandulaires il y a des interruptions sur le parcours des travées au niveau des orifices.

Les ouvertures des glandes apparaissent tantôt comme un simple petit

Digitized by Google

orifice sur le parcours d'une travée de substance intercellulaire, tantôt au milieu d'un petit cercle parce que l'extrémité effilée de la glande est restée adhérente à la cuticule (pl. I, fig. 6).

Ce réseau provient de ce que les cellules hypodermiques sont séparées au voisinage de la cuticule par une bande relativement épaisse de substance intercellulaire. Cette substance étant de nature analogue à la cuticule, il se fait qu'elle y adhère plus fortement que le reste des cellules.

A la coupe les travées présentent une forme de coin à base dirigée en dehors et sommet en dedans; de sorte que ces polygones délimitent à la face interne de la cuticule des alvéoles à convexité dirigée vers l'extérieur, et dans ces alvéoles sont logés les sommets plus ou moins bombés des cellules hypodermiques.

Développement. — Il est éminemment probable que la cuticule n'est que le résultat de la transformation du protoplasme superficiel des cellules hypodermiques.

Sa structure est d'une régularité parfaite et l'on peut supposer, non sans fondement, que les faisceaux de la cuticule résultent d'une sorte de kératinisation de la substance interfibrillaire du protoplasme; les stries seraient alors le résultat de la disparition plus ou moins complète du treillis protoplasmatique, et cela est d'autant plus probable que bien souvent aux entre-croisements des stries apparaissent des renflements tout à fait analogues à ceux que l'on constate aux intersections des filaments du treillis protoplasmatique.

La cuticule peut se régénérer quand elle vient à être enlevée accidentellement en quelque point de la surface du corps.

Digitized by Google

B. Hypoderme.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous distinguerons ici deux chapitres, l'un pour l'*hypoderme proprement dit,* l'autre pour cette partie différenciée de l'hypoderme qui forme la *ceinture.*

1° *Hypoderme proprement dit.*

Cette partie de la paroi du corps se trouve interposée entre la cuticule et les muscles circulaires.

Elle est séparée de ces derniers par une mince membrane propre; mais il faut s'entendre ici sur ce nom de membrane. Il n'existe pas ici une membrane dans le vrai sens du mot, mais la limite entre la couche hypodermique et celle des muscles circulaires est marquée par une condensation du tissu conjonctif de cette dernière couche et la démarcation est souvent assez nette en certains endroits pour apparaître comme une véritable lamelle; mais encore une fois, je ne pense pas que l'on puisse en conclure qu'on ait affaire à une lame de substance particulière séparant la couche hypodermique des muscles sous-jacents.

Quant à la limite de cette couche vers l'extérieur, elle est marquée par la cuticule qui n'est qu'une modification superficielle du protoplasme des cellules hypodermiques.

Cette couche a reçu différents noms suivant les auteurs, le plus usité est celui d'*hypoderme* que lui a donné *Weissmann.*

Je pense qu'il serait beaucoup plus exact de l'appeler *épiderme* ou plutôt de donner le nom d'épiderme à l'ensemble de la cuticule et de la couche hypodermique de Weissmann.

Sa nature cellulaire décrite déjà par *Fr. Leydig* (26) niée quatre ans plus tard par *Claparède* (4) et plus récemment par *R. Horst* (19) a été depuis mise en évidence par les recherches de *Perrier* (36), *Mojsisowicz* (29 et 30), *Vejdovsky* (51) et *H. Ude* (56). Aujourd'hui il est parfaitement établi que l'hypoderme du Lombric est un véritable épithélium cylindrique constitué de

Digitized by Google

cellules avec noyaux et nucléoles, dans lequel on trouve une quantité de glandes monocellulaires.

Leydig (26) décrit à l'hypoderme une constitution cellulaire; les cellules de la partie antérieure étant plus allongées que celles de l'hypoderme du reste du corps, de plus, étroites, cylindriques, dans leur partie superficielle, elles se terminent en fins filaments à leur extrémité profonde. Des glandes cutanées se trouvent sur toute la surface du corps et semblent accumulées en plus grand nombre en certains endroits. Leur forme varie; dans la région caudale, par exemple, ce sont de petits sacs bien arrondis et leurs canaux excréteurs sont les canaux de la cuticule. Dans le segment céphalique elles se sont mises en rapport avec les cellules qui les entourent et ont pris une forme allongée; leur noyau est situé tout à fait au fond. Dans la peau fraîche du segment céphalique les glandes se détachent comme des corpuscules très réfringents, clairs et nettement délimités.

Claparède (4) nie la constitution cellulaire de l'hypoderme; il nous dit que par aucun moyen il n'a pu faire apparaître des limites cellulaires et qu'il n'a pas réussi davantage à faire des dissociations. Pour lui l'hypoderme est constitué par un réseau protoplasmatique renfermant une quantité de noyaux disposés les uns à mi-hauteur de la couche, les autres dans la partie profonde.

Il considère les glandes de *Leydig* comme une sorte de substance intercellulaire; il s'est fondé pour émettre ces idées sur une coupe transversale d'un individu tué par l'alcool absolu; quand après cela il a fait des coupes tangentielles d'individus durcis par l'acide chromique, il trouve certains espaces remplis de petits granules et dit qu'on doit les considérer comme des glandes très simples.

Il suppose, sans avoir pu s'en convaincre objectivement, que ces espaces pourraient être en rapport avec ce qu'il nomme canaux poriques de la cuticule. Il ne peut se prononcer pour la nature cellulaire de ces espaces parce qu'il n'est pas parvenu à leur distinguer avec certitude un noyau.

Pour *Perrier* (36) l'hypoderme des Lombrics se montre toujours composé de cellules bien nettes, avec noyaux et nucléoles et la couche contient de véritables glandes analogues à celles décrites par *Leydig* chez le *Phreoryctes menkeanus*.

Digitized by Google

R. Horst (19) nie de nouveau la constitution cellulaire de l'hypoderme, mais il décrit très bien les glandes; du moins il en distingue deux espèces suivant que leur contenu est homogène ou formé de corpuscules réfringents. Pour lui l'hypoderme est constitué par un réseau de protoplasme granuleux dans lequel se montrent les glandes. Il donne quelques bonnes figures pour la forme de certaines glandes.

Mojsisowicz (29 et 30) nous dit qu'entre autres cellules il s'en trouve qui à l'une ou aux deux extrémités sont effilées en pointe et dans lesquelles on aperçoit, sans avoir recours à des colorations, un très gros noyau avec nucléole; quelquefois une extrémité rajeunie de la cellule se divise en deux filaments très fins et comme plusieurs de ces cellules se trouvent juxtaposées, il peut se produire à la base de l'hypoderme un enchevêtrement de fins filaments.

Entre ces cellules effilées qui se laissent très bien isoler par le liquide de Müller, se montrent des cellules fortement granulées, renflées en boule ou lagéniformes, les unes nucléées, les autres pas, qui doivent être considérées comme glandes monocellulaires analogues à celles décrites à plusieurs reprises chez d'autres annélides. Ces éléments sont en communication avec les canaux de la cuticule.

On ne peut trouver une véritable membrane aux cellules hypodermiques isolées; mais des coupes transversales de l'hypoderme durci par l'alcool absolu nous montrent une substance intercellulaire épaisse.

A la base de l'hypoderme existe une membrane hyaline s'étendant entre les muscles circulaires et les cellules hypodermiques souvent renflées dans leur partie profonde; mentionnons ici les *Geschmacksknospe* que *Leydig* a découverts chez les Hirudinées et Lumbricides et décrits comme organes de tact (*Tastorgane*). Ces organes se trouvent dans le segment céphalique.

Vejdovsky (51), dans son magnifique travail sur la morphologie des Oligochètes, ne parle pas du Lombric en particulier, mais cependant nous voyons que pour lui on doit distinguer dans l'hypoderme de ce Ver deux sortes de cellules, les unes cylindriques se terminant souvent à leur base par un ou plusieurs prolongements, devenant cuboïdes en certains endroits comme au

Digitized by Google

voisinage des sillons intersegmentaires, les autres logées entre les prolongements des premières.

En fait de glandes, il n'en décrit qu'une espèce dont la forme varie, mais dont le contenu est toujours homogène et transparent, le noyau étant ordinairement de forme irrégulière et toujours situé dans le fond de la cellule.

Hermann Ude (56) a publié récemment un travail sur les pores dorsaux des Oligochètes, dans lequel il donne quelques considérations sur l'histologie de la paroi du corps. En ce qui concerne l'hypoderme, il ne décrit qu'une espèce de glandes, remplies de petits globules, renfermant un noyau près de leur extrémité profonde et communiquant avec l'extérieur par l'intermédiaire des pores de la cuticule. Il figure ces glandes sous deux aspects différents suivant qu'elles sont, oui ou non, remplies du produit de sécrétion. Dans le premier cas elles renferment de petits globules arrondis, dans le second cas elles contiennent des lamelles protoplasmatiques délimitant de petites alvéoles dans lesquelles se trouvaient les globules avant leur expulsion. Ces glandes sont, à leur extrémité profonde, terminées par une surface arrondie, ou bien y présentent, soit une sorte de pédicule (*Fuss*), soit deux prolongements (*Paarigen Ausläufer*).

Quant aux cellules, il en distingue deux assises, l'une superficielle, l'autre profonde.

Les cellules superficielles il les figure cylindriques dans toute leur étendue, ou bien présentant à leur extrémité profonde deux ou plusieurs prolongements.

Les cellules de la couche profonde sont logées entre les prolongements des cellules superficielles. Il figure ensuite une troisième forme de cellules, présentant un long prolongement vers la cuticule et quelques petits prolongements vers la membrane basilaire.

Hermann Ude rectifie la manière de voir de *Claparède* qui admettait des invaginations de la cuticule et de l'hypoderme au niveau des pores dorsaux.

Structure de l'hypoderme proprement dit. — Dans cette étude de l'hypoderme nous étudierons d'abord les éléments isolés, dans le but de déter-

Digitized by Google

miner leur forme et leurs détails de structure; ensuite nous examinerons le tissu dans son ensemble sur des coupes pratiquées dans différentes directions, afin de nous rendre compte de la place qu'occupe chaque espèce d'éléments, et des rapports qu'affectent entre eux les différentes sortes d'éléments.

Afin de se faire une idée bien nette des cellules et des glandes qui entrent dans la constitution de l'hypoderme, il est absolument nécessaire d'avoir recours à la dissociation, et l'on y arrive aisément de la façon suivante :

Après avoir tué les Lombrics par l'un des procédés mentionnés plus haut, de préférence par l'alcool, on les place dans l'alcool au tiers durant quelques jours. L'alcool a le double avantage d'être un excellent liquide dissociateur et de fixer les éléments dans leur forme. On enlève ensuite la cuticule, mais cette fois sans inciser la paroi du corps, ce qui aurait pour inconvénient de remplir le liquide dans lequel on opère d'éléments étrangers à l'hypoderme, qui pourraient par suite être portés sur les préparations et induire en erreur.

On déchire la cuticule en quelques points de la surface du corps, en saisissant au moyen de pinces fines les plis qui apparaissent dans la membrane, et l'on arrive aisément à l'enlever en la retournant à la façon d'un doigt de gant.

Cela fait, les individus sont lavés à l'eau distillée et placés dans un mélange de deux tiers de picrocarminate d'ammoniaque et d'un tiers de glycérine.

Vingt-quatre heures plus tard il suffit de racler légèrement la surface du corps au moyen de la lame d'un scalpel pour enlever ainsi une quantité d'éléments hypodermiques que l'on met sur porte-objet dans une goutte de glycérine au tiers en solution aqueuse; on isole ensuite autant que possible le produit du raclage au moyen d'aiguilles fines, puis on le recouvre d'une lamelle. Des préparations ainsi obtenues nous permettent d'étudier facilement les éléments hypodermiques dans les différentes régions du corps.

Cellules. — L'examen des cellules isolées nous montre qu'on peut les ranger en deux groupes.

Digitized by Google

Premier groupe. — Les cellules du premier groupe sont caractérisées en ce qu'elles se terminent à l'une de leurs extrémités par une surface bombée, dans l'étendue de laquelle le protoplasme est à nu, en ce sens qu'il est granuleux jusque tout à la périphérie, tandis que tout le reste de la cellule est délimité par une zone claire et d'apparence homogène.

Toutes les cellules de ce groupe présentent en commun les caractères suivants :

1° Comme nous venons de le voir, une de leurs extrémités est une surface bombée dans l'étendue de laquelle les granulations du protoplasme arrivent jusqu'à la surface;

2° Le protoplasme légèrement coloré en rose par le picrocarminate d'ammoniaque est granuleux.

3° Le noyau, situé généralement à mi-hauteur de la cellule, est très volumineux et de forme ovalaire, son grand axe étant dirigé parallèlement à l'axe longitudinal de la cellule. Ce noyau est coloré beaucoup plus fortement que le protoplasme cellulaire et présente à considérer une membrane très nette, un reticulum chromatique formé de filaments colorés en rouge et des corpuscules nucléoliformes qui se trouvent aux entre-croisements de certains de ces filaments; l'un de ces corpuscules est généralement plus volumineux que les autres.

Quant à la forme des cellules de ce groupe, elle est éminemment variable, et nous trouvons toutes les transitions depuis la cellule prismatique simple jusqu'à des formes relativement très compliquées :

a) Cellule prismatique présentant le même diamètre transversal dans toute son étendue et qui, à la coupe, a la forme d'un polygone à quatre, cinq, six côtés. L'axe longitudinal l'emporte plus ou moins sur l'axe transversal; il en est même où les deux axes sont à peu près égaux et la cellule affecte une forme cuboïde (pl. I, fig. 11).

b) Une seconde forme est celle dont les deux extrémités sont dissemblables en ce sens que l'une étant toujours bombée, l'autre présente un certain nombre de prolongements, en général de quatre à huit, terminés par un léger épatement. Le noyau dans ces cellules se trouve situé au voisinage du point d'émergence des prolongements; ces prolongements plus ou moins

Digitized by Google

divergents vont en diminuant de diamètre à partir de leur origine et se terminent à leur extrémité par un petit épatement.

c) Nous devons aussi ranger dans une catégorie spéciale, des cellules que l'on trouve seulement dans l'hypoderme de la partie antérieure du corps, et qui présentent à l'une de leurs extrémités un nombre considérable de prolongements sensiblement parallèles les uns aux autres et se terminant en pointe; ces cellules sont généralement beaucoup plus allongées et moins larges que celles de la région moyenne ou postérieure du corps (pl. I, fig. 15).

d) Viennent ensuite des formes plus compliquées dont nous pouvons prendre comme type la cellule représentée à la planche I, figure 9.

Elle présente encore, comme toutes les cellules du groupe, une extrémité arrondie, dans l'étendue de laquelle les granulations protoplasmiques arrivent jusqu'à la surface; puis vient une partie de la cellule où la coupe transversale nous donne un polygone à six côtés, dont trois alternant avec les trois autres portent en leur milieu une petite échancrure; ces échancrures correspondent aux collets des glandes situées au voisinage immédiat de cette cellule.

Dans cette partie de la cellule les granulations protoplasmiques apparaissent nombreuses et serrées; dans le reste de la cellule, au contraire, le protoplasme n'est abondant que sur une traînée répondant à l'axe longitudinal de la cellule; vers les faces latérales, les granulations sont de plus en plus rares, et près de la périphérie on n'en distingue plus. Cela provient de ce que la cellule présente latéralement des parties amincies, des prolongements aliformes qui donnent à la coupe transversale de cette partie de la cellule la forme d'une étoile à trois branches, le centre de l'étoile étant occupé par la traînée axiale du protoplasme cellulaire et renfermant le noyau si la coupe passe à mi-hauteur environ de la cellule. Viennent ensuite des prolongements présentant les mêmes caractères que ceux décrits pour les cellules de la seconde catégorie (*b*).

Le type que nous venons de décrire pour la catégorie (*d*) est une cellule qui se trouve interposée entre trois glandes, d'où trois prolongements aliformes s'engageant entre ces glandes et trois excavations latérales logeant les glandes. Il est évident que la forme des cellules varie dans cette catégorie, suivant le nombre de glandes qui sont en rapport avec la cellule.

Digitized by Google

Deuxième groupe. — Le second groupe comprend les cellules caractérisées en ce qu'elles sont limitées de toutes parts par une zone de protoplasme clair, et toutes peuvent se ramener à un type unique qui est celui d'une massue. On peut leur considérer deux parties : l'une renflée, renfermant le noyau et la plus grande partie du protoplasme cellulaire, l'autre constituée par un prolongement plus ou moins grand. Ce prolongement est pour ainsi dire nul dans certaines cellules qui affectent alors une forme globuleuse. Le noyau, dans les cellules de ce groupe, présente généralement une forme plus arrondie et des dimensions moins considérables que celui des cellules du premier groupe ; en même temps il semble jouir d'une affinité plus grande pour les matières tinctoriales (pl. I, fig. 12).

Glandes. — Les glandes obtenues isolées après macération dans l'alcool au tiers conservent très bien leur forme ; leur contenu est analogue pour toutes, mais en mauvais état de conservation, ce qui tient à ce que leur produit de sécrétion se dissout plus ou moins complètement dans l'alcool. Cette propriété de se dissoudre dans l'alcool et celle de se colorer en noir par l'acide osmique, tendent à justifier la manière de voir de *R. Horst* (19), qui appelle même *globules de graisse* (*vetbolletjes*) les corpuscules réfringents que l'on trouve dans certaines glandes.

Toutes les glandes présentent une membrane à double contour très net ; la plus grande partie du protoplasme est refoulée à l'une des extrémités et renferme un noyau nucléolé qui a une forme arrondie dans beaucoup de glandes, une forme irrégulière dans d'autres.

Si l'on isole les éléments par une solution faible d'acide chromique (1 pour 2000), le contenu des glandes est mieux conservé et, d'après la nature de ce produit de sécrétion, nous devons distinguer deux sortes de glandes : les unes remplies de corpuscules relativement volumineux, arrondis, plus ou moins déformés par compression réciproque, les autres renfermant un produit de sécrétion très finement granulé qui est probablement du mucus.

On pourrait se demander si malgré la différence d'aspect du contenu de ces deux sortes de glandes, il ne s'agit pas là d'une seule et même espèce d'éléments, se présentant sous des aspects différents suivant qu'ils sont, oui

Digitized by Google

ou non, remplis du produit de sécrétion ; en d'autres termes, que les glandes chargées de corpuscules réfringents seraient des éléments glandulaires remplis de leur produit de sécrétion, tandis que les éléments finement granulés seraient des glandes débarrassées de ce produit.

Il s'agit en réalité ici de deux espèces d'éléments bien caractérisés ; nous les retrouvons constamment dans n'importe quelle région, et dans l'étude de la ceinture qui n'est qu'une portion différenciée de l'hypoderme, nous verrons encore avec une plus grande évidence, qu'il s'agit bien de deux sortes d'éléments, bien distincts les uns des autres.

Quant à la forme de ces glandes, elle présente les mêmes variations dans les deux catégories.

Toutes les glandes isolées présentent une extrémité plus ou moins effilée, au sommet de laquelle est un orifice plus ou moins large, dont le diamètre varie, suivant que la glande a été brisée au voisinage immédiat de la cuticule ou à quelque distance.

Le corps de la glande est ovalaire ou lagéniforme, et toujours parfaitement distendu par l'abondance du produit de sécrétion.

L'autre extrémité varie considérablement d'une glande à l'autre. La forme extrême de ces variations paraît être celle qui est complètement distendue sans présenter aucune espèce d'échancrure ou étranglement, ni prolongements, et dont le noyau est appliqué contre la paroi au fond de la glande. Ce noyau est alors entouré par le reste du protoplasme cellulaire et tous deux, le noyau et le protoplasme, ont la forme d'une calotte à convexité dirigée vers le fond de la glande. A la coupe optique ils ont la forme d'un croissant (pl. II, fig. 20).

Si l'on examine au contraire la glande par le fond, perpendiculairement au grand axe, le noyau se présente irrégulièrement bosselé (pl. II, fig. 23).

D'autres glandes sont plus ou moins effilées à leur extrémité fermée, le protoplasme et le noyau se trouvent alors dans cette partie rétrécie de la glande. Ce sont les glandes pédicellées, *gestielte Drüsenzellen*, de différents auteurs. Cette sorte de pied de la glande se termine, soit par un petit renflement, soit par quelques petits prolongements (pl. I, fig. 16 et 17).

Enfin nous trouvons une quantité de glandes dont le corps est divisé en

Digitized by Google

deux parties, par un étranglement qui se trouve à des hauteurs variables, sans cependant jamais dépasser le tiers inférieur de la glande. Cet étranglement divise la cellule glandulaire en deux parties fort inégales, l'une plus grande, renfermant le produit de sécrétion, l'autre plus petite, renfermant le protoplasme et le noyau; le protoplasme s'étend cependant jusque dans l'autre partie de la glande, pour envelopper, à la façon d'une petite calotte, la partie profonde du produit de sécrétion; enfin, la partie protoplasmatique de ces glandes peut encore une fois présenter quelques prolongements, en petit nombre, analogues à ceux que nous avons vus dans beaucoup d'éléments hypodermiques (pl. II, fig. 21).

Rapports entre cellules et glandes. — Dans les préparations d'éléments isolés de l'hypoderme, on trouve encore assez souvent une chose très intéressante représentée planche I, figure 10.

Nous y voyons une glande avec deux cellules voisines y restées adhérentes. Cette image nous explique les ailes latérales décrites dans l'une des catégories de cellules hypodermiques du premier groupe (*d*). Ces prolongements aliformes recouvrent en partie la glande interposée entre ces cellules; en d'autres termes, ces cellules présentent des excavations latérales dans lesquelles sont logées les glandes. Ces excavations diminuent de la base vers le sommet des cellules et se terminent à leur extrémité supérieure par une petite échancrure correspondant à la partie effilée qui sert de canal excréteur à la glande.

Hypoderme dans son ensemble. — Maintenant que nous avons une bonne idée de la forme des différents éléments qui entrent dans la constitution de l'hypoderme, voyons où nous les trouvons et quels sont les rapports qu'ils affectent entre eux.

Nous étudierons des coupes transversales, longitudinales, et tangentielles ou parallèles à la surface.

Avant tout, il est nécessaire d'obtenir le tissu en bon état de conservation, en traitant par des réactifs appropriés.

Une quantité de solutions ont été employées par les différents auteurs, et

Digitized by Google

certes, ce sont ceux qui ont fait usage des meilleurs réactifs qui ont pu arriver aux plus beaux résultats.

C'est ainsi, par exemple, que la description erronée que *Claparède* (4) nous donne d'une coupe transversale à travers l'hypoderme du Lombric, provient uniquement de ce qu'il s'était servi d'alcool absolu pour tuer et durcir les tissus.

En effet, l'alcool absolu non seulement dissout le contenu des glandes et les fait apparaître comme des vacuoles, mais en outre, il rétracte violemment les cellules, au point de les condenser en véritables trabécules dans lesquels on aperçoit les noyaux, mais où il est impossible de reconnaître les limites cellulaires.

Le liquide conservateur par excellence pour la couche dont il s'agit ici, et soit dit dès à présent pour beaucoup de tissus du Lombric, c'est le liquide de Flemming consistant en un mélange de :

Quinze parties d'une solution d'acide chromique à 1 %;
Quatre parties d'une solution d'acide osmique à 2 %;
Une partie d'acide acétique glacial.

Entre autres avantages, il a celui de faire apparaître nettement les limites cellulaires.

Les tissus prennent dans ce liquide une légère teinte jaunâtre et on peut les étudier assez complètement, sans avoir recours à des colorations subséquentes.

Les coupes colorées sont cependant d'un grand secours, et pour obtenir de bonnes colorations, il faut suivre la méthode indiquée plus haut (page 20) et colorer, soit par l'hématoxyline de *Paul Mayer,* soit par une couleur d'aniline; celles qui m'ont donné les meilleurs résultats sont la safranine, la fuchsine et le bleu de Lyon.

On peut aussi colorer en masse par le carmin boracique ou le picrocarminate d'ammoniaque, mais la coloration sur porte-objet par les matières d'aniline est beaucoup plus avantageuse après le liquide de Flemming.

Une coupe transversale à travers l'hypoderme se présente en général comme nous le voyons planche II, figure 24. On aperçoit au premier abord des éléments de forme variable, dont les uns sont remplis de gros granules

Digitized by Google

réfringents, dont les autres ont un contenu paraissant homogène, mais qui se montre cependant finement granuleux sous de forts grossissements. Ces éléments renferment un noyau situé toujours près de l'extrémité profonde, et entouré d'un peu de protoplasme granuleux. L'autre extrémité est toujours plus ou moins effilée et communique par un petit orifice avec les canaux signalés dans la cuticule. Ces éléments ont tous une membrane très nette à double contour. Le noyau présente un nucléole qui n'est cependant pas visible dans les glandes où le noyau appliqué contre la face profonde a pris une forme de calotte; dans ce cas, la coloration du noyau est foncée et uniforme et il devient impossible de lui distinguer un nucléole.

Ce sont évidemment là les deux espèces de glandes que nous avons signalées dans l'étude des éléments isolés de l'hypoderme. Dans cette coupe représentée planche II, figure 24, les glandes sont assez rares relativement à ce que l'on trouve sur d'autres préparations. En général, les glandes sont plus nombreuses du côté du dos que du côté de la face ventrale.

L'espace s'étendant entre les glandes est occupé par les cellules protoplasmatiques de l'hypoderme, on s'aperçoit au premier coup d'œil de ce qu'il existe en quelque sorte deux assises de cellules, ce qui ressort avec évidence de la disposition des noyaux. Nous trouvons une couche de cellules superficielles ou corticales, ayant leurs noyaux situés à mi-hauteur environ de l'hypoderme, et une couche de cellules profondes ou basilaires dont les noyaux sont situés beaucoup plus profondément.

Les cellules sont séparées les unes des autres par une mince couche de substance intercellulaire ou unissante, qui, immédiatement au voisinage de la cuticule, devient brusquement beaucoup plus épaisse (c'est cette substance intercellulaire que nous avons vue donner lieu à un réseau à la face interne de la cuticule). Toutes ces cellules se présentent sur pareille coupe sous les formes les plus variées, mais on peut cependant s'assurer facilement de ce que les deux couches répondent exactement aux deux groupes que nous avons établis dans les éléments isolés de l'hypoderme.

La couche corticale nous offre les cellules présentant toutes une extrémité superficielle arrondie par suite de l'abondance de substance intercellulaire au voisinage de la cuticule.

Digitized by Google

Comme cette substance unissante s'enlève souvent en même temps que la cuticule, nous avons naturellement trouvé le protoplasme à nu dans cette partie superficielle des cellules isolées. Les cellules de cette couche ont en général sur la coupe une forme cylindrique, mais au voisinage des glandes nous en voyons qui apparaissent très rétrécies en leur milieu, alors qu'à leur partie supérieure elles s'élargissent notablement pour étendre leur plateau jusqu'à l'orifice excréteur des glandes; nous reconnaissons là les cellules à prolongements aliformes que j'ai décrites dans la catégorie (*d*) du premier groupe de cellules isolées.

Quant aux cellules de la couche profonde, elles répondent évidemment à celles du second groupe. Ces cellules basilaires, que nous pourrions encore appeler cellules de remplacement, car elles sont évidemment destinées, comme c'est le cas dans tout épithélium cylindrique de ce genre, à remplacer les cellules de la couche superficielle, ces cellules basilaires, dis-je, sont logées entre les prolongements que présentent les cellules corticales à leur extrémité profonde. Leurs noyaux arrondis ou ovalaires, avec nucléoles souvent très apparents, sont situés à des hauteurs peu variables; on en trouve cependant quelquefois qui sont plus ou moins rapprochés de ceux des cellules superficielles, et appartenant à des cellules basilaires plus développées, s'étendant davantage du côté de la cuticule, autrement dit, à des cellules *intermédiaires*.

Si nous pratiquons maintenant une coupe tangentielle, c'est-à-dire parallèle à la surface du corps, nous obtiendrons en général l'image représentée planche II, figure 25.

Dans une semblable coupe, nous retrouvons les deux sortes de glandes plus ou moins arrondies, disposées entre elles, les cellules hypodermiques superficielles coupées dans la région des noyaux. Ces noyaux apparaissent maintenant arrondis. Cette coupe est tout à fait celle que *Claparède* (4) a figurée d'après un individu traité par l'acide chromique, à part qu'il n'y voyait pas de limites cellulaires.

Examinons enfin une coupe longitudinale afin de nous rendre compte des variations d'épaisseur et de constitution que subit l'hypoderme dans un segment donné. L'épaisseur maxima est au milieu des anneaux et va dimi-

Digitized by Google

nuant en avant et en arrière jusqu'au fond des sillons intersegmentaires où elle est réduite à un sixième environ de ce qu'elle est au milieu des segments.

En thèse générale, l'épaisseur de l'hypoderme va diminuant depuis l'extrémité céphalique jusqu'à l'extrémité caudale de l'animal. Aussi la différence d'épaisseur de la couche au milieu des segments et au niveau des sillons intersegmentaires est-elle moins frappante dans la région postérieure que dans la région antérieure.

Sur une coupe longitudinale la constitution de l'hypoderme est encore la même que sur une coupe transversale; au voisinage des sillons intersegmentaires nous ne trouvons pas de glandes, mais les deux couches de cellules persistent encore; au fond même des sillons une seule couche cellulaire persiste et les éléments affectent une forme cuboïde, leurs deux axes, longitudinal et transversal, étant à peu près égaux; d'autres fois même une forme tabulaire.

Ces mêmes modifications dans la constitution de l'hypoderme se représentent à tous les endroits où l'hypoderme s'invagine vers l'intérieur du corps, c'est-à-dire, comme nous l'avons vu pour la cuticule, au niveau des soies et au niveau de tous les orifices naturels du corps si l'on fait exception pour les pores dorsaux. Autour de ces derniers, l'hypoderme s'arrête brusquement en diminuant notablement d'épaisseur, et la membrane péritonéale arrive jusqu'à la cuticule au niveau même de l'orifice. Au lieu d'avoir, comme c'est le cas, par exemple, au niveau des organes sexuels, un canal tapissé par la cuticule et allant de dehors en dedans, nous avons en quelque sorte ici un canal en forme d'entonnoir très évasé, allant de dedans en dehors et tapissé par la membrane péritonéale.

Tels sont les caractères que présente en général l'hypoderme sur des coupes pratiquées dans différents sens, si nous le considérons en arrière de la ceinture et en avant de la ceinture jusqu'au niveau des organes sexuels.

Dans la partie antérieure du corps, l'hypoderme, tout en étant constitué des mêmes éléments affectant les mêmes rapports, présente cependant un aspect très différent. La couche est d'abord plus épaisse et sur un espace donné, 1 millimètre carré, par exemple, les éléments sont beaucoup plus

Digitized by Google

nombreux. Les cellules de l'assise superficielle sont en général plus allongées et plus étroites. Elles sont encore terminées par une surface bombée du côté de la cuticule, mais présentent à leur extrémité profonde un grand nombre de prolongements; les glandes se sont mises en rapport avec les cellules qui les entourent, elles affectent également une forme plus allongée dans cette partie du corps, alors qu'à l'extrémité postérieure, par une modification en sens inverse, elles sont plutôt globuleuses et présentent la forme de petits sacs.

Organes de sens de l'hypoderme. — Nous devons maintenant dire un mot des organes de sens que l'on trouve dans l'hypoderme du Lombric et dont j'ai donné la répartition en parlant des îlots de fins pores que l'on trouve dans la cuticule.

Sur une coupe longitudinale ou transversale passant par un de ces organes, on s'aperçoit immédiatement de sa présence, pour deux raisons : la première, c'est que les cellules entrant dans la constitution de ces organes semblent prendre les matières colorantes plus fortement que les cellules ordinaires de l'hypoderme; et ensuite, la position des noyaux de ces cellules est intermédiaire entre les deux séries de noyaux de l'hypoderme. Ces organes à la coupe ont une forme ovalaire à grand axe l'emportant sensiblement sur le diamètre transversal; les cellules semblent se mouler les unes sur les autres à la façon des écailles d'un oignon.

Du côté de la cuticule, le bulbe présente une surface arrondie et produit une légère saillie vers l'extérieur; la cuticule soulevée et parfois amincie présente en cet endroit de très fins canaux, dirigés normalement à la surface, correspondant vraisemblablement chacun à une cellule du bulbe, et à travers ces canalicules on voit sur certaines préparations des soies excessivement ténues proéminer à l'extérieur (pl. II, fig. 19).

Ces organes sont-ils en relation avec des éléments nerveux? Nous reviendrons là-dessus en parlant du système nerveux périphérique.

Comme nous l'avons vu dans l'étude de la cuticule, ces organes se trouvent surtout aux deux extrémités du corps, mais on les trouve également çà et là dans le reste de l'hypoderme, répartis généralement sur un cercle passant par le milieu de chaque segment. Ces bulbes ont été considérés

Digitized by Google

comme servant d'organes de toucher (*Tastorgane*). Il est éminemment probable qu'il en soit vraiment ainsi, étant donnée la constitution de ces organes et leur répartition.

Je ferai remarquer, à ce sujet, que les segments du Lombric présentent une forme toute particulière sur laquelle on n'a jamais attiré l'attention. Si dans une coupe longitudinale d'un segment, nous considérons la ligne qui le délimite vers l'extérieur, nous remarquons que ce n'est pas une courbe régulière, mais que cette ligne présente vers le milieu du segment un rayon de courbure beaucoup moindre; il existe là une véritable crête, souvent très accentuée, dont personne n'a fait mention jusqu'ici. Cette crête est surtout apparente à la face ventrale de l'animal, mais se continue aussi sur les faces latérales et même du côté du dos.

Cette crête n'est pas produite par un épaississement plus accentué de la couche hypodermique, mais plutôt par un plus grand développement des muscles circulaires, produisant en ces endroits une éminence refoulant la couche hypodermique vers l'extérieur. Les huit soies de chaque segment se trouvent insérées sur le trajet de cette crête.

Les organes de sens en question se trouvent donc répartis dans les parties de la surface du corps qui viennent le plus souvent en contact avec les corps étrangers, d'une part, les deux extrémités du Ver, d'autre part, les crêtes qui se trouvent au milieu de chaque segment et qui sont surtout accentuées à la face ventrale sur laquelle rampe l'animal.

Telle est la constitution de l'hypoderme du Lombric terrestre; il ressort avec évidence de cette étude, que nous avons affaire à un véritable épithélium cylindrique constitué de trois catégories de cellules, superficielles, intermédiaires et basilaires, renfermant une quantité de glandes monocellulaires, de deux espèces suivant la nature du produit de sécrétion qu'elles déversent à la surface du corps à travers de petits canaux perforant la cuticule.

Développement des glandes. — *Vejdovsky* (51) a fait des observations relatives à la formation de ces glandes hypodermiques aux dépens des cellules protoplasmiques ordinaires. Ses observations ont surtout porté sur ce qui se passe dans la ceinture de *Dendrobaena rubida*. Il semble, d'après lui,

Digitized by Google

que ces glandes proviennent d'une modification des cellules hypodermiques superficielles.

Dans les préparations d'éléments isolés de l'hypoderme, on trouve des glandes en voie de développement (pl. I, fig. 13 et 14); leur aspect ne permet pas de douter qu'elles ne proviennent de cellules basilaires.

Les figures 13 et 14, planche I, représentent deux de ces éléments, dont l'un surtout, figure 14, terminé en pointe effilée à l'une de ses extrémités, est certes une cellule basilaire en voie de se transformer en glande, s'immisçant par sa pointe effilée entre les cellules hypodermiques superficielles, par suite de l'abondance de plus en plus grande du produit de sécrétion, pour aller enfin s'ouvrir à l'extérieur.

Rôle physiologique de ces glandes. — A ces glandes hypodermiques est certainement dévolue la fonction de déverser à la surface du corps une substance capable d'empêcher l'évaporation et de maintenir l'humidité. Cette substance empêche une dessiccation trop rapide de ces animaux quasi-aquatiques, qui ne peuvent vivre que dans une atmosphère très humide; en outre, comme *d'Udekem* (50) le fait remarquer, les Lombrics vivant dans le sol humide s'y creusent des galeries en avalant la terre pour se nourrir des substances absorbables qu'elle renferme, et le mucus sécrété par les glandes hypodermiques sert en quelque sorte de ciment pour consolider les parois de ces galeries; si ce n'est pas là une fonction de ces éléments, c'est du moins un fait que chacun peut observer.

Digitized by Google

2° *Ceinture.*

Nous consacrerons un chapitre spécial à cette partie différenciée de l'hypoderme que l'on désigne sous le nom de *ceinture* ou *clitellum* (*Willis*) [1].

Plusieurs auteurs se sont occupés de l'étude de la structure de cet intéressant organe, et voici, en résumé, les données que l'on trouve dans les principaux ouvrages :

Hoffmeister (16) dit : « Der Gürtel ist ein mit viel Fett durchwachsenes drüsiges Organ. »

Pour *d'Udekem* (50), « la ceinture est formée par un amas de glandes qui ont beaucoup d'analogie avec les glandes hépatiques qui entourent l'intestin ». Il en donne une figure très peu correcte.

Lankester (21) écrit : « The structure of this body is glandular, being composed of a great number of minute pyriform papillae. » La figure qu'il en donne ressemble énormément à celle *d'Udekem*.

Claparède (4) est le premier qui poussa plus loin l'examen de cet organe. « Le clitellum, nous dit-il, n'est, en réalité, qu'une portion modifiée de la paroi du corps; nous y retrouvons les différentes couches décrites. La caractéristique du clitellum consiste en ce que nous voyons apparaître deux nouvelles couches entre l'hypoderme et les muscles circulaires. L'extérieure, située immédiatement sous l'hypoderme, je la nommerai couche de colonnes (*Säulenschicht*), l'autre est une couche vasculaire.

» La couche de colonnes atteint une forte épaisseur, environ les trois quarts de l'épaisseur totale de la paroi du corps. Elle consiste en colonnettes irrégulièrement prismatiques, disposées parallèlement les unes aux autres et radiairement par rapport à l'axe du corps. Chaque colonnette s'étend depuis la couche vasculaire jusqu'à l'hypoderme; elle consiste en une paroi et un contenu. La paroi est constituée par un tissu conjonctif homogène avec des noyaux allongés.

» Sur la face interne de la paroi, on trouve de petits amas protoplas-

[1] Th. Willis, *De anima brutorum liber*. London, 1672.

Digitized by Google

miques proéminant vers l'intérieur des colonnettes et pourvus chacun d'un noyau arrondi. Dans ces parois courent des vaisseaux capillaires qui partent de la couche vasculaire, s'en vont jusqu'à l'hypoderme et s'y replient sans s'anastomoser.

» Dans le contenu, il faut distinguer deux parties : une supérieure, l'autre inférieure. La supérieure consiste en nombreux tubes larges de 4 à 5 micro-millimètres, courant à peu près tous parallèlement à l'axe de la colonne. Ces tubes sont remplis de gros grains. Par leur contenu, ils présentent une grande analogie avec les espaces remplis de grains que nous avons vus dans l'hypoderme. Aussi arrivent-ils par leur extrémité supérieure jusqu'à l'hypoderme, et il me semble qu'ils sont directement en relation avec eux. Nous avons vu que les vacuoles de l'hypoderme (*Wabenräume*) doivent probablement être considérées comme glandes particulières; dans ce cas, on peut regarder ces tubes de la ceinture comme produits par l'allongement de ces éléments de l'hypoderme jusque dans les colonnettes.

» Que le clitellum soit un organe glandulaire, c'est admis aujourd'hui à peu près par tout le monde, puisque la sécrétion de la coque de l'œuf lui est probablement attribuée; cependant, aucun observateur ne s'est occupé jusqu'à ce jour de la structure intime de cet organe. De sorte que la démonstration de tubes glandulaires dans cet organe n'a rien d'étrange, quoiqu'elle soit nouvelle. Dans ces tubes je ne saurais, pas plus que dans les Wabenräume de l'épiderme, trouver les caractères cellulaires. Je n'ose les appeler glandes monocellulaires, parce qu'ils ne contiennent pas trace de noyau.

» La moitié inférieure des colonnes possède un contenu paraissant homogène à première vue; un examen plus attentif permet cependant de reconnaître qu'il est divisé par de minces cloisons en beaucoup de parties. Ces cloisons, contenant de rares noyaux, sont le plus souvent bombées, à convexité dirigée vers le bas. Les espaces compris entre les cloisons sont remplis d'une substance paraissant très finement granulée aux plus forts grossissements. Je ne pourrais donner une signification physiologique de cette structure. »

Voici les données de *R. Horst* (18) :

« Du 32^{e} jusques et y compris le 37^{e} segment, où se trouve la ceinture,

Digitized by Google

non seulement l'hypoderme est devenu beaucoup plus épais et les segments ont pris un aspect enflé, mais aussi les éléments constitutifs de l'hypoderme sont tout autres.

» Surtout à la face dorsale et sur le bord de la face ventrale, cet épaississement est le plus apparent. *Horst* ne peut confirmer l'existence de la couche vasculaire de *Claparède;* les vaisseaux capillaires de la ceinture lui paraissent de simples ramifications des vaisseaux de la couche des muscles circulaires. Pour la partie supérieure des colonnettes, il la décrit comme *Claparède,* mais ne peut se rallier à l'idée de *Claparède,* qui fait provenir ces tubes d'éléments hypodermiques par allongement de ces derniers.

» Il s'appuie sur la différence du contenu qui, au lieu d'être constitué par des corpuscules irréguliers comme dans l'hypoderme ordinaire, est ici formé, d'après lui, de petits globules très réfringents, très semblables à des globules de graisse. »

La description que *Horst* nous donne de la partie inférieure des colonnettes est très différente de celle de *Claparède.* Quoique sur certaines préparations on ait des images analogues à la figure que donne *Claparède,* on voit cependant bientôt, nous dit-il, que les cloisons que cet auteur signale ne sont pas si régulièrement situées qu'il ne les décrit; que les champs compris entre ces cloisons, placés les uns à côté et au-dessus des autres, se compriment mutuellement et renferment chacun un contenu granulé et un noyau évident. Il nous donne l'image d'une partie isolée de la ceinture. A la périphérie, on a des tubes allongés remplis de globules de graisse, et entre eux on aperçoit d'autres tubes très larges qui, vers la profondeur, s'élargissent de plus en plus. Quoique vers la profondeur on rencontre des formes étrangères, je ne puis les considérer, dit-il, vu qu'elles possèdent chacune un noyau, que comme tubes glandulaires qui, devenant de plus en plus étroits à mesure qu'ils s'élèvent, vont enfin s'ouvrir à travers les pores de la cuticule et prendre, avec les tubes remplis de globules de graisse, la place de l'hypoderme.

Mojsisowicz (29) donne, pour la constitution de la ceinture, à peu près les mêmes données que *Horst.* Seulement, il admet, comme *Claparède,* que les glandes de la partie superficielle des colonnes proviennent des éléments

Digitized by Google

de l'hypoderme. D'accord avec *Claparède,* il admet aussi la couche vasculaire située au voisinage des muscles circulaires.

Il se résume comme suit :

« Das Clitellum besteht aus zweierlei völlig verschiedenen Drüsenformen :

» 1° Aus oberen unmittelbar unter der Cuticula gelagerten meist langgestreckten mit grobkörnigen Inhalte erfüllten Drüsenzellen, die wohl als modificirte Hypodermiszellen aufgefasst werden dürfen.

» 2° Aus unterem äusserst fein granülirten, häufig durch einem schönen Kern ausgezeichneten Drüsenzellen, die in ein Pigment und gefässreiches Bindegewebes Netzwerk eingebettet sind. Eine scharfe Grenze zwischen beide Drüsenformen ist nicht nachweisbar und die erwähnten Gefässschlingen ziehen bis in dem modificirte Epithel empor, in dem man auch gelegentlich Pigmenthäufchen eingelagert beobachten kann.

» 3° Beide Drüsenarten verhalten sich chemisch different. »

Vejdovsky (51) donne la description de *Mojsisowicz.* Il ajoute que chez le Lombric terrestre il n'existe plus de cellules protoplasmatiques dans la ceinture et qu'il n'a pu démontrer, chez cette espèce, que les glandes de la ceinture soient en relation avec des terminaisons nerveuses, chose qu'il a bien établie chez d'autres genres d'Oligochètes, notamment chez le genre *Dendrobœna,* espèce *rubida.*

Hermann Ude (56) ne nous dit que quelques mots de la ceinture ; il fait remarquer seulement que les pores dorsaux et les sillons intersegmentaires disparaissent complètement du côté du dos, dans l'étendue de la ceinture, par suite du grand développement qu'ont pris les glandes de cette région du corps.

Structure de la ceinture. — La ceinture est une partie de l'hypoderme, dans l'étendue de laquelle la couche s'est fortement épaissie par suite du grand développement qu'ont pris les deux espèces de glandes hypodermiques. Ces glandes sont devenues très nombreuses d'abord, puis elles se sont beaucoup allongées, en s'enfonçant par groupes dans le tissu sous-jacent.

Digitized by Google

Cet organe du Lombric, n'existant du côté du dos et sur les faces latérales du corps que dans l'étendue de six segments, frappe à première vue quand on examine un individu arrivé à maturité sexuelle. Elle s'étend du 32e au 37e segment inclus, elle est marquée surtout du côté du dos, sur les faces latérales et sur les bords de la face ventrale. Du côté de la face ventrale la différenciation est moins accentuée.

Sur les bords de la face ventrale existent deux bourrelets longitudinaux très apparents du 33e jusques et y compris le 36e anneau ; ils constituent ce que *Hermann Ude* (56) désigne sous le nom de *Tubercula pubertatis*. De ces tubercules partent en avant et s'étendant jusqu'aux orifices sexuels mâles deux bourrelets, peu visibles généralement sur le vivant, mais qui deviennent très évidents après durcissement, particulièrement quand on traite les individus par le liquide de Kleinenberg ou acide picro-sulfurique.

Nous reviendrons plus loin sur la constitution et la signification de ces bourrelets.

Si nous pratiquons une coupe transversale vers le milieu de la ceinture, au niveau du 34e segment, par exemple, nous devons y distinguer trois régions : 1° l'une comprenant *la face dorsale et les faces latérales* du corps ; 2° une deuxième *pour les bourrelets* qui se trouvent sur le bord de la face ventrale, enfin 3° une troisième *pour la face ventrale* proprement dite.

1° *Première région.* — Nous avons ici deux sortes de glandes, correspondant aux deux espèces de glandes hypodermiques ordinaires. Le produit de sécrétion est le même que dans le reste de l'hypoderme, mais la forme des glandes a notablement changé.

Les glandes renfermant des corpuscules relativement volumineux sont fortement allongées et ont pris une forme cylindrique ; elles courent toutes parallèlement les unes aux autres ; leur noyau avec nucléole est situé tout au fond de ces glandes et est entouré d'une petite masse de protoplasme. Ces glandes, à leur extrémité périphérique, s'ouvrent à l'extérieur à travers les pores de la cuticule et se terminent à l'autre extrémité en pointe ou par une surface arrondie (pl. III, fig. 36 et 37).

Cette catégorie de glandes occupe la périphérie de la couche. Les glandes

Digitized by Google

de la seconde catégorie sont encore beaucoup plus allongées et affectent une disposition toute particulière; elles sont rangées en colonnettes assez régulièrement prismatiques. L'axe de la colonnette est occupé par la partie effilée des glandes qui leur sert de canal excréteur, le pourtour de la colonne étant réservé aux extrémités profondes et renflées de ces glandes. Ces parties renflées des glandes se trouvent appliquées contre des cloisons conjonctivo-musculaires qui constituent la séparation des différentes colonnettes.

Si nous considérons une coupe passant par l'axe d'une de ces colonnes, nous aurons dans le fond deux ou trois extrémités renflées de glandes, puis ces glandes s'amincissent progressivement et plus ou moins brusquement vers le haut, en se dirigeant en même temps vers le centre et vers le haut de la colonne. Il en résulte que nous aurons bientôt un espace laissé libre entre les parties amincies de ces glandes et les cloisons conjonctives; cet espace sera occupé par les parties renflées d'autres glandes immédiatement supérieures; le même fait se présente pour celles-ci, elles s'amincissent également en se dirigeant en même temps vers le centre de la colonnette et il en résulte encore un espace pour de nouvelles glandes; cela se continue ainsi jusqu'à la limite profonde des glandes à gros corpuscules, et à partir de ce point tous les canaux excréteurs des glandes à produit de secrétion finement granulé, en cheminant entre les glandes de la couche superficielle, se dirigent vers la cuticule pour aller s'ouvrir à l'extérieur, à travers les canalicules qui traversent cette dernière.

Sur une coupe transversale ou longitudinale de la ceinture, il est excessivement rare de pouvoir suivre une glande de la profondeur à la périphérie, c'est-à-dire depuis son extrémité aveugle jusqu'à son ouverture dans la cuticule, parce que ces éléments étant très allongés, très étroits et serrés les uns contre les autres, ce serait vraiment un effet du hasard que de pouvoir observer ces glandes sur une même coupe dans toute leur étendue, depuis les muscles circulaires jusqu'à la cuticule.

Toutes ces glandes ont une membrane assez nette, beaucoup moins épaisse cependant que ne l'est celle des glandes du reste de l'hypoderme. Elles sont remplies d'un produit de sécrétion très finement granuleux sous les plus forts grossissements (objectif 18, imm. hom., Zeiss.). Le fond de ces glandes est

Digitized by Google

occupé par une masse de protoplasme assez fortement granuleux et renfermant un noyau de cellule plus ou moins déformé. Ces glandes se terminent à leur extrémité profonde par une pointe plus ou moins accentuée qui s'applique contre les cloisons conjonctives.

Sur une coupe transversale ou longitudinale du corps passant par l'axe d'une colonnette, on trouve quelquefois d'un seul côté jusque quinze extrémités renflées de glandes superposées les unes au-dessus des autres. Dans d'autres coupes on n'en trouve au contraire que cinq ou six, ce qui tient uniquement au développement plus ou moins grand que la couche a pris chez l'individu qu'on étudie. (Voir pour cette description la figure 29, planche III.)

Cette disposition des glandes est très intéressante; elle nous explique comment tous ces éléments peuvent aller, dans un espace si restreint, s'ouvrir à l'extérieur, chose qui restait incompréhensible d'après les données que nous possédions jusqu'à ce jour.

Si l'on considère la coupe longitudinale des deux moitiés contiguës de deux colonnettes voisines, on peut en tous points comparer l'image à la coupe longitudinale et axiale d'un épi d'orge. L'axe de l'épi est ici représenté par la cloison conjonctive, les grains par les extrémités renflées des glandes, et les aristes, qui surmontent les grains d'orge, sont ici figurés par les parties effilées ou canaux excréteurs des glandes (pl. III, fig. 35).

Les coupes tangentielles, c'est-à-dire parallèles à la surface du corps, sont aussi très intéressantes et démontrent d'une façon évidente que l'arrangement des glandes est réellement tel qu'il vient d'être décrit. Nous examinerons successivement des coupes faites à différentes hauteurs en partant de la partie profonde des colonnettes.

La première, représentée planche III, figure 30, est faite dans le voisinage immédiat de la couche des muscles circulaires; les colonnes de glandes sont assez régulièrement arrondies en cet endroit, elles sont occupées dans toute leur étendue par les parties renflées des glandes; parmi ces glandes, les unes apparaissent, sur semblable coupe, remplies de protoplasme granuleux renfermant le noyau; elles sont donc coupées à la hauteur du noyau; les autres ont été rencontrées à un niveau un peu supérieur et sont déjà remplies du produit de sécrétion très finement granuleux. Une seconde coupe, planche III,

Digitized by Google

figure 31, est pratiquée à mi-hauteur, par exemple, de la couche; les colonnettes sont alors régulièrement prismatiques; immédiatement contre les cloisons conjonctives nous avons la coupe d'éléments assez volumineux; tantôt nous y trouvons encore une fois du protoplasme avec noyau, d'autres fois, au contraire, nous n'avons que le produit de sécrétion; le centre des polygones est occupé par des espaces très petits, qui ne sont autres que les parties effilées servant de canaux excréteurs aux glandes plus profondément situées.

Enfin nous pouvons examiner une troisième coupe, à un niveau plus rapproché de la cuticule et passant dans la région des glandes à gros corpuscules; sur une semblable coupe les cloisons conjonctives délimitant des polygones assez réguliers sont encore visibles, mais elles sont devenues beaucoup plus minces que dans les coupes précédentes; les champs polygonaux que ces cloisons délimitent sont occupés dans toute leur étendue par de petits espaces, les uns finement granuleux et étant les parties effilées des glandes de la couche profonde, les autres remplis par un ou par un petit nombre de gros corpuscules et étant la coupe des glandes de la couche corticale.

Si l'on considérait une coupe tangentielle faite immédiatement au voisinage de la cuticule, on n'aurait plus de polygones, parce que les cloisons conjonctives s'arrêtent à quelque distance de la cuticule.

Dans cette première région de la ceinture comprenant, comme nous l'avons dit plus haut, la face dorsale et les faces latérales du corps depuis le 32e jusqu'au 37e segment inclus, les cloisons conjonctives sont très minces relativement à ce qu'elles sont à la face ventrale de la ceinture. Il ne m'a pas été possible d'y observer une seule fois des capillaires sanguins; au point de séparation entre les glandes de la ceinture et les muscles circulaires, on trouve souvent des vaisseaux sanguins, mais je ne puis me rallier à l'opinion de *Claparède* (4), qui décrit une véritable couche vasculaire en cet endroit.

Les cloisons conjonctives ont ici la même constitution qu'à la face ventrale, mais elles sont moins nombreuses en ce sens qu'elles sont plus distantes les unes des autres, et elles sont aussi moins épaisses.

Dans cette région de la ceinture, on ne retrouve jamais trace de cellules hypodermiques non modifiées; au voisinage de la cuticule toute l'étendue de

Digitized by Google

la ceinture est occupée par des parties de glandes leur servant de canaux excréteurs. Les glandes ont ici pris un tel développement qu'elles ont envahi même les sillons intersegmentaires qui par suite disparaissent souvent complètement, et les pores dorsaux sont également oblitérés dans cette région du corps.

2° *Deuxième région.* — Comprenant ce que *Hermann Ude* (56) désigne sous le nom de *Tubercula pubertatis,* c'est un bourrelet longitudinal s'étendant sur quatre segments, du 33ᵉ au 36ᵉ inclus; ce bourrelet est ordinairement très apparent et présente une constitution histologique toute particulière. Nous trouvons dans cette région de la ceinture *trois sortes de glandes,* et en outre on y rencontre encore des cellules hypodermiques non modifiées (pl. III, fig. 32).

Nous avons d'abord les deux espèces de glandes que nous avons vues du côté du dos; elles présentent les mêmes caractères et affectent la même disposition; seulement, celles à produit de sécrétion très finement granuleux sont ici beaucoup moins nombreuses que du côté du dos et ne s'étendent vers la profondeur que jusqu'à environ mi-hauteur de la couche.

La moitié interne des colonnettes est occupée par des éléments spéciaux qui ont une forme et un aspect particuliers.

Ce sont des glandes provenant sans doute d'une modification des glandes finement granulées. Elles ont encore une forme analogue, l'extrémité renflée semble plus développée; en certains endroits on peut les voir s'amincir progressivement, à mesure qu'elles se rapprochent de la surface, et quoique je ne sois pas parvenu à les suivre avec certitude jusqu'à la surface du corps, il est cependant fort probable qu'elles s'ouvrent également à travers des pores de la cuticule. Leur contenu est beaucoup plus granuleux que celui des glandes de l'assise profonde dorsale; elles possèdent un noyau arrondi assez volumineux, avec nucléole très apparent.

Dans leur intérieur on remarque souvent un réseau de trabécules, qui est constitué probablement de lamelles protoplasmiques, et cela donne alors à ces éléments un très bel aspect. Ce réseau est d'une analogie frappante avec

Digitized by Google

celui que *List* [1] figure dans beaucoup d'éléments glandulaires monocellulaires.

L'arrangement de ces glandes doit être, au fond, le même que celui que nous avons vu pour les glandes finement granuleuses du côté du dos; seulement on n'obtient jamais ici des préparations aussi démonstratives; cela tient probablement à ce que les cloisons sont ici plus nombreuses, plus épaisses et surtout moins régulièrement distribuées.

Dans cette région de la ceinture nous trouvons encore au voisinage de la cuticule, à la place de l'ancien hypoderme, quelques cellules ayant conservé leurs caractères primitifs, présentant encore leur grand noyau ovalaire; elles sont situées entre les extrémités superficielles des canaux excréteurs des glandes. Dans cette région les cloisons sont beaucoup plus nombreuses et plus épaisses que du côté du dos. Elles sont manifestement constituées d'une substance granulée renfermant çà et là des noyaux, et dans laquelle courent des fibres musculaires venant en partie de la couche des muscles circulaires, en partie aussi de la couche musculaire longitudinale, voire même des dissépiments ou cloisons intersegmentaires.

Ces cloisons conjonctivo-musculaires, assez épaisses à leur base, vont en diminuant à mesure qu'elles se rapprochent de la surface du corps.

La direction moyenne des fibres musculaires qui entrent dans la constitution des cloisons est normale à la surface, de sorte que ces muscles, par leur contraction, favorisent le rejet du produit de sécrétion des glandes, en donnant lieu à une dépression de la couche.

Ici l'on trouve assez souvent des capillaires sanguins courant dans l'épaisseur des cloisons, entre les colonnettes de glandes, allant jusqu'à quelque distance de la cuticule pour se replier en anses et revenir de nouveau vers les muscles circulaires. Je dois me rallier ici à la manière de voir de *R. Horst* (18), qui considère ces capillaires comme ramifications des vaisseaux de la couche musculaire sous-jacente, et ne puis admettre l'existence

[1] Jos. List, *Ueber Becherzellen und Leydig'sche Zellen* (*Schleimzellen*) (Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. 26, H. 4, 1886).

Digitized by Google

d'une couche vasculaire proprement dite entre la ceinture et les muscles circulaires.

3° *Troisième région.* — A la face ventrale de la ceinture nous retrouvons les deux espèces de glandes que nous avons vues du côté du dos, mais elles sont ici moins nombreuses et moins développées. Cette région se fait remarquer : 1° en ce qu'un nombre relativement considérable de cellules hypodermiques ont persisté; 2° en ce que les cloisons conjonctives, très nombreuses, sont fort rapprochées les unes des autres. Ces cloisons s'étendent depuis les muscles circulaires jusqu'à la base de l'hypoderme primitif, c'est-à-dire jusqu'à la limite profonde des cellules hypodermiques non modifiées; il en est probablement de même pour les cloisons conjonctives du côté du dos, mais on ne peut aussi facilement s'en assurer là, parce que les cloisons étant beaucoup plus minces et beaucoup moins abondantes, l'observation y est plus difficile à faire. Du côté de la face ventrale l'épaississement de la couche hypodermique est loin d'être aussi considérable que du côté du dos, la modification ne se fait pas au niveau des sillons intersegmentaires.

L'examen de la figure 33, planche III, qui nous représente une coupe transversale de la ceinture au niveau du 34e segment, nous montre la place occupée par les différentes régions décrites.

La région dorsale s'étend du côté du dos et sur les faces latérales, et comprend la partie *A*, *B*, *C* de la coupe.

La seconde région, désignée par *Ude* (56) sous le nom de *Tubercula pubertatis,* règne de *A* en *A'* et de *C* en *C'*.

La troisième région ou région ventrale est limitée entre *A'* et *C'*.

Telle est la constitution de la ceinture s'étendant du 32e au 37e segment inclus. Il me reste à dire maintenant quelques mots d'une autre partie modifiée de l'hypoderme du Lombric, qui semble avoir complètement échappé jusqu'aujourd'hui aux investigations des différents auteurs.

Indépendamment de la ceinture telle qu'elle vient d'être décrite, il faut considérer comme en faisant partie toute la face ventrale du corps s'étendant en avant, à partir de la ceinture (*s. str.*) jusqu'au 15e segment antérieur, c'est-à-dire jusqu'aux orifices sexuels mâles.

Digitized by Google

Dans toute cette partie du corps, l'hypoderme présente les mêmes caractères, un peu atténués cependant, qu'à la face ventrale de la ceinture proprement dite; en outre, sur les bords de la face ventrale, il règne dans toute cette région, à droite et à gauche, un bourrelet longitudinal s'étendant du 15e au 33e segment, pour être ici en continuité avec les *Tubercula pubertatis* d'*Ude*. Ces bourrelets sont surtout apparents sur les individus durcis par le liquide de Kleinenberg ou acide picro-sulfurique.

La figure 18, planche II, représente l'extrémité antérieure d'un individu ainsi traité. Dans l'étendue de ces bourrelets nous avons la même constitution de l'hypoderme que dans les *Tubercula pubertatis,* seulement, encore une fois, la modification de l'hypoderme s'y est faite à un moindre degré. Cette modification ne se fait pas au niveau des sillons intersegmentaires, où l'hypoderme est réduit à une assise unique de cellules cuboïdes, comme c'est le cas partout, si ce n'est dans la partie dorsale de la ceinture proprement dite.

Comment se fait-il maintenant que ces bourrelets, qui sur le vivant sont très peu visibles, au point qu'ils échappent à un examen superficiel, deviennent si marqués sur des individus durcis? Cela résulte de ce qu'il existe dans l'épaisseur des téguments, à droite et à gauche de la ligne médiane, des muscles spéciaux en rapport avec ces bourrelets, en ce sens que leur contraction a pour effet de faire apparaître nettement à l'extérieur les bourrelets dont nous venons de parler. Nous nous occuperons plus loin de ces muscles.

La ceinture est donc un organe essentiellement glandulaire, qui atteint son maximum de développement à l'époque de la maturité des produits sexuels. Les glandes que l'on y rencontre sont homologues de celles de l'hypoderme ordinaire, elles n'en diffèrent que par l'énorme développement qu'elles ont pris dans cette région du corps. Leur contenu est le même, le noyau occupe la même place et elles s'ouvrent à la surface du corps à travers les pores de la cuticule. Nous trouvons cependant dans une partie de la ceinture une troisième espèce de glandes, dont le contenu diffère de celui des autres glandes, mais n'en est cependant probablement qu'une modification. Le fait de trouver dans la ceinture des capillaires sanguins, fait qui paraissait de prime abord si surprenant, s'explique maintenant avec la plus grande facilité. Cela provient uniquement de ce que les glandes hypoder-

Digitized by Google

miques se sont enfoncées par groupes dans le tissu sous-jacent, et entre ces groupes de glandes se trouvent donc des dépendances de la couche des muscles circulaires, des cloisons dans lesquelles la présence de vaisseaux sanguins et d'éléments musculaires n'a plus rien qui puisse nous surprendre.

Signification des glandes en colonnettes. — Les glandes de la ceinture, qui affectent surtout du côté du dos une disposition si régulière, constituent un type glandulaire à part, que je propose de désigner sous le nom de *glandes sociales*.

Les organes glandulaires, considérés dans l'ensemble du règne animal, peuvent être divisés en deux grands groupes primaires :

Les glandes *monocellulaires* ou *éléments glandulaires*, et les *glandes proprement dites;* les monocellulaires étant des cellules à fonction glandulaire dans l'épaisseur d'un épithélium ou de l'épiderme; les glandes proprement dites se ramenant toutes à un type unique qui a été d'abord bien défini par *Jean Müller*, et consistant toujours et exclusivement dans un diverticule ou une invagination d'une peau ou d'une muqueuse.

Les glandes de ce second groupe sont alors subdivisées en trois classes, suivant que le cul-de-sac présente à son fond le même diamètre qu'à son embouchure (*tubuleuses*), ou qu'il est renflé dans la profondeur en une dilatation vésiculeuse (*acineuses*), ou que le cul-de-sac présente par sa forme une transition entre les *tubuleuses* et les *acineuses*, et dans ce cas les glandes sont dites *tubo-acineuses*.

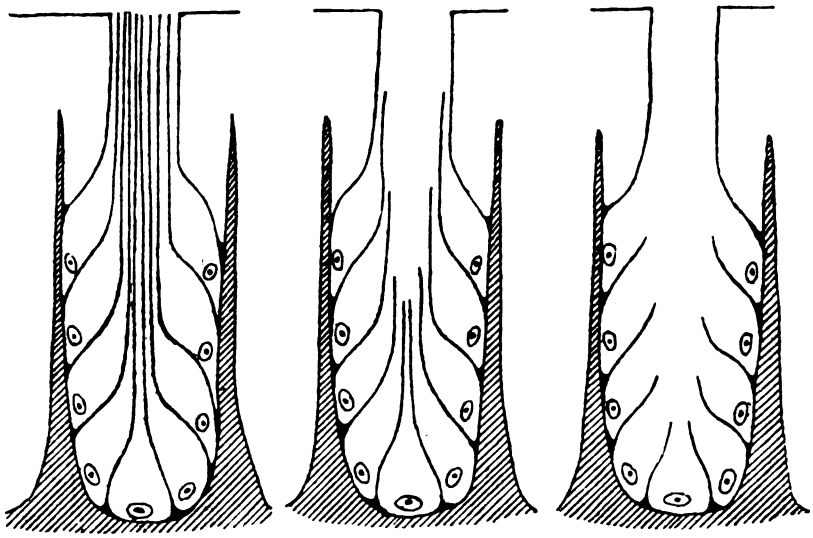
Ensuite, on distingue deux sous-classes pour chacune de ces trois formes, suivant que le cul-de-sac reste simple ou se ramifie en branches secondaires, tertiaires, etc. (*simples, composées*).

Or il se fait que les glandes de la partie dorsale et des parties latérales de la ceinture du Lombric terrestre nous offrent un bon type de transition entre les deux groupes de glandes actuellement établis. Ce sont des glandes monocellulaires réunies par groupes, associées en quelque sorte, qui conservent chacune son canal excréteur propre, mais toutes les glandes qui constituent dans leur ensemble un de ces groupes, une de ces associations, sont enveloppées par une enveloppe conjonctivo-musculaire commune. Supposons,

Digitized by Google

par exemple, que les canaux excréteurs des glandes d'une colonnette de la ceinture se raccourcissent de plus en plus, et nous finirons par obtenir identiquement ce qui se présente, par exemple, dans une glande proprement dite.

Comparer à ce sujet les figures suivantes :



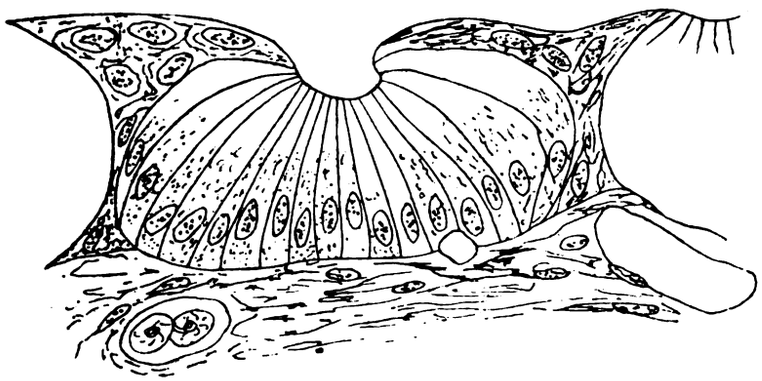
Tout récemment *F.-E. Schulze* [1] a décrit dans l'épaisseur de l'épithélium de la cavité buccale primordiale de *Pelobates fuscus* des éléments glandulaires spéciaux, serrés en grand nombre les uns contre les autres et qu'il appelle *glandes épithéliales plates*. Ces glandes décrites par *Schulze* peuvent être appelées aussi *glandes sociales* et constituer aussi une transition entre les glandes élémentaires et les glandes proprement dites, définies par *Jean Müller* comme invaginations ou diverticules d'une peau ou d'une muqueuse. Seulement, les glandes de la ceinture du Lombric se rapprochent davantage des glandes proprement dites; les glandes décrites par *F.-E. Schulze* sont *intra-épithéliales*, tandis que celles du Lombric sont *sous-épithéliales*, elles se sont enfoncées par groupes dans le tissu sous-jacent et l'on peut

[1] F.-E. Schulze, *Ueber das Epithel der Lippen, der Mundrachen- und Kiemenhöhle erwachsener Larven von* Pelobates fuscus. Berlin, Septembre 1888.

Digitized by Google

distinguer à chacun de ces groupes, à chacune de ces associations, une partie épithéliale ou glandulaire et une partie enveloppante conjonctivo-musculaire, comme c'est le cas pour toute glande proprement dite.

Voici une figure de *Schulze,* représentant une de ces glandes épithéliales plates (Taf. 4, Fig. 31) :



Nous pourrons dresser comme suit le tableau des différentes sortes de glandes connues aujourd'hui :

I. *Glandes monocellulaires ou élémentaires.*

II. *Glandes sociales* . . . . . { *intra-épithéliales.* / *sous-épithéliales.*

III. *Glandes proprement dites.*

- A. *Glandes simples.* .
  - *tubuleuses*
    - *non ramifiées* (Lieberkühn).
    - *ramifiées.* . . (utérines).
  - *alvéolaires*
    - *non ramifiées* (follicule de l'ovaire).
    - *ramifiées.* . . (Meibomius).
- B. *Glandes composées*
  - *tubuleuses*
    - *lobulaires* . . (foie).
    - *lobaires* . . . (testicule).
  - *alvéolaires* | *lobaires* . . . (poumon).

Pour les glandes proprement dites nous nous bornons à reproduire la nouvelle classification proposée dernièrement par *W. Flemming* [1].

[1] *Ueber Bau und Eintheilung der Drüsen* (Archiv für Anatomie und Physiologie, 1888).

Digitized by Google

Développement de la ceinture. — Nous avons terminé maintenant l'étude histologique de l'épiderme du Lombric; je ne passerai pas au chapitre suivant, sans dire quelques mots de ce que j'ai pu observer, dans le courant de cette étude, au sujet du développement de la ceinture.

Il est certain que les glandes de la ceinture ont pour origine les glandes de l'hypoderme qui elles-mêmes proviennent de cellules hypodermiques basilaires. Des coupes transversales ou longitudinales à travers une ceinture en voie de développement nous montrent cela avec la plus grande évidence. La modification se fait plus tôt à la face ventrale qu'à la face dorsale, et alors que l'on ne peut encore voir, sur un individu vivant, la modification de la région dorsale les *Tubercula pubertatis* sont déjà nettement marqués sur les bords de la face ventrale.

C'est du côté du dos que l'on peut faire les observations les plus intéressantes. Dans la couche hypodermique basilaire se produit une abondante multiplication cellulaire, on y trouve bientôt une quantité énorme de noyaux, constituant une véritable couche, et tellement nombreux qu'ils semblent serrés les uns contre les autres. Un peu plus tard ces noyaux affectent sur les coupes une disposition particulière, ils apparaissent comme répartis en groupes, chaque groupe ayant la forme d'une partie de cercle, la convexité étant dirigée du côté des muscles circulaires, et entre deux groupes voisins existe déjà une papille conjonctive s'engageant, à la façon d'un coin, entre les groupes d'éléments hypodermiques basilaires.

Chacun de ces groupes va donner naissance à ce que nous avons appelé une colonnette de glandes. Les cellules vont se transformer en éléments glandulaires qui, d'une part, iront s'ouvrir à l'extérieur à travers les pores de la cuticule, d'autre part s'allongeront considérablement vers l'intérieur en prenant la disposition caractéristique que nous avons décrite plus haut. Les cloisons conjonctives sépareront entre elles les différentes colonnettes, et dans ces cloisons s'engageront des fibres musculaires et en certains endroits des capillaires sanguins. En somme nous aurons la constitution de la ceinture, telle que nous avons appris à la connaître dans les pages précédentes.

Différentes parties, et rôle de la ceinture. — Nous avons vu que la

Digitized by Google

modification de l'hypoderme n'est pas limitée aux segments de la ceinture (*s. str.*), mais que toute la face ventrale du Lombric, depuis les orifices sexuels mâles jusqu'au 32ᵉ anneau, présente, au fond, la même constitution que dans les segments de la ceinture proprement dite.

A l'ensemble de toute la partie modifiée de l'hypoderme nous laisserons le nom de *clitellum* donné par *Willis* à la région s'étendant du 32ᵉ au 37ᵉ segment inclus.

Dans ce *clitellum* nous distinguerons une partie dorsale et une partie ventrale. La partie dorsale est constituée par une portion très enflée de l'hypoderme, se trouvant dans l'étendue de six segments sur la face dorsale et sur les faces latérales du corps ; elle a, par conséquent, la forme d'une selle.

La partie ventrale est beaucoup plus étendue et va du 15ᵉ au 37ᵉ segment. Nous trouvons à la face ventrale un large sillon délimité par deux bourrelets.

Le sillon, nous l'appellerons *sillon génital,* et les bourrelets, *bourrelets du sillon.*

Nous pouvons ensuite distinguer dans le sillon comme dans les bourrelets deux portions, une antérieure et une postérieure.

La portion antérieure du sillon est délimitée à droite et à gauche par les bourrelets que nous avons décrits du 15ᵉ au 33ᵉ segment, et la partie postérieure du sillon est comprise entre les bourrelets très apparents qui se trouvent sur les segments 33, 34, 35, 36, et que *Ude* désigne sous le nom de *Tubercula pubertatis.*

Voici donc les différentes parties à distinguer dans le *clitellum :*

- *Clitellum*
  - *Partie dorsale.*
  - *Partie ventrale*
    - *Sillon génital . . . .*
      - portion antérieure.
      - portion postérieure.
    - *Bourrelets du sillon*
      - portion antérieure.
      - portion postérieure.

Le rôle de la ceinture doit être très important, étant donné le grand développement et la complication de cet organe.

Hering (15) a décrit, le premier, la manière dont la ceinture intervient

Digitized by Google

lors de l'accouplement des Lombrics : les deux individus s'accolent par leur face ventrale, et la ceinture de chacun d'eux sécrète un anneau mucilagineux qui l'unit à son compagnon.

D'autres ont attribué à la ceinture la sécrétion des capsules ovigères. Quoi qu'il en soit, le rôle du *clitellum* doit être assez complexe, et des observations précises à ce sujet seraient du plus haut intérêt. Dans ce but il faudrait conserver un grand nombre de Lombrics dans un milieu approprié, dans de la bonne terre végétale maintenue dans des conditions favorables d'humidité et observer les modifications qui se produisent dans la région du *clitellum* avant, au moment et après la période de reproduction; ce serait là l'objet d'une étude particulière, demandant beaucoup de soins et surtout assez bien de temps.

Il est fort probable que les bourrelets du sillon deviennent plus accentués au moment de l'accouplement, par suite de la contraction de muscles spéciaux (*muscles arciformes*) que nous décrirons dans la paroi du corps de cette région; le sillon génital devient donc plus profond, il prend l'apparence d'une gouttière. Les individus s'accolent de telle sorte que les bourrelets de l'un s'appliquent contre les bourrelets de l'autre, et la gouttière qui règne à la face ventrale de l'un des animaux accouplés constitue avec celle de son compagnon un canal à travers lequel peut couler le sperme.

Disons, avant de terminer ce chapitre, que les Lombrics tels qu'on les récolte ont toujours le tube digestif rempli de terre. Or, dans ces conditions il est impossible de pratiquer des séries de coupes à travers le corps du Ver.

Il est absolument nécessaire de débarrasser le tube digestif de son contenu naturel et de remplacer celui-ci par une autre substance susceptible de se laisser couper au rasoir.

La substance qui jusqu'aujourd'hui a offert les plus grands avantages est le marc de café, employé en premier lieu à cet effet par *Carl Vogt* et *Émile Yung*.

Dans ces derniers temps *Friedländer* a fait usage d'une pâte obtenue en délayant du papier-filtre dans l'eau. Cette méthode lui a été communiquée par le Dr *Kükenthal*, professeur à Iéna.

Digitized by Google

Cette pâte présente un grand inconvénient, c'est qu'en passant par les réactifs dont on se sert pour l'enchâssement des objets, elle devient tellement dure qu'il est impossible d'en obtenir des coupes convenables. On ne parvient à faire des séries de coupes que dans les endroits où il n'y a rien dans la cavité du tube digestif, ce qui se présente à certains endroits, parce que le papier, dans son passage à travers le corps du Lombric, se prend en boules plus ou moins volumineuses, distancées les unes des autres parfois de plusieurs millimètres.

C. Système musculaire.

Avant de commencer l'étude des couches musculaires de la paroi du corps, je dois attirer l'attention sur la difficulté que l'on éprouve à distinguer, chez le Ver adulte, ce qui est musculaire de ce qui est conjonctif.

On sait aujourd'hui d'une façon certaine que chez les Vertébrés ce sont des parties bien distinctes du mésoderme qui donnent naissance, d'une part, aux éléments musculaires, d'autre part, au tissu conjonctif; mais d'après ce que l'on connaît actuellement sur le développement des Annélides, il n'en serait pas de même pour le Lombric terrestre.

Ainsi, d'après les observations faites par M. *J. Fraipont* [1] sur le développement du genre *Polygordius,* une seule et même couche cellulaire donnerait naissance dans toute son étendue aux éléments musculaires, à ce qu'on peut appeler tissu conjonctif et à la membrane péritonéale.

On n'a pas encore de données précises sur le développement des couches musculaires chez le Lombric terrestre; mais si l'on peut conclure des processus évolutifs observés chez le *Polygordius* aux processus chez le *Ver de terre,* nous comprenons combien il sera difficile de dire, à l'examen des couches musculaires de l'adulte, ce qui est conjonctif et ce qui est musculaire.

Il est des endroits où les éléments musculaires du Lombric sont rassemblés par groupes ou par séries, et entre ces séries ou ces groupes d'éléments mus-

[1] Julien Fraipont, *Monographie du genre* Polygordius (Faune et flore du golfe de Naples, 1887).

Digitized by Google

culaires nous trouvons une substance granulée, renfermant une quantité de noyaux, que l'on est porté à désigner sous le nom de tissu conjonctif. D'autres fois il n'existe entre les éléments musculaires que très peu de cette substance granulée et les noyaux sont assez rares; dans ce cas le mot tissu conjonctif semble très peu justifié, et est-il préférable de dire substance intercolumnaire ou simplement stroma granuleux?

Cette restriction faite, nous commencerons l'étude du système musculaire du Lombric. Quelle que soit la partie du corps dans laquelle on étudie le tissu musculaire, nous retrouverons partout les mêmes éléments musculaires qui, d'après la constitution qu'ils présentent, méritent le nom de *colonnes musculaires*.

Le système musculaire du Lombric peut être subdivisé en quatre parties :

1° Couches musculaires de la paroi du corps;

2° Couches musculaires de la paroi du tube digestif;

3° Muscles des dissépiments ou cloisons intersegmentaires;

4° Enveloppe musculaire du système nerveux central.

Mais en réalité toutes ces parties, que nous décrirons séparément, ont des connexions entre elles; c'est ainsi que les muscles des dissépiments unissent ceux de la paroi du corps à ceux de la paroi du tube digestif, et nous verrons aussi qu'en certains endroits la gaine musculaire de la chaîne ganglionnaire est directement en rapport avec les muscles de la paroi du corps.

Muscles de la paroi du corps.

Immédiatement sous l'épiderme viennent les couches musculaires de la paroi du corps; elles ne sont séparées de l'épiderme que par une mince couche de substance conjonctive, que l'on a souvent désignée sous le nom de membrane basilaire. Nous considérerons séparément, comme on l'a toujours fait jusqu'à présent :

a) *Les muscles circulaires* et

b) *Les muscles longitudinaux.*

La couche circulaire est en dehors, la couche longitudinale en dedans.

Digitized by Google

Nous verrons qu'il faut distinguer en outre une troisième catégorie de muscles que nous appellerons

c) *Les muscles arciformes,* qui n'existent que dans une région déterminée de la paroi du corps, depuis les orifices sexuels mâles jusqu'à l'extrémité postérieure du *clitellum*. Enfin,

d) *Les muscles des soies*. Nous les décrirons également comme faisant partie des muscles de la paroi du corps. Ils servent soit à faire proéminer les soies au dehors, soit à les faire rentrer dans l'épaisseur des téguments.

a) *Muscles circulaires.* — Ces muscles constituent à peu près une couche continue, interrompue seulement par les soies, les pores dorsaux et les canaux excréteurs des organes sexuels et segmentaires; à ces niveaux les fibres musculaires s'écartent uniquement de la quantité nécessaire pour livrer passage aux organes sus-mentionnés.

Si nous examinons, par exemple, une coupe tangentielle de la paroi du corps passant par un groupe quelconque de soies, nous apercevons deux fentes en forme de boutonnières; ces fentes sont délimitées par les fibres musculaires s'écartant au niveau pour se rapprocher aux extrémités de ces fentes au point de se rejoindre même entre les deux fentes livrant passage aux soies d'un même groupe (pl. II, fig. 28).

Les ouvertures en forme de boutonnières, laissées libres par les fibres musculaires, sont occupées par les soies entourées de leurs follicules; entre le follicule sétigère et les fibres musculaires voisines, nous trouvons souvent une certaine quantité de substance conjonctive avec noyaux, parfois la coupe d'un vaisseau sanguin (pl. II, fig. 28).

Il est évident que si nous ne considérons la couche des muscles circulaires que par rapport à la surface du corps, cette couche est interrompue également au niveau des orifices buccal et anal; mais dans ces deux endroits il n'y a pas réellement une interruption dans la couche, il y a une simple inflexion en même temps que diminution d'épaisseur, et les muscles de la paroi du corps se continuent sans aucune ligne de démarcation avec la couche des muscles circulaires qui fait partie de la paroi du tube digestif (pl. IV, fig. 40).

L'épaisseur de la couche est fort inégale, suivant les endroits où sont

Digitized by Google

pratiquées les coupes que l'on étudie; comme nous venons de le voir, elle diminue progressivement d'épaisseur aux extrémités du Ver pour se continuer dans la couche des muscles circulaires du tube digestif, couche d'une puissance notablement moindre que celle du tube musculo-cutané.

Dans un segment donné, la couche a son maximum d'épaisseur au milieu du segment, son minimum au niveau des sillons intersegmentaires. La diminution d'épaisseur depuis le milieu du segment jusqu'au voisinage des sillons est presque insensible, puis la couche se réduit brusquement à un minimum qui est atteint au fond des sillons qui séparent entre eux les segments.

Quelques auteurs, entre autres *Perrier,* nient même l'existence de muscles circulaires au niveau des sillons intersegmentaires, mais cela n'est pas le cas; il y persiste toujours une partie de la couche, mais elle y est réduite à une, deux ou trois assises de fibres de petit diamètre.

La différence d'épaisseur au milieu et aux limites des segments est d'autant plus frappante que les sillons sont plus accentués ou plus profonds. Sur un individu vivant, il est facile de voir, même à l'œil nu, que c'est dans la partie antérieure du corps que ces sillons sont surtout profonds; aussi c'est dans cette région du corps que la couche des muscles circulaires est réduite au fond des sillons à une seule assise de fibres, tandis que dans le reste du corps on y retrouve deux et même trois assises. Ce qui rend encore cette différence d'épaisseur plus frappante dans la partie antérieure du corps, c'est que la couche des muscles circulaires y est plus développée et que les segments ont extérieurement une forme beaucoup plus bombée que dans la partie postérieure du corps. On peut comparer à ce sujet les deux diagrammes représentés planche IV, figures 45 et 46; le premier est une coupe longitudinale d'un segment de la partie antérieure du corps, le second celle d'un segment de la région moyenne ou postérieure. Ces figures sont prises toutes deux du côté dorsal.

La couche des muscles circulaires est également réduite dans l'étendue de la ceinture, surtout à la face ventrale; ceci est sans doute en rapport avec la quantité assez considérable d'éléments musculaires qui s'engagent dans l'épaisseur de l'hypoderme modifié de cette région du corps pour y constituer les cloisons séparant entre elles les colonnettes de glandes.

Digitized by Google

Disons encore que les fibres de cette couche s'écartent aussi les unes des autres dans beaucoup d'endroits, pour livrer passage aux vaisseaux sanguins et aux muscles qui traversent la couche dans différentes directions. Ces muscles sont ou bien des muscles arciformes, ou des muscles provenant des dissépiments, ou enfin des muscles présidant aux mouvements des soies.

Cette couche est constituée par des éléments musculaires à direction circulaire, entre lesquels se trouve interposée une substance granulée multinucléée; les noyaux sont en nombre infiniment variable suivant les endroits.

Ces éléments musculaires ont été désignés sous le nom de fibres; nous verrons que d'après leur constitution il vaudra mieux les désigner sous le nom de *colonnes musculaires,* étant donnée l'analogie de structure qu'ils présentent avec ce que l'on désigne sous ce nom dans un muscle de Vertébré. Ces éléments musculaires présentent différentes formes à la coupe transversale : leur coupe est circulaire, ovalaire, d'autres fois polygonale, ou encore rubanée, quelquefois même elle se présente irrégulièrement bosselée, et ceci surtout au voisinage des muscles longitudinaux.

Le diamètre de ces éléments varie énormément d'une colonne à l'autre; en règle générale il augmente de dehors en dedans. Les plus grosses colonnes se trouvent au voisinage des muscles longitudinaux, d'où elles vont en diminuant assez régulièrement d'épaisseur pour se réduire à un minimum au voisinage de l'hypoderme.

Tous ces éléments sont pour ainsi dire empâtés dans un stroma granuleux plus ou moins abondant; tantôt ils sont répartis en petits groupes composés d'un nombre plus ou moins considérable de colonnes, tantôt ils sont isolés et très irrégulièrement distribués; mais il arrive également, et c'est le cas notamment vers le milieu des segments, surtout au voisinage des groupes de soies, que les éléments musculaires affectent une disposition toute caractéristique; ils sont là disposés en séries radiaires par rapport à l'axe du corps, les séries étant séparées les unes des autres par une couche de tissu conjonctif à travers laquelle passent souvent des vaisseaux sanguins ou des muscles servant aux mouvements des soies. Chaque série est formée d'un nombre assez considérable d'éléments, et leur arrangement est d'une analogie frappante avec ce que nous trouverons dans la couche musculaire longitudinale (pl. IV, fig. 43).

Digitized by Google

Quelle est maintenant la constitution d'une de ces colonnes et quelle est sa valeur morphologique?

D'après *Claparède,* ces éléments ont une constitution fibrillaire qui se laisse mettre en évidence par la dissociation, parce que l'on peut observer alors des fibrilles isolées qui prennent souvent une forme ondulée; *Claparède* dit qu'il ne peut être question de substance corticale et axiale dans la fibre musculaire du Lombric et que cette fibre ne possède pas de noyau.

D'après les recherches que *Schwalbe* publia la même année sur la structure de la fibre musculaire chez les Invertébrés et dans lesquelles il décrit aussi les fibres du Lombric, il faut distinguer dans ces éléments deux substances chimiquement différentes, l'une contractile, occupant la périphérie, l'autre centrale ou axiale. D'après *Schwalbe,* la fibre musculaire du Lombric est enveloppée d'un sarcolemme et possède, de plus, un noyau situé en dehors de la substance contractile. Le sarcolemme fut également admis dans ces éléments par *Weissmann* et *Leydig.*

Dans le travail de *Hermann Ude* (56), paru récemment, nous trouvons un peu plus de détails au sujet de la fibre musculaire du Lombric. D'après lui, la striation longitudinale provient de ce que la fibre est constituée de fibrilles aplaties, ces fibrilles étant placées les unes à côté des autres et occupant toute la longueur de l'élément musculaire. Ces fibrilles aplaties, sur une coupe, traversent de part en part la fibre quand celle-ci est de faible diamètre; dans les fibres volumineuses, au contraire, ces fibrilles sont radiairement disposées à la périphérie et laissent au centre un espace, de forme variable, suivant la forme qu'affecte la fibre elle-même, occupé par la substance axiale de *Schwalbe.* D'après *Hermann Ude,* la fibre musculaire du Lombric n'a pas de sarcolemme, mais il lui décrit un noyau situé à la face externe de la fibre; ce noyau est ovalaire, à grand axe parallèle à l'axe longitudinal de l'élément musculaire.

Voici comment est constitué, d'après ces nouvelles recherches, l'élément musculaire du Lombric. Nous l'appellerons désormais *colonne musculaire.* Par macération dans l'alcool au tiers de *Ranvier,* il est difficile d'obtenir de bonnes préparations d'éléments isolés, car la plupart du temps ils restent accolés, en plus ou moins grand nombre, par de la substance intercolumnaire,

Digitized by Google

ou bien on ne trouve isolés que des morceaux d'éléments brisés pendant la dissociation. Une méthode, qui vaut infiniment mieux, c'est de placer pendant vingt-quatre heures dans l'acide nitrique à 20 % un morceau de la paroi du corps. On peut alors aisément détacher des lambeaux de la couche musculaire circulaire et on place ces lambeaux dans un tube à réaction à moitié rempli d'alcool au tiers, puis on agite et les éléments musculaires se séparent très bien les uns des autres. On laisse déposer, puis on décante, on remplace alors l'alcool au tiers par une matière colorante, du carmin boracique, par exemple, on agite légèrement, puis on laisse agir le carmin pendant environ vingt-quatre heures; on décante de nouveau et on remet de l'alcool à 65°. On peut alors examiner les éléments isolés dans l'alcool ou bien les monter dans le baume de Canada, en passant par les alcools de plus en plus forts jusqu'à l'absolu, puis par l'essence de térébenthine. On trouve alors sur les préparations des éléments musculaires isolés et ils se présentent tels que nous en voyons planche III, figure 41.

Ils ont une forme de fuseau très allongé, terminé en pointe effilée aux deux extrémités. Il s'en trouve parfois, à l'une des extrémités desquels on croirait voir une bifurcation, mais en examinant de plus près on remarque qu'il n'en est rien, que cette apparence provient uniquement de ce que les extrémités de deux éléments distincts sont juxtaposées.

On trouve quelquefois un noyau appliqué contre les colonnes musculaires, mais c'est cependant chose relativement rare, et l'on ne peut en conclure à la nature cellulaire des éléments que nous étudions. Ce noyau occupe des niveaux très différents dans le sens de la longueur, tantôt au milieu, tantôt au voisinage d'une extrémité. Ce noyau, comme toute la colonne d'ailleurs, est souvent entouré d'une substance granuleuse qui n'est autre que du protoplasme intercolumnaire. Ajoutons encore qu'il ne faut pas s'étonner de trouver deux noyaux appliqués contre un même élément musculaire.

L'élément musculaire est partout le même, n'importe dans quel endroit du corps on l'examine; qu'il s'agisse de la paroi du corps, de la paroi du tube digestif, etc. Nous allons décrire cet élément ici, mais je dois dire dès à présent que les détails de structure apparaissent toujours plus nettement sur les éléments musculaires entrant dans la constitution de la paroi de cette

Digitized by Google

partie du tube digestif, désignée sous le nom de *gésier* ou estomac. Non seulement ces éléments s'isolent ici avec la plus grande facilité, mais sur les coupes transversales et longitudinales les détails apparaissent toujours avec plus de netteté (pl. III, fig. 47 et 49). J'ai obtenu cependant des préparations démonstratives en ce qui concerne les éléments musculaires de la paroi du corps et il ne peut rester de doute que l'élément musculaire du Lombric ne soit partout le même.

L'élément musculaire présente une striation longitudinale et en certains endroits on distingue une striation transversale assez nette. Cependant l'examen d'éléments isolés ne nous permet pas d'analyser la constitution intime de la substance musculaire et pour cela nous allons étudier d'abord des coupes longitudinales de la paroi du corps; sur ces coupes les muscles circulaires seront coupés transversalement et voici les particularités qu'on observe dans ces conditions.

Si l'on a eu soin de durcir les tissus par un réactif convenable, — et dans ce cas-ci c'est au *liquide de Flemming* ou aux alcools successifs qu'il faut s'adresser — et qu'après cela on a coloré par une matière d'aniline sur porte-objet dans le cas de l'emploi du *liquide de Flemming* — par le carmin boracique et en masse dans le cas où l'on s'est servi d'alcool pour durcir, — on obtient les éléments dans un admirable état de conservation et les détails de structure apparaissent le plus souvent avec grande évidence.

Étudions d'abord la coupe transversale d'une colonne musculaire de faible diamètre, soit au niveau des sillons intersegmentaires, soit au voisinage de l'hypoderme.

Toute la surface de la coupe est doublement striée, mais les stries sont toujours beaucoup plus apparentes dans une direction que dans l'autre, au point que jusqu'ici on n'a décrit qu'une striation dans un sens, formée par des lignes continues (*Hermann Ude*).

Un examen attentif nous montre que ces stries très nettes ne sont pas de simples lignes, mais ont une constitution moniliforme. Elles sont formées par un certain nombre de renflements réunis entre eux par des parties plus amincies. Ce système de stries traverse la colonne musculaire de part en part, ce qui ne sera plus le cas dans les éléments plus épais.

Digitized by Google

L'autre système de stries est beaucoup moins marqué et ne devient bien visible qu'en certains endroits; cette striation résulte de ce que les renflements des fortes stries se trouvent sur un certain nombre de lignes à des hauteurs égales, et il semble qu'on distingue par-ci par-là des filaments très ténus réunissant les renflements dans cette direction.

Si nous considérons maintenant une coupe transversale de la paroi du corps, sur laquelle les éléments musculaires circulaires seront coupés longitudinalement, nous retrouvons encore la double striation. La plus marquée est donnée par les fibrilles parallèles à l'axe de la colonne, c'est la striation longitudinale.

Ces fibrilles sont également moniliformes, quoique ce soit généralement moins apparent que sur les stries que nous venons de voir sur une coupe transversale de la colonne. Il arrive aussi que l'on distingue sur ces coupes longitudinales des éléments musculaires une légère striation transversale qui, encore une fois, est le résultat de la disposition à des niveaux égaux des renflements des fibrilles longitudinales.

Sans vouloir identifier la structure des colonnes musculaires du Lombric à celle des Arthropodes et des Vertébrés au point de vue du caractère de la striation, nous pouvons dire cependant qu'en somme la substance contractile d'une colonne musculaire du Lombric ne serait pas sans analogie avec ce que l'on connaît depuis quelques années dans les muscles striés des Vertébrés, des Arthropodes et de quelques autres groupes du règne animal.

Cette structure diffère sensiblement d'un groupe à l'autre, mais elle est au fond la même partout.

Se fondant d'une part sur ses recherches sur la structure du protoplasme des Spermatozoïdes et de l'œuf de l'Ascaris, et d'autre part sur les résultats fournis par l'étude de la constitution de la substance musculaire striée des muscles des Arthropodes, *Éd. Van Beneden* [1] a, le premier, signalé les analogies de structure que manifeste toute substance contractile, qu'elle soit protoplasmique ou musculaire.

On trouve dans le protoplasme comme dans la substance musculaire striée,

[1] *Archives de Biologie*, t. IV, 1883.

Digitized by Google

deux éléments essentiels : une substance est structurée, l'autre probablement liquide ou demi-liquide. La première se constitue de grains ou microsomes reliés entre eux par des filaments très ténus désignés par l'auteur sous le nom d'interfils et qui auraient la même composition chimique que les microsomes, si l'on se rapporte aux données fournies par l'action des réactifs et des matières colorantes en particulier.

Pour *Éd. Van Beneden* ces éléments structurés seraient essentiellement la partie contractile de la substance protoplasmique ou musculaire.

L'étude minutieuse que j'ai faite de la constitution histologique des éléments musculaires du Lombric, universellement reconnus comme des fibres non striées, m'autorise à affirmer l'existence dans ces éléments de microsomes réunis entre eux par des interfils, tant dans le sens longitudinal que dans le sens transversal. L'alignement des microsomes donne lieu à une striation qui, pour être peu apparente à première vue, n'en est pas moins évidente si l'on recourt à un examen plus approfondi de l'aspect que présentent les fibres, soit en coupe transversale, soit en coupe longitudinale, en se servant d'un grossissement suffisant et d'un éclairage convenable.

La substance contractile du Lombric serait constituée de fibrilles musculaires s'entre-croisant dans les trois directions de l'espace, et aux entrecroisements existent des renflements ou nodosités qui donnent à ces fibrilles un aspect moniliforme. Il est évident que cet aspect sera plus ou moins apparent sur les coupes suivant l'état de contraction des colonnes musculaires.

Étant donnée la forme de ces fibrilles, qu'elles sont constituées de parties plus épaisses réunies par des parties plus amincies, il est évident qu'il doit exister entre elles une substance liquide ou demi-liquide interfibrillaire ; c'est elle que nous allons rencontrer en plus grande abondance dans les colonnes plus épaisses et accumulée surtout au centre de l'élément musculaire où elle correspond à la substance axiale de *Schwalbe*.

Si nous examinons la coupe transversale d'une colonne musculaire au voisinage des muscles longitudinaux, elle se fait remarquer tout d'abord par son diamètre plus considérable.

Tout le champ de la coupe n'est plus occupé par de la substance contractile. Celle-ci occupe seulement la périphérie sur une épaisseur un peu

Digitized by Google

variable d'une colonne à l'autre. La substance contractile a la même constitution que dans la colonne décrite précédemment, le caractère essentiel c'est qu'ici la striation n'envahit pas le centre de la colonne, où il existe un espace d'étendue et de forme variable occupé par la substance axiale qui est la même que la substance interfibrillaire que nous avons vue plus haut (pl. III, fig. 48, *C, D, E*).

Substance intercolumnaire. — La masse principale en est formée par une substance finement granulée dans laquelle nous trouvons éparpillés des noyaux en nombre très variable suivant les régions que l'on examine. Il faut distinguer des noyaux de deux espèces, les uns plus petits, les autres plus grands. Les petits noyaux sont de loin les plus nombreux. Ils ont une forme généralement arrondie, à contours plus ou moins irréguliers, ils se colorent assez énergiquement dans les différentes matières tinctoriales, ils renferment un ou deux corpuscules nucléoliformes très apparents, d'autres fois ils sont remplis d'un nombre assez considérable de corpuscules fortement colorés. Ces noyaux sont éparpillés partout dans la substance intercolumnaire, tantôt distancés les uns des autres, tantôt, au contraire, réunis en groupes.

Les grands noyaux se trouvent d'une manière assez constante au voisinage des colonnes musculaires, ils semblent avoir une affinité moins grande pour les matières colorantes; ils renferment généralement deux ou trois corpuscules nucléoliformes et l'on y distingue parfois assez nettement un réticulum chromatique. Ils paraissent être plus particulièrement en rapport avec les éléments musculaires, ils se trouvent le plus souvent au voisinage des colonnes, ils ont une forme ovalaire, leur grand axe étant parallèle à l'axe longitudinal des colonnes. A la coupe transversale ces noyaux ont une forme arrondie ou irrégulièrement bosselée. Ce sont ces noyaux que nous avons trouvés accolés à certains éléments musculaires isolés et c'est ce qui a amené *Schwalbe, Hermann Ude* et d'autres à considérer les éléments musculaires du Lombric comme possédant chacun son noyau, comme ayant, par conséquent, chacun la valeur morphologique d'une cellule.

Le nombre de ces noyaux est réellement trop restreint relativement au nombre d'éléments musculaires pour qu'il soit possible d'admettre l'existence

Digitized by Google

d'un semblable noyau pour chacun de ces éléments. Et si, étant donnée la place qu'ils occupent, ces noyaux ont réellement des liens avec les colonnes musculaires, ce ne peuvent être que des liens ontogéniques, c'est-à-dire que ces noyaux appartiennent à des cellules spéciales qui, par différenciation de leur protoplasme, ont donné naissance, non pas chacune à un élément, mais chacune à un certain nombre d'éléments musculaires. Dans l'organisme complètement développé, tel que nous l'envisageons dans ce travail, il est évident que ces noyaux appartiennent, tout comme les petits noyaux que nous avons vus plus haut, à la substance intercolumnaire.

La nécessité de nouvelles recherches embryologiques à ce sujet se fait sentir, et si les choses se passent chez le Lombric comme elles se passent chez le *Polygordius*, d'après les recherches de M. *J. Fraipont* [1], l'hypothèse que je viens d'émettre n'est pas sans fondement.

En effet, chez le *Polygordius* une même cellule dans le sens transversal participe à l'édification de plusieurs éléments musculaires, tandis que dans le sens longitudinal plusieurs cellules interviennent dans l'édification d'un même élément musculaire.

Dans la substance intercolumnaire du Lombric il n'est pas possible, par n'importe quelle méthode, de faire apparaître des limites cellulaires; nous avons affaire ici à un stroma granuleux résultant de la fusion du protoplasme d'une quantité de cellules primitivement individualisées dans laquelle il n'est plus possible chez l'adulte de distinguer les limites des territoires cellulaires, mais dans laquelle nous trouvons une quantité de noyaux qui sont les indices de la composition primitivement cellulaire de cette substance intercolumnaire.

Cette substance est plus ou moins abondante suivant la région que l'on étudie; et l'on peut dire jusqu'à un certain point que son développement est en sens inverse de celui des éléments musculaires. Quand ceux-ci sont serrés les uns contre les autres, comme c'est le cas lorsque ces éléments sont disposés en séries radiaires, la substance intercolumnaire est réduite à des lamelles séparant entre elles les colonnes constitutives des séries, et

[1] *Faune et flore du golfe de Naples*, loc. cit.

Digitized by Google

entre deux séries voisines il existe une lame plus épaisse de ce stroma granuleux multinucléé (pl. III, fig. 42 et 43).

Quand les éléments musculaires sont, au contraire, espacés les uns des autres ou répartis en groupes, la substance devient très abondante et prend l'apparence d'un véritable tissu conjonctif, on y trouve des espaces clairs qui ne sont autres que des trouées dans lesquelles circule la lymphe, en d'autres termes, des espaces plasmatiques (pl. III, fig. 46).

On rencontre beaucoup de vaisseaux sanguins dans la couche des muscles circulaires; tous sont délimités par une enveloppe endothéliale dans laquelle on rencontre des noyaux aplatis. Ces vaisseaux présentent sur les coupes des formes très variées, arrondies, ovalaires, etc., suivant l'incidence sous laquelle ils ont été rencontrés par le rasoir.

On trouve également des nerfs sur lesquels j'espère pouvoir revenir plus tard.

Nous remarquerons cependant dès à présent des filets nerveux particuliers qui, venant d'un tronc très volumineux siégeant à la limite entre les deux couches musculaires, se dirigent à peu près perpendiculairement à celui-ci et s'en vont aboutir au voisinage de l'hypoderme (pl. IV, fig. 54).

C'est dans la couche musculaire circulaire que nous trouvons le pigment brun, noirâtre dont il a été question dans l'étude de la cuticule. Il est réparti en plus grande abondance du côté du dos et particulièrement dans le tiers antérieur du corps. Sur les coupes faites de préférence dans les régions où le pigment est abondant on le trouve réparti très irrégulièrement entre les colonnes musculaires sous forme de traînées noires de granulations pigmentaires. Quelquefois on trouve des accumulations de pigment affectant une forme étoilée et au centre desquelles on distingue, quoique rarement, un noyau, ce qui semble démontrer que ce pigment ne se trouve cependant pas distribué irrégulièrement dans la couche, mais que ce pigment se développe dans certaines cellules particulières sans que cependant le territoire de ces cellules soit resté individualisé. Dans les deux tiers postérieurs du corps on ne trouve le plus souvent ce pigment qu'au voisinage de la ligne médio-dorsale.

La plus ou moins grande abondance de ce pigment semble varier assez

Digitized by Google

notablement d'un individu à l'autre et même chez un individu déterminé d'un moment de la vie à l'autre.

Ainsi, il est à remarquer que des individus conservés en vie pendant quelques jours dans une pâte de papier-filtre semblent perdre presque complètement leur coloration foncée et deviennent d'un blanc opalescent; chez des individus conservés dans le marc de café, au contraire, le pigment semble se développer en plus grande abondance.

C'est là un fait qui ne manque pas d'intérêt et qui mériterait d'être examiné de plus près. Ce changement de couleur est-il comparable à celui qu'on observe chez le Protée qui, de blanc qu'il est dans l'obscurité, devient de couleur foncée quand on l'expose à la lumière, ou est-il comparable à celui qu'on observe chez certains poissons qui prennent la coloration du fond de l'eau; c'est une question à laquelle on ne peut répondre dans l'état actuel de nos connaissances.

b) *Muscles longitudinaux.* — Au-dessous de la couche des muscles circulaires se trouve une couche de muscles longitudinaux, cette couche est beaucoup plus épaisse. Elle est plus développée du côté ventral qu'à la face dorsale. Alors que les muscles circulaires forment pour ainsi dire une couche continue, il n'en est pas de même pour les muscles longitudinaux.

Dans cette couche il y a une subdivision nette en plusieurs parties que l'on peut désigner sous le nom de champs musculaires longitudinaux et qui sont les uns plus développés que les autres. Le plus étendu de ces champs se trouve du côté du dos; il occupe tout l'espace compris entre les deux groupes latéraux de soies; c'est le *champ dorsal.* Après lui, le plus développé est le *champ ventral,* qui s'étend d'un groupe de soies ventrales à l'autre. Puis il existe deux *champs latéraux,* situés à droite et à gauche entre les deux groupes de soies. Ensuite nous trouvons quatre champs beaucoup moins développés et situés entre les deux soies de chaque groupe, ce sont les *champs intersétaux.* En fait, on peut distinguer encore aux extrémités droite et gauche du champ ventral une partie distincte que nous appellerons les *champs accessoires* et résultant de ce que les troncs nerveux venant de la chaîne ganglionnaire ventrale pour pénétrer dans la paroi du

Digitized by Google

corps passent entre ces champs accessoires et le champ ventral principal (pl. IV, fig. 52).

Le champ dorsal a son épaisseur minimum sur la ligne médio-dorsale, où il se trouve interrompu au niveau des pores dorsaux ; à partir de la ligne médio-dorsale la couche musculaire longitudinale va s'épaississant insensiblement jusqu'à ses extrémités droite et gauche, où elle se termine par une ligne courbe à convexité dirigée du côté des soies latérales.

Le champ ventral est le plus développé de tous en épaisseur; c'est pour cette raison que par suite de la contraction de cette partie de la couche les individus placés dans l'alcool tendent toujours à s'enrouler en s'incurvant du côté de la face ventrale.

La couche musculaire longitudinale est limitée extérieurement par les muscles circulaires dont elle n'est séparée que par une couche plus ou moins abondante de tissu conjonctif. Vers l'intérieur elle est limitée par la membrane péritonéale qui tapisse la cavité du corps.

Les éléments musculaires présentent dans cette couche une disposition toute particulière et d'une régularité vraiment remarquable en certains endroits. Cette disposition occasionna de la part de *Lankester* une singulière méprise. Voici comment cet anatomiste a décrit cette couche :

« Dans la cuticule du Ver de terre il existe un système de très petits canaux dont il a été brièvement question en traitant du système tégumentaire et qui peut être décrit, soit à propos du mécanisme de la respiration, soit ici, si nous signalons ces conduits comme des pores excréteurs..... Au-dessous de l'épiderme mince et sans structure on voit un tissu quelque peu fibreux, mais plus ou moins homogène, dans lequel est creusé tout un système de canaux d'une extrême finesse, quoique suffisants pour établir une facile communication entre le fluide périviscéral et l'extérieur. Ces canaux se ramifient tout à fait de la même façon que les canaux interstitiels de l'ivoire des dents et présentent une grande ressemblance de forme et de disposition avec les canalicules dentaires.

» Il est difficile de décider si leur communication avec l'extérieur s'établit par l'intermédiaire des pores de la cuticule ou par osmose. Il est hors de

Digitized by Google

doute qu'à travers ces petits canaux que l'on retrouve dans toute l'étendue des segments du Ver de terre l'eau arrive dans la cavité périviscérale et qu'il en sort un fluide plus dense, quoiqu'il semble que les glandes sétigères, que j'ai brièvement signalées dans la première partie de ce travail, sécrètent aussi un fluide de grande densité que le docteur *Williams* a trouvé très avide d'oxygène, propriété qu'il est naturel d'attribuer à la sécrétion muqueuse, mais qu'il m'a été impossible de constater nettement. »

Toute cette théorie de *Ray Lankester* repose sur une interprétation erronée des apparences qu'il a vues dans son microscope; la couche des muscles circulaires a échappé à *Ray Lankester,* qui en fait sa couche pigmentaire.

Claparède, en 1869, dans ses recherches histologiques sur le Ver de terre, donna une description assez détaillée de cette couche musculaire, et c'est elle qui a été confirmée par tous les auteurs jusqu'en 1886, où *Hermann Ude* exprime encore une nouvelle manière de voir.

Voici la description de *Claparède :*

« Dans chaque champ musculaire on trouve une série de rubans musculaires dont la plupart ont presque la longueur de tout le corps. Chaque ruban, nous dit-il, est plutôt un ruban qu'un faisceau. La constitution de ces rubans apparaît nettement sur des coupes transversales du Ver. Ils ont la forme de plumes. L'axe de la plume est représenté par une lamelle dirigée perpendiculairement à la surface du corps, les barbes de la plume sont représentées par des lamelles musculaires obliquement placées à droite et à gauche sur la lamelle centrale. Chaque lamelle musculaire est très longue, son bord interne est fixé à la lamelle centrale, son bord externe reste libre. *Claparède* trouva des vaisseaux sanguins et des muscles courant dans l'épaisseur de la lamelle centrale, et c'est ce qui le porta à décrire ces rubans musculaires comme constitués de deux moitiés symétriques, la lamelle centrale pouvant se dédoubler en deux parties dont chacune porte une série de lamelles latérales. »

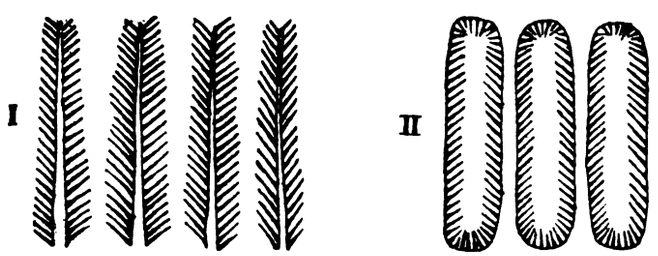
Hermann Ude nous dit qu'au voisinage des muscles circulaires, les lamelles latérales ne quittent pas la lamelle centrale, mais forment une courbe,

Digitized by Google

comme la lamelle elle-même, pour aller se continuer avec la série de lamelles portées par la lamelle centrale voisine. Une image tout à fait semblable apparaîtrait du côté de la cavité du corps.

Notamment sur des coupes transversales d'individus tués par l'eau bouillante et durcis par le liquide de Kleinenberg, il décrit aussi une courbe semblable des lamelles latérales, de sorte que pour *Hermann Ude* ces lamelles latérales, situées entre deux lamelles centrales de Claparède, forment une série fermée de bandelettes musculaires. Ce ne sont plus les lamelles divergentes vers la cavité du corps (*Claparède*), mais les lamelles convergentes vers cette cavité, qui constituent dans leur ensemble un ruban musculaire. Dès lors le nom de lamelle centrale n'a plus de raison d'être, car la lamelle dont il s'agit délimite maintenant extérieurement le ruban musculaire en lui constituant une membrane.

Voici deux schémas, l'un d'après *Claparède :* I, l'autre d'après *Ude :* II.



Disposition des éléments musculaires de la couche longitudinale. — L'arrangement de ces éléments, avons-nous vu plus haut, est réellement en certains endroits d'une régularité vraiment étonnante, et cet aspect nous porterait à admettre *a priori,* avec les auteurs qui se sont jusqu'ici occupés de cette question, que ces éléments, pour être si régulièrement arrangés, sont fixés sur quelque membrane anhiste et transparente, ne prenant pas de matière colorante, que cette membrane soit la membrane centrale de *Claparède* ou la membrane enveloppante de *Hermann Ude.*

En réalité il n'existe ici aucune sorte de membrane, et la disposition des éléments musculaires de la couche longitudinale, pour être plus régulière,

Digitized by Google

n'en est pas moins au fond identique à ce que nous avons décrit pour la couche des muscles circulaires.

La disposition des colonnes musculaires en séries radiaires par rapport à l'axe du corps est parfois d'une régularité excessive dans la couche longitudinale ; mais ce n'est, en somme, qu'une exagération de ce que nous avons vu dans les muscles circulaires, notamment au voisinage des soies. (Comparer, à ce sujet, les figures 42 et 43, planche III.)

Voici quelques raisons d'admettre cette analogie de structure dans les deux couches musculaires : la première, c'est que jamais, avec certitude, je n'ai pu observer l'existence de semblables membranes dans la couche longitudinale pas plus que dans la couche circulaire ; j'ai traité des individus par le procédé de *Ude*, eau bouillante et liquide de Kleinenberg, et je n'ai pas su confirmer sa manière de voir ; il faut d'ailleurs admettre que ce procédé de l'eau bouillante employé pour tuer les Lombrics doit nécessairement avoir de graves inconvénients, car il se produit certes par là des coagulations et contractions qui peuvent, sur les coupes pratiquées ultérieurement, donner des apparences fort trompeuses.

Ce qui tend à prouver que ces membranes enveloppantes de *Ude* ou ces lamelles centrales de *Claparède* n'existent pas, c'est que l'on trouve des muscles radiaires, surtout au niveau des dissépiments, qui traversent la couche des muscles longitudinaux en passant ou bien dans l'axe des caissons de *Ude* ou dans la lamelle centrale de Claparède, puis on trouve des muscles passant obliquement à travers toute une série de rubans musculaires (pl. IV, fig. 55) ; ceci est notamment le cas dans une région déterminée du corps où nous trouvons ce que nous avons appelé des muscles arciformes (pl. II, fig. 38).

Pour les vaisseaux sanguins les mêmes faits se présentent : il en est qui courent entre les séries de lamelles musculaires, aussi bien dans les caissons de *Ude* que dans les lamelles centrales de *Claparède*, et nous en trouvons aussi courant obliquement à travers un, deux ou plusieurs rubans musculaires (pl. IV, fig. 54).

S'il existait donc de véritables lamelles centrales ou extérieures sur lesquelles seraient portées les lamelles des rubans musculaires, ces lamelles

Digitized by Google

centrales ou ces membranes enveloppantes présenteraient des solutions de continuité au niveau de tous ces muscles et de tous ces vaisseaux sanguins dont nous venons de parler.

Ensuite, ces séries radiaires de colonnes musculaires ne sont pas constituées en tout temps par une seule rangée d'éléments, comme cela paraît ressortir des figures de *Claparède* et de *Ude;* mais nous trouvons souvent des séries formées par un nombre très considérable de colonnes musculaires, disposées dans différentes directions et présentant à la coupe les formes les plus variées, qui ne peuvent absolument pas être fixées sur une lamelle, que celle-ci soit centrale ou externe; ceci a lieu notamment au niveau et au voisinage des sillons intersegmentaires (pl. III, fig. 42).

Vers le milieu des segments, surtout dans la région moyenne et postérieure du corps, nous trouvons réellement des séries de lamelles musculaires ayant un aspect rappelant singulièrement les figures de *Claparède;* ces lamelles ont réellement une direction générale oblique vers l'intérieur du corps et leur coupe est souvent aplatie; mais, même dans ce cas, un examen attentif nous montre avec évidence que ces lamelles ne peuvent pas être toutes fixées sur une membrane.

La constitution de cette couche est au fond la même que celle de la couche circulaire; tous les éléments musculaires sont empâtés dans un stroma granuleux, et lorsque la disposition des lamelles ou colonnes musculaires devient régulière, lorsque les séries radiaires apparaissent, c'est que la substance intercolumnaire se trouve accumulée également dans certaines zones radiaires, alternant avec les séries de colonnes musculaires. Cette substance intercolumnaire s'étend aussi partout entre les lamelles musculaires, et lorsque ces lamelles sont serrées les unes contre les autres, la substance granulée se réduit en ces endroits à de minces travées séparant les lamelles les unes des autres. Quand les éléments musculaires sont réunis par groupes, comme cela se présente en certains endroits, notamment aux extrémités du corps, nous retrouvons ce que nous avons vu à propos de la couche circulaire: ces groupes de colonnes musculaires sont entourés de toutes parts par de la substance granuleuse multinucléée plus ou moins abondante, ayant l'aspect

Digitized by Google

d'un véritable tissu conjonctif, et de la surface de chaque groupe d'éléments musculaires partent des travées de substance unissant entre elles les différentes colonnes entrant dans la constitution du groupe considéré.

La structure intime des colonnes musculaires de cette couche est identique à celle des colonnes circulaires. On peut dire en général que les éléments musculaires de la couche longitudinale sont moins épais que ceux de la couche circulaire. Ils sont plus développés au voisinage des muscles circulaires que du côté de la cavité du corps.

Nous avons vu que le diamètre des éléments musculaires de la couche circulaire augmente assez régulièrement de la surface vers la profondeur; dans la couche longitudinale cela se présente en sens inverse, c'est-à-dire que les colonnes musculaires les plus volumineuses se trouvent en dehors, au voisinage des muscles circulaires.

La coupe transversale des colonnes musculaires longitudinales présente la double striation caractéristique que nous avons décrite à propos de la couche circulaire. Cette striation offre ici les mêmes caractères. Dans les éléments assez volumineux du voisinage des muscles circulaires, nous retrouvons au centre des éléments l'espace clair répondant à la substance axiale et à la périphérie, une double striation toujours plus apparente dans une direction que dans l'autre. Dans les éléments moins développés, qui ont le plus souvent dans cette couche une forme aplatie, la striation envahit tout le champ de la coupe transversale de la colonne, la substance contractile s'est développée dans toute l'épaisseur de ces éléments et la striation la plus apparente est toujours celle qui répond au plus petit diamètre. A la coupe transversale d'une de ces colonnes rubanées nous pouvons distinguer deux faces aplaties et deux bords arrondis, et la striation la plus apparente sera toujours celle qui unit une face à l'autre (pl. III, fig. 48, *F*).

En coupe longitudinale nous retrouvons encore la même constitution, et nous ne ferions que répéter dans leur description ce que nous avons dit à propos des éléments de la couche circulaire.

Il en est de même pour ce qui regarde les éléments isolés de cette couche; ce sont des éléments fusiformes souvent aplatis, terminés à leurs extrémités

Digitized by Google

par des pointes plus ou moins effilées et possédant une striation longitudinale très nette.

La substance intercolumnaire présente également les caractères que nous avons appris à lui connaître dans la couche musculaire circulaire : elle est finement granulée et renferme deux sortes de noyaux, les uns plus petits et disséminés irrégulièrement dans la couche, les autres plus grands, mais beaucoup moins nombreux, semblant être plus particulièrement en rapport avec les éléments musculaires. Mais, je le répète, ces noyaux sont réellement trop peu nombreux pour que l'on puisse admettre la présence de semblable noyau près de chaque colonne musculaire.

Dans cette couche le pigment fait complètement défaut, si ce n'est à la partie antérieure du corps, là où la coloration du Ver est la plus marquée. En cet endroit, comme *Claparède* l'a déjà fait remarquer, le pigment n'est pas limité à la couche circulaire, mais sur la ligne médio-dorsale, et un peu à droite et à gauche ce pigment s'avance jusqu'à une certaine profondeur dans la couche des muscles longitudinaux.

Dans cette couche nous trouvons une quantité de vaisseaux sanguins présentant tous une paroi endothéliale ; ces vaisseaux peuvent traverser la couche dans toutes les directions imaginables, mais nous les trouvons principalement dans les zones où le tissu conjonctif est abondant, c'est-à-dire que lorsque les éléments musculaires sont disposés régulièrement en séries, nous trouvons généralement les vaisseaux sanguins entre les séries de colonnes musculaires. Dans les endroits où les colonnes musculaires sont réparties en groupes plus ou moins considérables, les vaisseaux sanguins cheminent entre ces groupes dans toutes les directions ; cependant n'oublions pas que, même lorsque les muscles ont une disposition tout à fait régulière, nous pouvons avoir des vaisseaux traversant obliquement une ou plusieurs séries musculaires.

Les vaisseaux sanguins sont très abondants au voisinage de ce que l'on désigne sous le nom de membrane péritonéale (pl. III, fig. 42 et 43).

Quant à la distribution des nerfs dans cette couche, j'espère pouvoir en parler à propos du système nerveux périphérique ; il faut employer pour

Digitized by Google

cette étude des méthodes histologiques spéciales, car sur les coupes utilisées pour l'étude des couches musculaires il est impossible d'étudier les éléments nerveux.

Aux extrémités du corps cette couche se comporte comme je l'ai représentée planche III, figure 40. Nous voyons qu'à partir du 3e ou 4e segment les éléments musculaires longitudinaux ne forment plus une couche si uniforme que dans le reste du corps; mais les colonnes musculaires quittent cette couche par groupes qui vont en s'atténuant progressivement s'enfoncer dans la couche des muscles circulaires et se terminer le plus souvent au voisinage de l'hypoderme des extrémités du corps.

En somme, cette couche musculaire longitudinale présente la même constitution que la couche des muscles circulaires. La différence essentielle est évidemment la direction des éléments, mais, à part cela, on ne peut donner d'autre définition pour cette couche que pour la couche circulaire. Si nous faisons abstraction de la disposition généralement plus régulière des colonnes musculaires longitudinales, nous pouvons définir les deux couches de la même manière, en disant que ce sont des formations constituées d'un stroma formé de protoplasme granuleux tenant en suspension une quantité de noyaux de deux espèces, mais dans lequel on ne retrouve aucune délimitation de cellules. Des éléments musculaires sont distribués irrégulièrement dans ce stroma ou bien affectent une répartition plus régulière en se rassemblant par groupes plus ou moins nombreux ou en se disposant en séries radiaires qui, dans la couche longitudinale, peuvent affecter une régularité vraiment étonnante. Dans ce stroma, entre les colonnes musculaires, cheminent des vaisseaux sanguins et des nerfs, et l'on trouve, lorsque le tissu conjonctif est abondant, de vrais espaces plasmatiques. Dans la couche circulaire il se développe surtout en certains endroits un pigment qui peut envahir aussi la couche longitudinale lorsqu'il devient très abondant, comme cela se présente presque toujours à la face dorsale de la partie antérieure du corps.

Les éléments musculaires de ces deux couches sont identiques. Ce sont des faisceaux de fibrilles musculaires en tout comparables à ce que *Kölliker*

Digitized by Google

a désigné sous le nom de colonnes musculaires dans un muscle strié de Vertébré, et c'est pourquoi j'ai proposé, dans le courant de ce travail, de désigner les éléments musculaires du Lombric sous le nom de *colonnes musculaires*.

c) *Muscles arciformes.* — Ces muscles ne se rencontrent que dans une région déterminée de la paroi du corps, du 15ᵉ anneau antérieur au 37ᵉ, c'est-à-dire depuis les orifices sexuels mâles jusqu'à l'extrémité postérieure de la ceinture.

Ils se rencontrent à droite et à gauche dans cette partie qui correspond aux *champs latéraux* de la couche musculaire longitudinale, en d'autres termes dans la région comprise de chaque côté de la ligne médiane entre les soies dorsales et les soies ventrales.

Ces muscles décrivent une courbe à convexité dirigée vers la cavité du corps; ils sont groupés en faisceaux plus ou moins volumineux qui, en partant du voisinage de l'hypoderme un peu en dessous du groupe de soies dorsales, traversent la couche des muscles circulaires, courent très obliquement à travers un grand nombre de séries musculaires longitudinales, en décrivant une courbe à très grand rayon, et rentrent ensuite dans la couche musculaire circulaire, pour aller se terminer près de l'hypoderme au voisinage du groupe de soies ventrales (pl. II, fig. 38).

C'est donc dans la concavité délimitée par ces muscles que nous trouvons ce que nous avons appelé les *bourrelets du sillon génital,* qui s'étendent du 15ᵉ au 36ᵉ segment inclus.

Le rôle que jouent ces muscles est naturellement d'accentuer par leur contraction ces bourrelets du sillon, et de cette façon ils amènent, à la face ventrale du Ver, la formation d'une large gouttière.

Lors de l'accouplement, deux individus s'accolent par leur face ventrale, de telle façon que les bourrelets de l'un s'appliquent sur les bourrelets de l'autre, et la gouttière qui règne dans cette région à la face ventrale de l'un des animaux accouplés constitue, avec la gouttière de son compagnon, un canal à travers lequel peut couler le sperme.

Digitized by Google

d) *Muscles des soies et follicules sétigères.* — Chez le Lombric chaque anneau porte, en règle générale, huit soies. Il n'y a d'exception que pour le segment céphalique et ordinairement pour le segment postérieur du corps.

Williams écrit que les soies locomotrices ne commencent qu'au 14e anneau, et comme explication de ce fait complètement erroné il ajoute que les soies, si elles existaient sur les anneaux antérieurs, gêneraient la tête dans les mouvements qu'elle est obligée de faire pour fouir la terre. Cette explication n'a pas de raison d'être, car nous verrons que l'animal peut retirer complètement les soies dans l'intérieur des téguments, et dès lors il n'y a plus de gêne possible pour les mouvements en question.

D'Udekem nie l'existence de soies sur les segments portant les orifices génitaux et de même sur les anneaux de la ceinture; cela n'est pas exact non plus, et s'il arrive que l'on ne retrouve pas les soies ou une partie d'elles sur ces anneaux, ce n'est là qu'un fait accidentel qui peut se présenter partout ailleurs.

Les soies du Lombric sont réparties sur chaque anneau en quatre groupes de deux; de ces quatre groupes, deux sont situés sur les bords de la face ventrale : *groupes ventraux,* les deux autres se trouvent sur les flancs de l'animal, assez rapprochés de la face dorsale : *groupes dorsaux* ou plutôt *dorso-latéraux.*

Les soies ont une couleur jaune-pâle et sont de nature chitineuse. Sous des grossissements suffisants, on leur distingue une striation longitudinale qui est surtout très apparente dans les vieilles soies, usées, qui ont cessé de fonctionner. Ces soies usées tombent dans la cavité du corps où on les retrouve, surtout dans la partie postérieure. Elles s'y rencontrent en nombre quelquefois considérable dans des masses ovoïdes ou arrondies, très granuleuses, qui sont probablement un produit de dégénérescence des anciens follicules.

Ces soies, dis-je, se retrouvent surtout dans les segments postérieurs; il faut en conclure qu'une fois tombées dans la cavité du corps, fût-ce même dans la partie antérieure, ces soies sont entraînées par les liquides circulant dans la cavité périviscérale et arrivent ainsi à l'extrémité postérieure du corps,

Digitized by Google

en passant dans la solution de continuité que présentent les dissépiments ou cloisons intersegmentaires du côté de la face ventrale.

Toutes les soies ne présentent pas la même forme. Ce fait a été signalé en premier lieu par *Ew. Hering*.

La grande majorité des soies ont une forme d'S très allongé, plus ou moins renflé dans sa partie moyenne (pl. I, fig. 5); les deux extrémités sont terminées en pointe obtuse, celle qui est dirigée vers l'extérieur est généralement plus pointue que celle qui est engagée dans les téguments. La partie interne a toujours une coloration plus pâle que l'extrémité distale.

Des soies particulières furent signalées par *Ew. Hering* sur les anneaux 10 et 15, sur le 26e et enfin dans l'étendue de la ceinture; ces faits sont complètement exacts; seulement, comme *Hering* le fait d'ailleurs remarquer, cette localisation n'est pas tout à fait sans exception pour le 15e segment, où l'on peut trouver des soies ordinaires, alors que les soies modifiées se trouvent sur un des segments voisins. La forme de ces soies est bien différente de celle des autres soies. Elles sont plus minces et ont une longueur double, elles sont beaucoup plus droites et l'épaississement médian fait complètement défaut. Leur partie proximale est plus effilée que l'extrémité distale et elles sont entourées dans leur partie interne par une masse glandulaire.

Ces soies sont presque toujours cachées, en ce sens qu'elles restent retirées dans les téguments, alors même que toutes les soies locomotrices proprement dites proéminent fortement à l'extérieur. C'est peut-être ce fait qui a conduit *d'Udekem* à nier l'existence de soies dans l'étendue de la ceinture. Ces soies jouent très probablement un rôle dans la copulation, mais c'est encore là un point à éclaircir par des observations particulières.

Examinons maintenant comment se comportent les différentes couches de la paroi du corps au niveau des soies; quelles sont les parties qui entrent dans la constitution de ce que l'on désigne sous le nom de follicules sétigères et comment se comportent les muscles qui président aux mouvements des soies.

La cuticule au niveau des soies s'invagine vers l'intérieur du corps pour

Digitized by Google

constituer à chaque soie une sorte de fourreau (pl. I, fig. 5). Ces invaginations de la cuticule s'enlèvent avec celle-ci, et l'on trouve souvent des soies restées engagées dans leur gaine cuticulaire. On distingue très nettement cette gaine autour de la soie, jusqu'à une certaine distance du renflement qui se trouve vers le milieu de la soie, mais il est très difficile de suivre cette gaine plus loin vers l'extrémité proximale de la soie. Lorsque les gaines sont arrachées avec la cuticule sans que les soies y restent engagées, elles se brisent toujours, sans exception, à une certaine profondeur, et en ne se basant que sur les deux observations on croirait que l'invagination de la cuticule ne va pas plus loin; il est cependant éminemment probable qu'il faut considérer les soies comme revêtues dans toute leur étendue par une gaine cuticulaire; mais cette gaine devient tellement mince, à partir d'un certain point situé vers le milieu des soies, qu'on ne peut plus la suivre; elle se confond à un moment donné avec la soie qui doit elle-même être considérée comme une production cuticulaire.

L'hypoderme, dans le voisinage des soies, se distingue tout d'abord en ce qu'il ne renferme pas de glandes au pourtour immédiat de la soie; il s'invagine vers l'intérieur en suivant l'inflexion de la cuticule. Les cellules hypodermiques ne forment bientôt plus qu'une assise de cellules cylindriques ou prismatiques, et elles deviennent de moins en moins élevées à mesure que l'on considère un point plus éloigné de la surface du corps. Elles sont bientôt cuboïdes (pl. II, fig. 28), puis leur diamètre transversal l'emporte sur le diamètre longitudinal et elles finissent par s'aplatir fortement en s'appliquant intimement sur l'extrémité interne de la soie. Sur des coupes tangentielles on trouvera, près de la surface du corps : la coupe de la soie au milieu, puis une enveloppe formée par la cuticule et enfin une zone hypodermique constituée par un nombre assez considérable de cellules. A mesure que la série de coupes progresse vers la profondeur, le nombre des cellules hypodermiques diminue considérablement, pour se réduire près de l'extrémité interne de la soie à deux ou trois cellules aplaties ayant à la coupe une forme concave-convexe, leur concavité se moulant sur la soie (pl. IV, fig. 56). En cet endroit la cuticule, qui formait près de la surface

Digitized by Google

du corps un anneau distinct autour de la soie, ne se retrouve plus comme formation spéciale; elle fait ici corps avec la soie proprement dite, et les cellules hypodermiques sont immédiatement appliquées contre la soie.

La couche musculaire circulaire se comporte comme nous l'avons dit précédemment; les colonnes musculaires s'écartent simplement, de manière à délimiter une fente en forme de boutonnière, livrant passage à la soie avec son revêtement hypodermique (pl. II, fig. 28).

Quant aux muscles longitudinaux, ils n'existent pas au niveau des soies; nous avons vu que la couche musculaire longitudinale est subdivisée en champs et que les limites de ces champs sont précisément les places occupées par les soies. Entre les deux soies d'un même groupe il existe un petit champ de muscles longitudinaux, formé de quelques séries de colonnes musculaires, que nous avons désigné sous le nom de champ *intersétal* (pl. IV, fig. 56).

La membrane péritonéale recouvre intérieurement le follicule sétigère et ses dépendances, et entre le revêtement épidermique de la soie et la membrane péritonéale nous trouvons une masse formée de tissu conjonctif, multinucléée, traversée par une quantité d'éléments musculaires.

Cette masse proémine dans la cavité du corps sous forme d'une éminence conique à pointe plus ou moins obtuse. Généralement une seule de ces éminences existe pour un groupe de soies, quelquefois cependant il règne au sommet interne de l'éminence une échancrure plus ou moins profonde, et il existe dès lors une sorte de papille conique pour chaque soie. Les deux cas sont représentés dans la figure 53, planche IV.

C'est dans cette masse conjonctive que l'on distingue presque toujours des jeunes soies à différents stades de développement, destinées à remplacer les soies usées, tombées dans la cavité du corps. On y trouve également des vaisseaux sanguins.

Un follicule sétigère est donc constitué, en allant de dehors en dedans, par :

1° La soie proprement dite;

2° Un revêtement cuticulaire distinct jusqu'à une certaine profondeur, se confondant avec la soie dans sa partie interne;

3° Une couche hypodermique constituée de cellules protoplasmiques avec

Digitized by Google

noyaux ; ces cellules s'aplatissent de plus en plus à mesure qu'on s'approche de l'extrémité proximale de la soie.

Ensuite, comme se rattachant au follicule :

4° Une masse conjonctive avec beaucoup de noyaux, richement vascularisée, traversée par une multitude d'éléments musculaires qui président aux mouvements de la soie, et, enfin,

5° Un revêtement péritonéal.

Muscles des soies. — Nous devons distinguer deux catégories de muscles présidant aux mouvements des soies, les uns ayant pour fonction de faire proéminer la soie au dehors ou de lui imprimer des mouvements dans tous les sens, les autres ayant pour fonction principale de retirer la soie dans l'épaisseur des téguments.

Les premiers ont été décrits par tous les auteurs avec plus ou moins d'exactitude, les seconds semblent avoir échappé à beaucoup d'investigations, car *Claparède,* par exemple, ne les décrit pas, et *Perrier,* en parlant de la faculté qu'ont les Lombrics de retirer les soies dans l'épaisseur des téguments, nous dit que « les muscles des soies sont incapables de faire rentrer celles-ci à l'intérieur du corps, mouvement que le Lombric exécute souvent et dont aucun auteur jusqu'ici n'a donné l'explication ».

Les muscles servant à faire sortir les soies et présidant aux mouvements d'oscillation dans tous les sens s'insèrent tous à l'extrémité interne du revêtement hypodermique de la soie ou près de cette extrémité. A partir de ces points ils vont s'irradiant dans tous les sens, passent dans les interruptions longitudinales que nous avons trouvées dans la couche des muscles longitudinaux et pénètrent ensuite dans la couche des muscles circulaires (pl. IV, fig. 53).

On peut obtenir des vues générales très satisfaisantes de la disposition générale des muscles des soies en procédant comme suit : on tue un Lombric par la méthode du curare, puis on le durcit par le liquide de Flemming ; quand les tissus sont bien fixés, on traite par les alcools successifs.

Ensuite on prend vers le milieu du corps un morceau d'un centimètre

Digitized by Google

de long, et d'un coup de rasoir on enlève de ce morceau cette partie de la paroi du corps dans laquelle se trouvent implantées les deux séries de soies d'un même côté, c'est-à-dire qu'on enlève la partie droite ou la partie gauche qui s'étend depuis la ligne médio-ventrale jusque immédiatement au-dessus des groupes de soies dorso-latérales.

On traite ce lambeau détaché par l'alcool absolu, puis on éclaircit longtemps à l'essence de clous de girofle. On place l'objet sur une lame de verre et l'on ajoute une quantité suffisante de baume; on le recouvre d'une lamelle, après avoir eu soin de placer de chaque côté de l'objet un petit morceau de liège de même épaisseur environ, afin d'éviter l'écrasement.

On place l'objet de telle façon que la face interne de la paroi du corps soit tournée vers l'observateur. Les tissus prennent dans le liquide de Flemming une coloration jaunâtre, permettant cependant d'étudier la disposition des muscles des soies par transparence, chose impossible sur le frais ou sur des tissus traités par des matières colorantes proprement dites.

Nous obtiendrons de la sorte une image comme celle représentée planche IV, figure 53. Cette figure représente l'étendue de deux segments d'une semblable préparation. Nous y trouvons quatre groupes de soies. Deux de ces groupes comprennent chacun deux grandes soies en activité (*s. f.*), les deux autres ne renferment plus qu'une de ces grandes soies, leur congénère étant usée, tombée dans la cavité du corps. De plus, nous trouvons au voisinage de chaque groupe, du côté de la cavité du corps, des soies nouvelles en voie de développement (*j. s.*), à des stades très différents de leur accroissement, destinées à remplacer les vieilles soies hors de service.

Les muscles dont nous nous occupons pour le moment partent d'un point unique ou de deux points différents, suivant que l'éminence qui répond au groupe considéré se termine du côté de la cavité du corps par une saillie unique ou par deux saillies coniques séparées par une échancrure.

Tous ces muscles s'irradient à partir de ce ou de ces points et se dirigent dans tous les sens, surtout en avant et en arrière; ils sont toujours rassemblés pas faisceaux plus ou moins considérables, passent dans les interruptions de la couche musculaire longitudinale et pénètrent dans la couche des muscles circulaires.

Digitized by Google

Si nous pratiquons des coupes parallèles à la surface du corps et passant par les groupes de soies, nous aurons des images comme il s'en trouve une représentée à la planche IV, figure 56.

Dans cette figure nous trouvons la coupe des deux soies d'un groupe, entourées d'un revêtement hypodermique, puis, dans l'espace délimité par les champs musculaires longitudinaux nous trouvons les muscles radiaires des soies coupés transversalement ou obliquement suivant la direction sous laquelle le rasoir les a rencontrés. Ces muscles s'étendent en avant et en arrière, jusque près des limites du segment, à droite et à gauche des soies; ils ne s'éloignent à ce niveau que très peu des soies. On obtient des images confirmant cette disposition sur des coupes transversales et longitudinales de la paroi du corps.

On est loin d'être d'accord sur la question de savoir de quelle couche musculaire de la paroi du corps dépendent les muscles des soies, ou s'ils sont indépendants de ces couches.

Ratzel, entre autres, a prétendu que les muscles des soies devaient être considérés comme faisant en quelque sorte partie de la couche musculaire longitudinale. Cette opinion ne peut plus être admise aujourd'hui, car nous avons déjà vu plus haut qu'au niveau des soies la couche musculaire longitudinale se trouve interrompue par des sillons très accusés, surtout au niveau des soies, et que les muscles présidant aux mouvements des soies sont tout à fait indépendants de la couche musculaire longitudinale.

On ne rencontre jamais de muscles des soies passant entre les séries de muscles longitudinaux des champs dorsal, ventral ou latéraux. Quant aux champs intersétaux, il peut arriver, quoique ce soit loin d'être la règle, que des faisceaux de muscles radiaires des soies passent dans ces petits champs entre les séries de colonnes, mais ces muscles des soies ne s'arrêtent jamais dans l'épaisseur de la couche longitudinale, ils la traversent toujours pour pénétrer dans la couche circulaire.

Aujourd'hui on s'accorde généralement à dire que les muscles des soies proviennent de la couche des muscles circulaires. Cependant *Vejdovsky* fait remarquer à ce propos que cette manière de voir ne se laisse pas confirmer embryologiquement, d'après ce que l'on connait du développement chez

Digitized by Google

d'autres Oligochètes. Il semblerait plutôt que l'on doive considérer les muscles des soies comme une formation à part, se développant indépendamment des couches musculaires longitudinale et circulaire de la paroi du corps.

Voici, en fait, comment les muscles des soies se dirigent chez l'espèce qui nous occupe, à l'état adulte.

Les muscles radiaires des soies, en partant de l'extrémité interne de la soie ou du voisinage de cette extrémité, se dirigent dans tous les sens vers l'extérieur. Ils s'écartent surtout de la soie en avant et en arrière. Tous ces muscles passent dans l'interruption que présente la couche musculaire longitudinale au niveau de chaque soie, ils sont donc complètement indépendants de cette couche longitudinale; nous avons vu cependant qu'on peut trouver des faisceaux de muscles des soies passant à travers des champs longitudinaux intersétaux, mais ici, comme c'est le cas pour tous, les muscles radiaires des soies ne s'arrêtent jamais dans l'épaisseur de la couche longitudinale, mais vont tous s'engager dans la couche circulaire, dans laquelle ils s'enfoncent plus ou moins profondément en divergeant de plus en plus. Ils sont rassemblés en faisceaux plus ou moins volumineux et sur des coupes transversales ou longitudinales de la paroi du corps on peut très souvent les suivre jusqu'au voisinage immédiat de l'hypoderme.

Il en résulte que la plupart de ces muscles radiaires des soies s'insèrent d'une part au revêtement hypodermique de l'extrémité proximale de la soie, d'autre part à la face profonde de l'hypoderme de la surface du corps. Il en est cependant qui ne s'étendent pas jusqu'au voisinage de l'épiderme, mais qui se terminent entre les éléments musculaires de la couche circulaire en un point quelconque de l'épaisseur de cette couche.

De plus, il existe une région du corps dans laquelle les coupes transversales démontrent avec la plus grande évidence que des muscles radiaires des soies font réellement partie de la couche musculaire circulaire, c'est le cas dans cette partie de la paroi du corps où se trouvent les muscles arciformes que j'ai décrits plus haut (pl. IV, fig. 49).

Il faut conclure de là que les muscles des soies sont, dans la grande majorité des cas, indépendants des couches longitudinale et circulaire de la paroi

Digitized by Google

du corps et qu'ils doivent être considérés comme une formation spéciale, comme une catégorie de muscles à part. Que les muscles longitudinaux n'interviennent jamais, mais qu'il peut se faire que des muscles circulaires, en s'infléchissant vers l'intérieur, contribuent à former une partie des muscles radiaires des soies.

Quant à la deuxième espèce de muscles présidant aux mouvements des soies, et servant particulièrement à retirer celles-ci dans l'épaisseur des téguments, ces muscles siègent vraiment dans la cavité du corps, de sorte que chez l'adulte ils apparaissent complètement indépendants du tube musculo-cutané.

Ces muscles siègent à droite et à gauche de la ligne médiane et constituent dans chaque segment deux gros faisceaux musculaires, l'un à droite, l'autre à gauche.

Chaque faisceau préside aux mouvements de deux groupes de soies. C'est un énorme faisceau constitué d'un nombre considérable de colonnes musculaires, recouvert d'une dépendance de la membrane péritonéale qui, au voisinage de chaque groupe de soies, se continue avec le revêtement péritonéal de la cavité périviscérale.

Cet énorme faisceau musculaire, arrivé au voisinage des groupes de soies auxquels il correspond, se divise en deux, chaque soie de chaque groupe recevant une partie des éléments musculaires du faisceau (pl. IV, fig. 53).

Cette subdivision du faisceau en deux peut se faire plus ou moins vite; il peut même se faire que l'on ait en quelque sorte deux faisceaux au lieu d'un, chacun des deux desservant deux soies; dans ce cas chaque partie du faisceau est individuellement enveloppée par une dépendance de la membrane péritonéale.

Les éléments musculaires du faisceau s'engagent dans l'épaisseur de la paroi du corps pour aller s'insérer au revêtement hypodermique des soies auxquelles ils correspondent; ils s'insèrent vers le milieu de la longueur des soies, au voisinage de l'épaississement que celles-ci présentent à leur milieu.

Telle est la disposition des muscles présidant aux mouvements des soies, et de cette façon on s'explique aisément tous les mouvements que le Lombric peut imprimer à ses soies.

Digitized by Google

Les muscles radiaires en se contractant simultanément, en prenant leur point d'attache au voisinage de l'hypoderme de la surface du corps, font proéminer la soie au dehors; en se contractant seulement en un point déterminé du pourtour de la soie, ils dirigent la pointe externe de la soie vers un point diamétralement opposé; c'est-à-dire que si le Ver contracte dans un segment donné les muscles radiaires se trouvant en avant des soies, les pointes externes de celles-ci se dirigeront en arrière. C'est là le mouvement qui se fait constamment pendant la progression de l'animal quand il veut en quelque sorte s'accrocher aux corps étrangers.

Quant à la seconde catégorie de muscles des soies, elle sert à leur imprimer un mouvement se faisant en deux temps : le premier effet de leur contraction c'est de rapprocher les extrémités proximales des soies appartenant aux groupes situés d'un même côté de la médiane, le second est de faire rentrer ces soies dans l'épaisseur des téguments.

La structure intime des éléments musculaires se rattachant aux soies est encore une fois la même, c'est-à-dire que nous avons encore affaire ici à des colonnes musculaires.

D. Membrane péritonéale.

La membrane péritonéale du Lombric tapisse la cavité du corps dans toute son étendue; elle recouvre intérieurement la couche musculaire longitudinale, revêt extérieurement le tube digestif et tapisse en avant et en arrière les cloisons intersegmentaires. Elle se réfléchit de façon à recouvrir les différents organes logés dans la cavité du corps.

Si l'on traite un morceau de la chaîne ganglionnaire par la méthode du nitrate d'argent, cette membrane péritonéale, vue de face, apparaît comme un épithélium parimenteux. Les cellules qui la constituent sont polygonales et renferment vers leur milieu un noyau. Sur une coupe de la paroi du corps ces cellules sont aplaties, leur noyau allongé; elles apparaissent bien délimitées du côté de la cavité du corps, mais du côté de la couche musculaire longitudinale, le protoplasme de ces cellules semble se confondre insensible-

Digitized by Google

ment avec la substance granulée intercolumnaire. Ce fait tend à prouver que cette membrane péritonéale chez le Lombric doit se développer à la façon de ce qui est connu chez d'autres Annélides, notamment chez le *Polygordius*.

Nous reviendrons plus tard sur les modifications de cette membrane péritonéale en certains endroits, notamment sur une grande étendue du tube digestif où elle a donné naissance à la *couche chloragogène* (*Morren*).

Digitized by Google

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. — Cuticule, vue de face; dans la partie antérieure du corps, vers le milieu de la longueur d'un segment. Les orifices de glandes (*o. gl.*) sont relativement rares en cet endroit. On y trouve des îlots de fins pores (*o. t.*) répondant à des organes de sens siégeant dans l'hypoderme. Les deux systèmes de stries (*str.*) se coupent à angle droit, toutes les stries font avec l'axe longitudinal du corps un angle de 45°.

Fig. 2. — Aspect que présente la cuticule, vue de face, dans la région des organes sexuels ou en arrière de la ceinture. Les orifices glandulaires (*o. gl.*) sont ici plus nombreux.

Fig. 3. — Dans la région de la ceinture les orifices glandulaires sont excessivement nombreux, ce qui est en rapport avec le nombre considérable de glandes développées dans l'hypoderme modifié de cette région du corps.

Fig. 4. — Morceau de cuticule dilacéré au moyen d'aiguilles fines, après longue macération dans l'alcool au tiers. Sur les bords on aperçoit des faisceaux isolés de substance cuticulaire.

Fig. 5. — Fragment de la cuticule, montrant une soie restée engagée dans sa gaine lors de l'enlèvement de la cuticule. Sous ce faible grossissement les orifices glandulaires apparaissent comme une quantité de petits points noirs quand on met au point le plan superficiel de la cuticule.

G. s. Gaine de la soie, constituée par une invagination de la cuticule.

S. Soie, présentant la forme caractéristique d'un S allongé.

Fig. 6. — Réseau à mailles polygonales, que l'on trouve à la face interne de la cuticule quand la macération n'a pas été suffisamment prolongée. On y trouve quelques orifices glandulaires (*o. gl.*) qui se trouvent toujours sur le trajet des travées délimitant les mailles du réseau. Ces orifices ont un double contour quand les glandes ont été brisées à quelque distance de la cuticule et que leur partie superficielle est restée adhérente à la face interne de la cuticule.

Digitized by Google

FIG. 7. — Ce même réseau, dans une région où les glandes n'existent pas dans l'hypoderme, comme c'est le cas au voisinage des sillons intersegmentaires. On ne trouve pas ici d'orifices glandulaires et les mailles sont parfaitement polygonales.

FIG. 8. — Coupe dans laquelle la cuticule se montre constituée de deux assises. On remarque les pores en canalicules qui traversent la cuticule en y produisant une striation normale à la surface.

FIG. 9. — Cellule hypodermique superficielle isolée, après macération dans l'alcool au tiers. Une extrémité bombée dans l'étendue de laquelle les granulations du protoplasme arrivent à la surface; un certain nombre de prolongements à l'extrémité profonde. Cette cellule présente latéralement trois prolongements aliformes. Trois coupes transversales de cette cellule (α, β, γ) nous montrent la forme que présente semblable cellule à différents niveaux. En β, la coupe passe par le noyau et la coupe a l'apparence d'une étoile à trois branches.

FIG. 10. — Glande hypodermique en partie isolée. Deux cellules protoplasmiques du type de la figure 9 y sont restées adhérentes. Cela nous montre comment les ailes latérales de ces cellules recouvrent la glande, en d'autres termes, comment la glande est logée dans les excavations latérales des cellules hypodermiques.

FIG. 11. — Cellule hypodermique cylindrique ou prismatique; cette forme se rencontre dans les endroits où l'hypoderme s'amincit, par exemple au voisinage des sillons intersegmentaires.

FIG. 12. — Cellule hypodermique basilaire ou de remplacement. Elle affecte une forme de massue, la pointe dirigée vers la surface s'insinue entre les cellules superficielles.

FIG. 13. — Glande hypodermique, à gros corpuscules, en voie de développement; elle est encore fermée du côté de la surface du corps.

FIG. 14. — Autre forme de glande en voie de développement; elle est terminée en pointe effilée du côté de la cuticule.

FIG. 15. — Cellule isolée de l'hypoderme de la partie antérieure du corps. Elle présente à sa base un grand nombre de prolongements terminés en pointe.

FIG. 16 et 17. — Deux formes glandulaires, dites *à pied* (*gestielte Drüsenzellen*).

Dans la seconde, le protoplasme et le noyau se trouvent dans la partie profonde, séparée par un étranglement du reste de la cellule. Cet étrangle-

Digitized by Google

ment peut se trouver à des hauteurs variables, mais ne dépasse cependant pas le tiers inférieur de la glande.

Fig. 18. — Cette figure représente l'extrémité antérieure (quarante premiers segments) d'un Lombric couché sur le flanc gauche.

B. Partie antérieure des bourrelets du sillon génital, du 15e au 32e segment.

T. p. Partie postérieure de ces bourrelets, répondant aux *tubercula pubertatis* de *Ude*. Du 33e au 36e segment. Entre ces bourrelets règne le sillon génital. Du 32e au 37e segment règne la ceinture (*s. str.*).

♂ Orifices sexuels mâles (15e segment).

♀ Orifices sexuels femelles (14e segment).

1. Segment céphalique.

2. Orifice buccal.

R. s. Orifices des réceptacles séminaux; ils se trouvent dans les sillons séparant les segments 9, 10 et 11.

Cr. Crête qui règne au milieu de la longueur des segments du Ver de terre. Sur le trajet de cette crête sont insérées les soies.

O. s. Orifices segmentaires.

Fig. 19. — Coupe transversale de l'hypoderme. La coupe passe par un follicule sétigère (*f. s.*) et l'on trouve au voisinage de ce follicule un organe tactile (*o. t.*); on s'aperçoit immédiatement de la présence de ces organes de sens parce que les noyaux siègent à un niveau intermédiaire entre les deux séries de noyaux des cellules hypodermiques ordinaires.

A travers de fins pores de la cuticule, proéminent au dehors des prolongements protoplasmiques des cellules constitutives de l'organe de sens.

PLANCHE II.

Fig. 20. — Glande hypodermique à gros corpuscules, ne présentant ni échancrure ni étranglement; le noyau appliqué contre le fond présente une forme semi-lunaire à la coupe optique et se colore uniformément.

Fig. 21 et 22. — Deux autres formes de glandes.

Fig. 23. — Glande, vue par le fond, suivant le grand axe, il s'agit d'une glande telle que celle représentée dans la figure 20. Le noyau a un aspect lobulé.

Fig. 24. — Coupe transversale de l'hypoderme dans une région glandulaire. Nous trouvons deux assises de cellules, des cellules superficielles (*c. s.*) et des cellules basilaires (*c. b.*). Nous y voyons aussi les deux sortes de glandes, les unes à gros corpuscules (*gl. g. c.*), les autres finement granulées (*gl. f. g.*). Ces glandes s'ouvrent à la surface du corps par des canaux qui traversent la cuticule (*o. gl.*).
Cut. Cuticule.

Digitized by Google

FIG. 25. — Coupe tangentielle ou parallèle à la surface du corps. La coupe passe à mi-hauteur environ de la couche hypodermique. On y retrouve les deux sortes de glandes et les cellules hypodermiques superficielles coupées dans la région des noyaux.

FIG. 26. — Diagramme longitudinal de l'hypoderme dans l'étendue d'un segment.
S. i. Sillons intersegmentaires.
Cr. Crête que l'on trouve au milieu du segment.

FIG. 27. — Coupe longitudinale d'une ceinture incomplètement développée. On y voit encore par-ci par-là les limites de l'ancien hypoderme ; il existe encore assez bien de cellules protoplasmiques.

FIG. 28. — Coupe tangentielle passant par un groupe de soies, dans l'épaisseur de la couche musculaire circulaire. Les éléments s'écartent uniquement de la quantité nécessaire pour livrer passage aux follicules sétigères.
S. s. Soies.
Env. Enveloppe épithéliale, constituée par une invagination de l'hypoderme.
V. Vaisseau sanguin.

FIG. 29. — Coupe transversale dans la région de la ceinture, du côté du dos.
Cut. Cuticule.
G. g. c. Glandes à gros corpuscules, formant l'assise périphérique.
G. f. g. Glandes finement granulées formant l'assise profonde.
Cl. Cloison séparant entre elles les colonnettes de glandes.
M. c. Muscles circulaires. L'arrangement des glandes finement granulées apparaît nettement sur cette coupe. Il n'y a pas de cellules protoplasmiques persistant dans cette partie de la ceinture.

FIG. 30. — Coupe tangentielle de cette même région de la ceinture ; la coupe passe au fond des colonnettes, au voisinage immédiat des muscles circulaires. On ne trouve dans les colonnettes que des glandes finement granulées, coupées toutes dans leur partie renflée, au niveau du noyau ou au niveau du produit de sécrétion.
Cl. Cloison conjonctivo-musculaire.
Col. Coupe du fond d'une colonnette de glandes.
M. c. Muscles circulaires.

FIG. 31. — Coupe tangentielle de la ceinture, encore dans la même région ; mais cette fois la coupe passe à mi-hauteur environ de la couche hypodermique. On y voit des polygones plus ou moins réguliers qui sont la coupe des colonnettes de glandes finement granulées. Ces polygones sont délimités par les cloisons conjonctivo-musculaires. Dans ces polygones apparaissent les glandes coupées à des niveaux très différents, les unes au niveau de leur renflement profond, les autres au niveau de leur fin canal excréteur.

Digitized by Google

Fig. 32. — Coupe transversale de la ceinture au niveau de la partie postérieure des bourrelets du sillon génital. On y trouve trois sortes de glandes. Les cloisons conjonctivo-musculaires sont ici plus épaisses et on rencontre quelques capillaires sanguins (*c. s.*), qui s'avancent jusqu'à la limite de l'ancien hypoderme, puis se replient en anse pour retourner vers la profondeur.

On trouve aussi par-ci par-là une cellule hypodermique ordinaire.

Fig. 33. — Coupe transversale de la ceinture au niveau du 34e segment. Les traits marquent la limite des différentes régions que l'on doit y distinguer.

A, *B*, *C*, première région ou dorsale.

A, *A'* et *C*, *C'*, deuxième région ou région des bourrelets du sillon génital.

A', *C'*, troisième région ou ventrale, où on a la moindre épaisseur.

Fig 34. — Dessin schématique de la ceinture, du côté du dos, pour montrer comment, en vertu de l'arrangement régulier des glandes, toutes peuvent aller s'ouvrir à la surface du corps dans un espace si restreint.

Fig. 35. — Schéma représentant la disposition des glandes finement granulées dans la région dorsale de la ceinture, pour montrer l'analogie de forme entre la coupe d'un épi d'orge et la coupe de deux demi-colonnettes voisines de cette région de la ceinture.

C. e. Canal excréteur.

E. r. Extrémité profonde renflée.

Cl. Cloison.

Fig. 36 et 37. — Deux glandes à gros corpuscules, isolées.

Fig. 38. — Coupe transversale de la paroi du corps dans la région des muscles arciformes, pour montrer la disposition et le trajet de ces muscles.

Hyp. Hypoderme.

M. c. Muscles circulaires.

M. l. Muscles longitudinaux.

M. a. Muscles arciformes.

PLANCHE III.

Fig. 39. — Coupe longitudinale de la paroi du corps, nous montrant la structure intime de la substance contractile dans quelques colonnes musculaires circulaires, au voisinage immédiat de la couche longitudinale.

M. l. Muscles longitudinaux.

Fig. 40. — Coupe longitudinale et sagittale de l'extrémité antérieure du Ver de terre. La lèvre inférieure est seule représentée en entier.

Digitized by Google

O. b. Orifice buccal.
C. b. Cavité buccale.
Ce dessin tend à montrer comment se termine en avant la couche des muscles longitudinaux, et comment se comportent les muscles circulaires.

FIG. 41. — Quelques colonnes musculaires isolées après macération dans l'acide nitrique à 20 %.

FIG. 42. — Coupe transversale de la paroi du corps, pour montrer l'arrangement en séries radiaires des muscles longitudinaux (*m. l.*). On voit ici avec évidence que ces éléments ne peuvent absolument pas être fixés tous sur ce que *Claparède* et *Ude* ont désigné sous le nom de lamelle centrale ou enveloppante. En dedans nous trouvons la membrane péritonéale (*m. p.*), en dehors, les muscles circulaires (*m. c.*).

FIG. 43. — Coupe longitudinale de la paroi du corps, pour montrer la disposition des éléments musculaires circulaires en séries radiaires, par rapport à l'axe du du corps; cette coupe est faite au voisinage d'un groupe de soies.
Cut. Cuticule.
Hyp. Hypoderme.
M. c. Muscles circulaires.
M. l. Muscles longitudinaux.

FIG. 44. — Coupe longitudinale d'un segment de la région moyenne ou postérieure du corps, du côté du dos, montrant la variation d'épaisseur de la couche circulaire dans l'étendue de ce segment.

FIG, 45. — Coupe longitudinale faite dans le même but, dans la partie antérieure du corps.

FIG. 46. — Coupe transversale, sur laquelle les éléments musculaires longitudinaux se présentent réunis par groupes, entre laquelle la substance intercolumnaire abondante prend l'apparence d'un véritable sinus conjonctif avec espaces plasmatiques (*e. p.*) et vaisseaux sanguins (*v. s.*).
On trouve ici représentés des amas de corpuscules bacilliformes que l'on rencontre un peu partout dans les tissus du Lombric et dans la cavité du corps. Ces corpuscules sont probablement des bacilles et cela nous explique peut-être pourquoi les Lombrics morts se décomposent si rapidement.

FIG. 47. — Coupe longitudinale de la paroi du tube digestif, dans la région du gésier ou estomac. La couche musculaire circulaire présente ici une forte épaisseur, et les éléments y affectent une disposition tout à fait caractéristique et d'une régularité remarquable.
M. p. Membrane péritonéale.
M. l. Muscles longitudinaux.

Digitized by Google

M. c. Muscles circulaires.
E. i. Épithélium intestinal.
C. Cuticule assez épaisse que l'on rencontre dans cette partie de la cavité digestive.
E. s. Espaces sanguins.

Fig. 48. — Quelques formes que présente la coupe transversale de colonnes musculaires de la paroi du corps.
A, B, C, D, E, dans la couche circulaire;
F, G, dans la couche longitudinale.
S. c. Substance contractile.
S. a. Substance axiale.

Fig. 49. — Cette structure des éléments musculaires toujours évidente dans les muscles du gésier. Une partie de la coupe, figure 47, à un plus fort grossissement.

Fig. 50. — Coupe transversale de la paroi du corps, montrant avec évidence que des muscles de la couche circulaire peuvent intervenir pour constituer des muscles radiaires des soies.
S. Soie.

PLANCHE IV.

Fig. 51. — Vue d'une préparation obtenue par deux sections opérées l'une en avant, l'autre en arrière d'une cloison intersegmentaire, dans la partie postérieure du corps.
1, 2, 3, 4. Groupes de soies : *1 et 2,* dorsaux-latéraux, *3 et 4,* ventraux.
Cut. Cuticule.
Hyp. Hypoderme.
M. c. Muscles circulaires.
M. l. Muscles longitudinaux.
M. p. Membrane péritonéale.
C. n. Chaîne nerveuse.
V. s.-i. Vaisseau sous-intestinal.
V. d. Vaisseau dorsal.
C. d. Cavité digestive.

Fig. 52. — Coupe transversale dans la région moyenne du corps. Le tube musculo-cutané est seul représenté ici. Le Ver a la forme caractéristique de l'état de contraction, c'est-à-dire plus ou moins quadrilatérale. Cette figure est faite surtout en vue de montrer les différents champs musculaires longitudinaux.
C. d. Champ dorsal.
C. v. Champ ventral.
C. l. — *C. l.* Champs latéraux.
C. a. — *C. a.* Champs accessoires.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mém. cour. et des Sav. étrangers. — Tome LII.

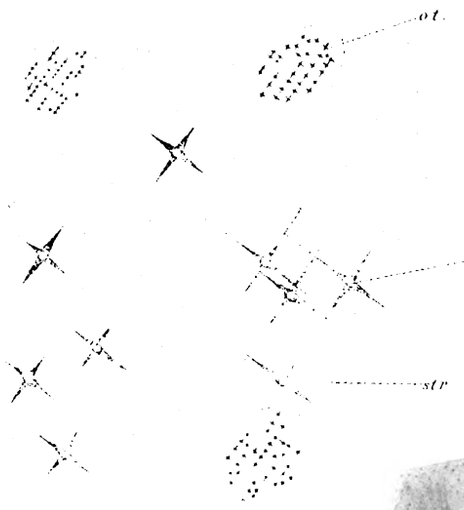


Fig. 1.

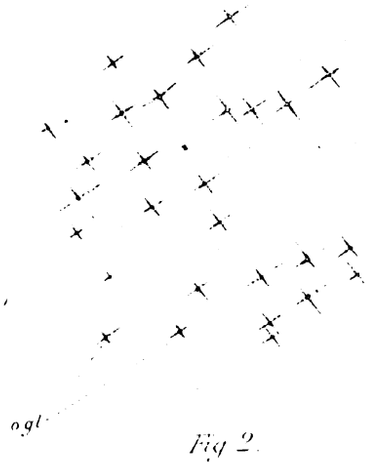


Fig. 2.

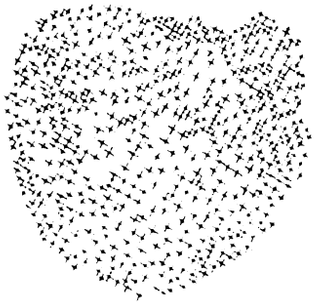


Fig. 3.

Fig. 4.

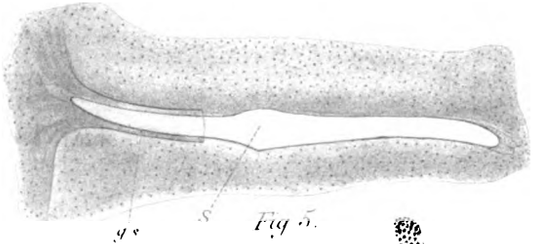


Fig. 5.

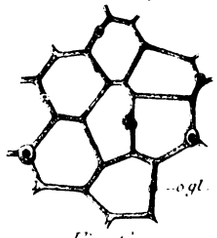


Fig. 6.

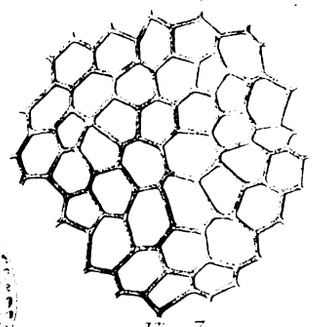


Fig. 7.

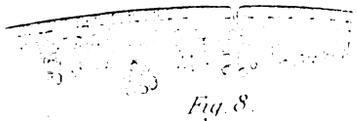


Fig. 8.

Fig. 13.

Fig. 12.

Fig. 14.

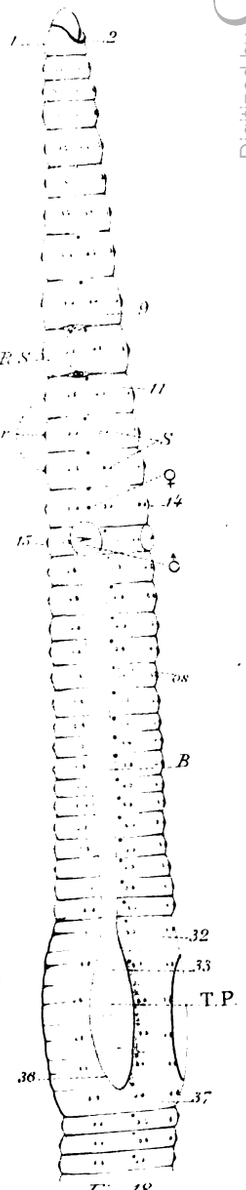


Fig. 18.

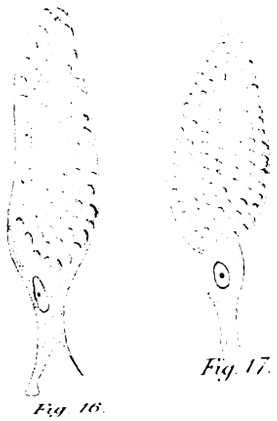


Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 9.

Fig. 11.

Fig. 10.

Fig. 15.

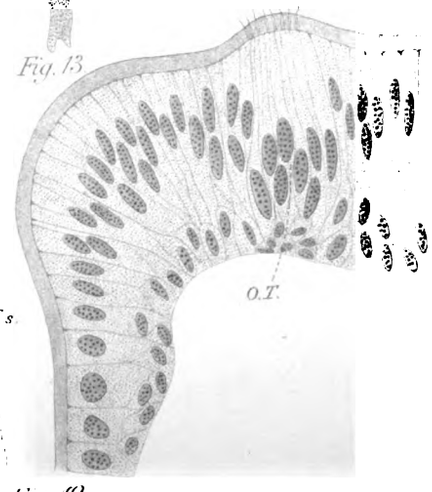


Fig. 19.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mém. cour. et des Sav. étrangers. – Tome LII.

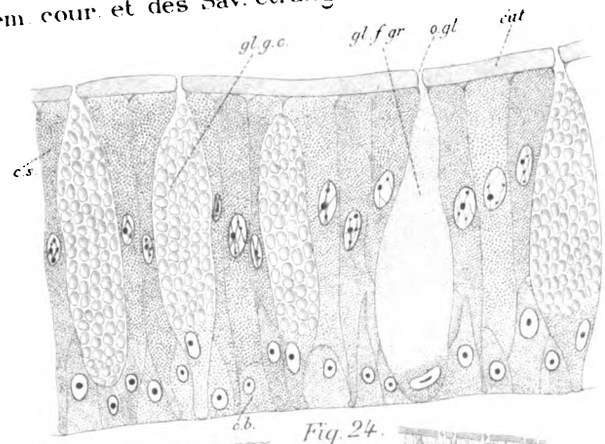


Fig. 24.

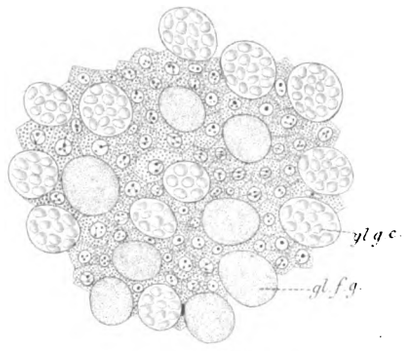


Fig. 25.

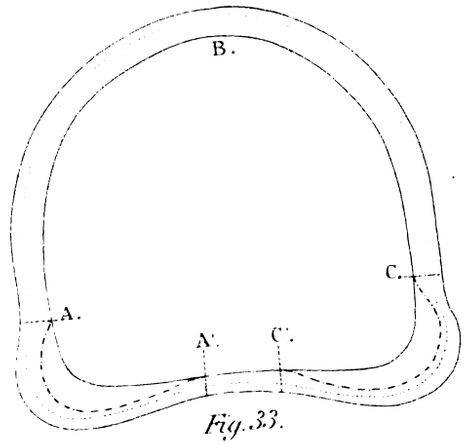


Fig. 33.

Fig. 36.

Fig. 37.

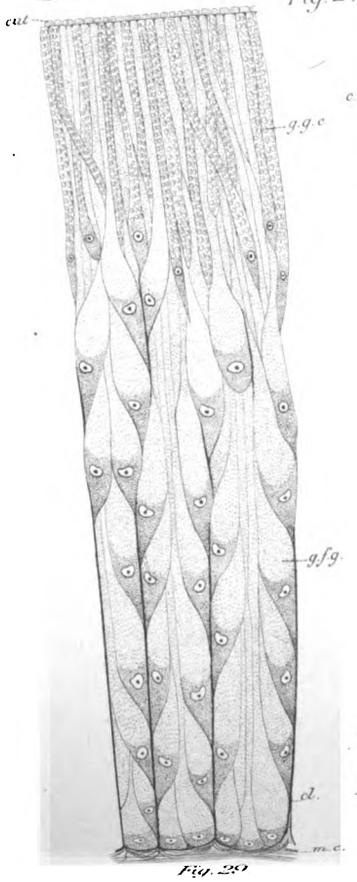


Fig. 29.

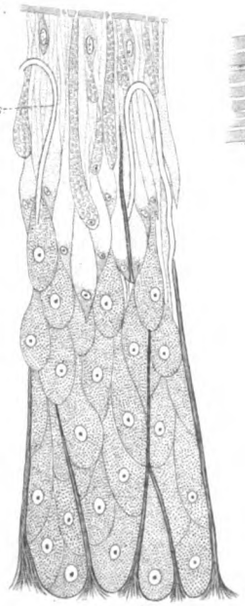


Fig. 32.

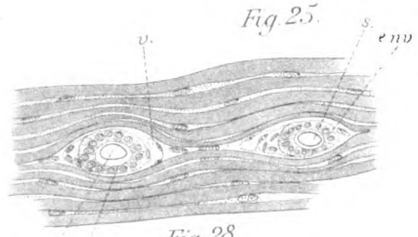


Fig. 28.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

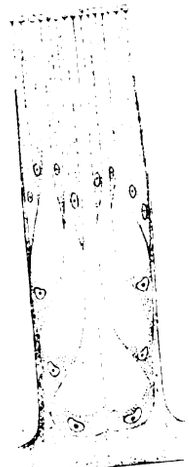


Fig. 34.

Fig. 35.

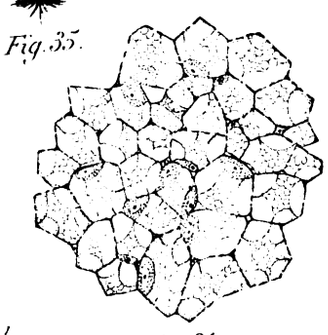


Fig. 31.

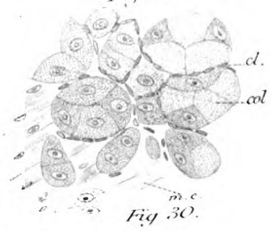


Fig. 30.

Fig. 23.

Fig. 27.

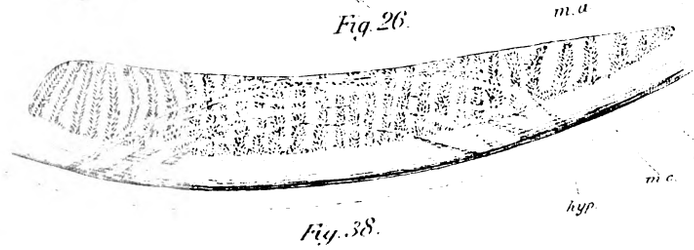


Fig. 38.

Digitized by Google

Digitized by Google

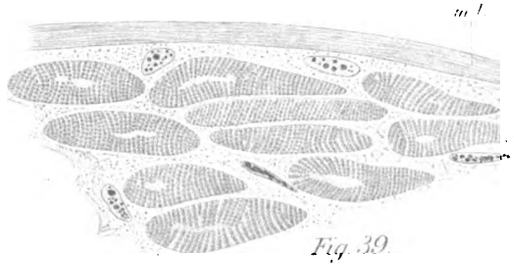


Fig. 39.

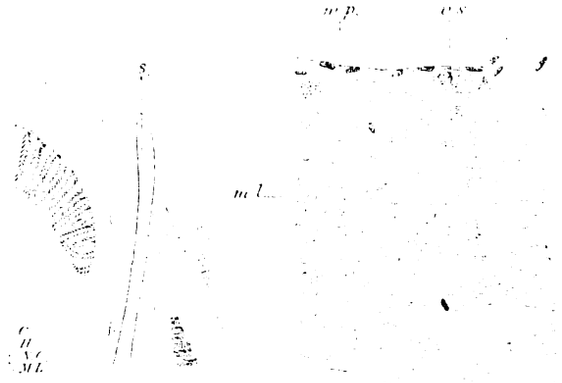


Fig. 50.

Fig. 42.

Fig. 49.

Fig. 40.

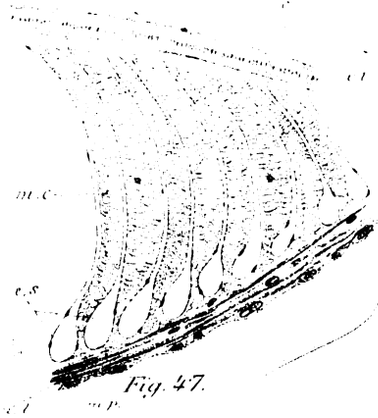


Fig. 47.

Fig. 46.

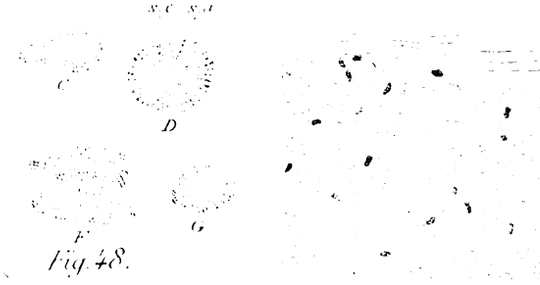


Fig. 48.

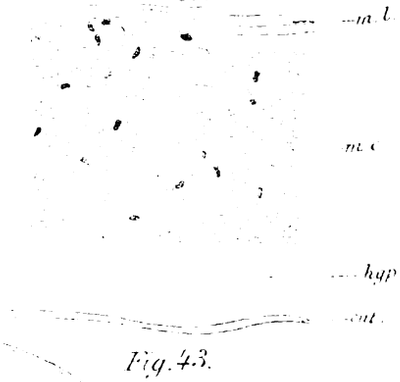


Fig. 43.

Fig. 41.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

Digitized by Google

CA

Digitized by Google

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL;

PAR

J. BEAUPAIN,

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 7 mars 1891.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

1. Dans son rapport sur le Mémoire intitulé : *De quelques formules de calcul intégral* (*), M. Mansion, le savant professeur de l'Université de Gand, nous engage à prouver l'uniformité de convergence de certaines séries dont nous avons fait usage dans ce travail.

Cette démonstration nous paraît d'autant plus nécessaire que ces mêmes développements vont nous permettre de trouver un grand nombre d'intégrales nouvelles. Cette note n'est donc, à proprement parler, que le complément obligé des deux Mémoires que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des sciences de Belgique.

Dans le travail cité plus haut, nous avons considéré les deux séries :

$$(1)\quad \begin{cases} P = \cos\alpha + \binom{p}{1}\cos(\alpha + 2\varphi) + \cdots + \binom{p}{k}\cos(\alpha + 2k\varphi) + \cdots, \\ Q = \sin\alpha + \binom{p}{1}\sin(\alpha + 2\varphi) + \cdots + \binom{p}{k}\sin(\alpha + 2k\varphi) + \cdots, \end{cases}$$

(*) Inséré dans les *Mémoires in-4° de l'Académie royale de Belgique*, t. LI.

Digitized by Google

où nous supposons, une fois pour toutes,

$$p > -1.$$

$\binom{p}{k}$ représente le coefficient binomial $\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k}$.

Soient les deux séries auxiliaires :

$$(2) \quad \dots\dots \quad R = 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \dots + \binom{p}{k} + \dots,$$

$$(3) \quad \dots\dots \quad S = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots,$$

la dernière étant constituée par les modules des termes de la première.

Si k est le nombre entier immédiatement supérieur à p, les termes de la série (2), à partir du terme de rang $k+1$, deviendront alternativement positifs et négatifs.

Soient en outre les deux suites indéfinies :

$$(4) \quad \dots \quad U = \cos(\alpha + 2k\varphi) - \cos\{\alpha + 2(k+1)\varphi\} + \cos\{\alpha + 2(k+2)\varphi\} - \dots,$$

$$(5) \quad \dots \quad V = \sin(\alpha + 2k\varphi) - \sin\{\alpha + 2(k+1)\varphi\} + \sin\{\alpha + 2(k+2)\varphi\} - \dots.$$

On pourra écrire les séries (1) sous la forme :

$$(6) \quad P = \cos\alpha + u_1\cos(\alpha + 2\varphi) + \dots + u_k\cos(\alpha + 2k\varphi) - u_{k+1}\cos\{\alpha + 2(k+1)\varphi\} + \dots,$$

$$(7) \quad Q = \sin\alpha + u_1\sin(\alpha + 2\varphi) + \dots + u_k\sin(\alpha + 2k\varphi) - u_{k+1}\sin\{\alpha + 2(k+1)\varphi\} + \dots.$$

Or, les termes de la série (3) sont positifs et décroissent indéfiniment; les séries (4) et (5) ne sont pas divergentes pour toutes les valeurs de φ, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, cette dernière étant exclue.

Donc, d'après un théorème d'Abel (*), les séries (1) sont uniformément convergentes pour toutes les valeurs de φ, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

(*) Eugène Catalan, *Traité élémentaire des séries*, p. 31.

Digitized by Google

Ainsi que nous l'avons énoncé (*), on a, en série équiconvergente, les deux développements :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^p\varphi\cos q\varphi &= \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi,\\ \cos^p\varphi\sin q\varphi &= \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\sin(q-p+2k)\varphi. \end{aligned}\right.$$

Par intégration et en vertu d'un théorème connu,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^{\varphi}\cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi &= \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{\sin(q-p+2k)\varphi}{q-p+2k},\\ \int_0^{\varphi}\cos^p\varphi\sin q\varphi d\varphi &= -\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{\cos(q-p+2k)\varphi}{q-p+2k}+\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{q-p+2k}, \end{aligned}\right.$$

φ variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$.

Cette hypothèse peut être écartée. Examinons les trois séries :

$$(10)\quad \mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{\sin(q-p+2k)\varphi}{q-p+2k},$$

$$(11)\quad \mathrm{R}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{\cos(q-p+2k)\varphi}{q-p+2k},$$

$$(12)\quad \mathrm{T}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{q-p+2k}.$$

Pour toute valeur de φ, ces séries sont absolument convergentes.

Nous établirons cette proposition en montrant que la série T est absolument convergente.

Soient $k=l+n$ et $p=l-\varepsilon$, l et n étant des nombres entiers et ε une quantité positive comprise entre 0 et 1.

Considérons la série des modules

$$(13)\quad \mathrm{T}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\mathrm{U}_k,$$

(*) *Mémoires in-4° de l'Académie royale de Belgique*, t. LI.

Digitized by Google

où nous faisons :

$$U_k = \text{mod.}\left[\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k}\,\frac{1}{q-p+2k}\right].$$

On peut écrire :

$$U_{k+1} = \frac{(l-\varepsilon)(l-\varepsilon-1)\dots(1-\varepsilon).\varepsilon.(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n\,(n+1)\dots(l+n+1)}\,\frac{1}{q+\varepsilon+l+2n+2}.$$

A partir du terme de rang $l+1$, chacun des termes de la série (13) contiendra le facteur constant $(l-\varepsilon)(l-\varepsilon-1)\dots(1-\varepsilon)$.

Si la série auxiliaire

$$(14)\quad \Sigma = \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots(n+1)}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+2)}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n+2} + \dots$$

est convergente, il en sera de même de la série (13).

J'observe que les termes de cette série (14) peuvent être ainsi décomposés :

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots(n+1)}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n}\,\frac{\varepsilon+n}{n+1}\right]\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n},$$

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots n+2}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n+2}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2\dots(n+1)} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+1)}\,\frac{\varepsilon+n+1}{n+2}\right]\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n+2},$$

. . . . . .

. . . . . .

Considérons donc la nouvelle série :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}\Sigma' = \frac{1}{1-\varepsilon}\Bigg[&\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n}\\ &-\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n}\,\frac{\varepsilon+n}{n+1}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n}\\ &+\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2\dots(n+1)}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n+2}+\dots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Les termes sont alternativement positifs et négatifs, si n est suffisamment grand.

Le premier terme est inférieur au deuxième; le deuxième est moindre que le suivant, si l'on a l'inégalité

$$\frac{\varepsilon+n}{-q-l+\varepsilon+2n} > \frac{\varepsilon+n+1}{-q-l+\varepsilon+2n+2},$$

ou

$$\varepsilon+q+l>0.$$

J'ajoute ensuite que ces termes décroissent indéfiniment.

Écrivons le terme général sous la forme

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+m)}{1.2.3\dots(n+m)}\,\frac{1}{-q-l+\varepsilon+2n+2m} = \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+m-1)}{1.2.3\dots(n+m)}\cdot\left(\frac{\varepsilon+n+m}{-q-l+\varepsilon+2n+2m}\right).$$

$$\lim_{m=\infty}\left[\frac{\varepsilon+n+m}{-q-l+\varepsilon+2n+2m}\right]=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{m=\infty}\left[\mathrm{P}_m\right]=\lim_{m=\infty}\left[\frac{\varepsilon.\varepsilon+1\dots(\varepsilon+n+m-1)}{1.2.3\dots(n+m)}\right]=0.$$

En effet, prenons le logarithme de ce produit indéfini, et soit la série

$$\lg \mathrm{P}_m=\lg\frac{\varepsilon}{1}+\lg\frac{\varepsilon}{2}+\lg\frac{\varepsilon}{3}+\dots+\lg\frac{\varepsilon+n+m-1}{n+m}+\dots. \tag{16}$$

Or,

$$(n+m)\lim_{m=\infty}\left[\mathrm{U}_{n+m}\right]=(n+m)\lim_{m=\infty}\left[\lg\left(1+\frac{\varepsilon-1}{n+m}\right)\right]=\varepsilon-1.$$

Donc la série (16) est divergente et a pour somme $-\infty$; la valeur de P_m a pour limite zéro et la série (15) est convergente.

Ainsi, nous avons transformé la série Σ en une autre Σ', telle que la somme des $2m$ premiers termes de cette série est égale à la somme des m premiers termes de Σ. Or, Σ'_m tend vers une valeur finie et déterminée; il en est de même de Σ_m. Donc la série (13) est convergente et la série (12) est absolument convergente.

Ainsi, pour une valeur quelconque de φ, les séries contenues dans les

Digitized by Google

membres des relations (9) représentent des fonctions uniformes et continues. Il en est de même des intégrales :

$$\int_0^{\varphi} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi, \qquad \int_0^{\varphi} \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi,$$

lorsque φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc, à la limite :

$$(17) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k},$$

$$(18) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = -\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k} + \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k}.$$

2. Il s'agit maintenant de représenter, par des intégrales définies, les sommes des séries

$$S_1 = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k}.$$

Soit

$$S_x = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{x^{\frac{q-p}{2}+k}}{q-p+2k};$$

d'où

$$\frac{dS_x}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{q-p}{2}-1} (1-x)^p dx,$$

puisque la série, formée par les dérivées des termes de S_x, est uniformément convergente, pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1, exclusivement.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{X^{q-p+2k}}{q-p+2k} = \frac{1}{2} \int_0^X x^{\frac{q-p}{2}-1} (1-x)^p dx.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, la série du premier membre est absolument convergente pour toutes les valeurs de X, comprises entre 0 et 1, inclusivement. En conséquence, à la limite

$$(19) \quad \ldots \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1} (1-x)^p dx;$$

Digitized by Google

et, semblablement,

$$(20) \quad \ldots\ldots \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1} (1+x)^p \, dx.$$

Il est donc démontré que les formules énoncées dans le Mémoire déjà cité sont exactes, savoir :

$$(21) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx \, dx = \frac{\sin (q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right),$$

$$(22) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin qx \, dx = -\frac{\cos (q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) + \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1} (1+x)^p \, dx,$$

$$(23) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos qx \, dx = -\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) + \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1} (1+x)^p \, dx,$$

$$(24) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \sin qx \, dx = \frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1} (1+x)^p \, dx.$$

Elles subsistent pour toutes les valeurs de p et q satisfaisant aux inégalités

$$q-p>0, \qquad p>-1.$$

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Dérivées, par rapport aux paramètres p *et* q, *des formules* (21), (22), (23) et (24).

3. La différentiation sous le signe $\int$, par rapport aux paramètres p et q, nous conduira à la détermination de plusieurs intégrales nouvelles.

D'abord, il s'agit de montrer la légitimité de cette opération. Nous ne nous occuperons pas de la formule (21), connue depuis longtemps.

Si p est positif, il n'y a pas de doute qu'on peut soumettre à la différentiation, par rapport à q, les premiers membres des équations (22), (23) et (24).

Si p est négatif, mais toujours plus grand que -1, cherchons la dérivée, par rapport à q, de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\cos^p x}\, dx. \qquad (1 > p > 0)$$

Posons

$$\frac{dI}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{x\cos qx}{\cos^p x}\, dx + \lim_{h=0}\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)x - \sin qx}{h}\,\frac{dx}{\cos^p x}\right],$$

et montrons que

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\lim_{h=0}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)x - \sin qx}{h}\,\frac{dx}{\cos^p x}\right] = 0.$$

Par la formule de Taylor,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)x - \sin qx}{h}\,\frac{dx}{\cos^p x} = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(q+\theta h)x}{\cos^p x}\, dx;$$

d'où

$$\frac{dI}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{x\cos qx}{\cos^p x}\, dx + \lim_{h=0}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(q+\theta h)x}{\cos^p x}\, dx.$$

Digitized by Google

Faisant

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos(q + \theta h)x}{\cos^p x}\, dx,$$

on a

$$\text{Val. abs. } A < \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^p x} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sin \varepsilon} \frac{dz}{z^p \sqrt{1-z^2}}.$$

Or,

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\int_0^{\sin \varepsilon} \frac{dz}{z^p \sqrt{1-z^2}} \right] = 0;$$

par suite, A tend uniformément vers zéro avec ε, et

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\lim_{h=0} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)x - \sin qx}{h} \frac{dx}{\cos^p x} \right] = 0.$$

Ainsi, généralement :

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dI}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^p x \cos qx\, dx. \qquad (p > -1)$$

Semblablement,

$$\frac{dI}{dp} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin qx}{\cos^p x} \mathcal{L} \cos x\, dx - \lim_{h=0} \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{h} \left\{ \frac{\cos^{p+h} x - \cos^p x}{\cos^{2p+h} x} \right\} dx \right];$$

ou, en vertu du théorème de Taylor,

$$\frac{dI}{dp} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin qx}{\cos^p x} \mathcal{L} \cos x\, dx - \lim_{h=0} \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx \mathcal{L} \cos x}{(\cos x)^{p+(1-\theta)h}}\, dx \right].$$

Si l'on pose

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx \mathcal{L} \cos x}{(\cos x)^{p+(1-\theta)h}}\, dx,$$

il vient

$$\text{Val. abs. } A < \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\mathcal{L} \cos x}{(\cos x)^{p+(1-\theta)h}}\, dx = \int_0^{\varepsilon} \frac{-\mathcal{L} \sin x}{(\sin x)^{p+(1-\theta)h}}\, dx = \int_0^{\sin \varepsilon} \frac{-\mathcal{L} x\, dx}{x^{p+(1-\theta)h} \sqrt{1-x^2}}.$$

Digitized by Google

Si l'on choisit h suffisamment petit pour que $p + (1 - \theta)h$ soit inférieur à 1,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{\sin\varepsilon}\frac{\mathfrak{L}x\,dx}{x^{p+(1-\theta)h}\sqrt{1-x^2}}\right]=0.$$

Donc,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\lim_{h=0}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin qx}{h}\left\{\frac{\cos^{p+h}x-\cos^{p}x}{\cos^{2p+h}x}\right\}dx\right]=0,$$

et

$$(26)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{dI}{dp}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p x\sin qx\,\mathfrak{L}\cos x\,dx. \qquad (p>-1)$$

Il nous reste à examiner s'il est permis de différentier soit par rapport à p, soit par rapport à q, la transcendante

$$A=\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\,dx.$$

La légitimité de cette opération n'est douteuse que dans le cas où les paramètres p et q satisfont à l'inégalité

$$\frac{q-p}{2}-1<0.$$

Posons donc

$$(27)\quad \ldots\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{dp}=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\,\mathfrak{L}x\,dx+\int_\varepsilon^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\,\mathfrak{L}(1+x)\,dx \\ \quad+\lim\limits_{h=0}\left[\displaystyle\int_0^\varepsilon\frac{x^{\frac{q-p-h}{2}-1}(1+x)^{p+h}-x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p}{h}\,dx\right], \end{cases}$$

D'après le théorème de Taylor,

$$\int_0^\varepsilon\frac{x^{\frac{q-p-h}{2}-1}(1+x)^{p+h}-x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p}{h}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}(1+x)^{p+\theta h}\,\mathfrak{L}x\,dx$$
$$+\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}(1+x)^{p+\theta h}\,\mathfrak{L}(1+x)\,dx.$$

Digitized by Google

Si p est positif, on a les inégalités

$$\text{Val. abs.}\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}(1+x)^{p+\theta h}\mathcal{L}x\,dx < 2^{p+\theta h}\,\text{Val. abs.}\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}\mathcal{L}x dx,$$

$$\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}(1+x)^{p+\theta h}\mathcal{L}(1+x)dx < 2^{p+\theta h}\mathcal{L}2\int_0^\varepsilon x^{\frac{q-p-\theta h}{2}-1}dx;$$

si p est négatif et qu'on change p en $-p$, on a

$$\text{Val. abs.}\int_0^\varepsilon \frac{x^{\frac{q+p-\theta h}{2}-1}}{(1+x)^{p-\theta h}}\mathcal{L}x dx < \text{Val. abs.}\int_0^\varepsilon x^{\frac{q+p-\theta h}{2}-1}\mathcal{L}x dx,$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{x^{\frac{q+p-\theta h}{2}-1}\mathcal{L}(1+x)}{(1+x)^{p-\theta h}}dx < \mathcal{L}2\int_0^\varepsilon x^{\frac{q+p-\theta h}{2}-1}dx.$$

Si l'on prend h suffisamment petit pour que $q \pm p - \theta h$ soit positif, ce qui est toujours possible, les intégrales

$$\int_0^\varepsilon x^{\frac{q\pm p-\theta h}{2}-1}\mathcal{L}x dx,\quad \int_0^\varepsilon x^{\frac{q\pm p-\theta h}{2}-1}\mathcal{L}x dx$$

tendent uniformément vers zéro, avec ε. En conséquence,

$$(28)\quad \frac{dA}{dp} = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\mathcal{L}x dx + \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\mathcal{L}(1+x)dx.$$

Par une voie analogue à celle-ci, on démontrerait qu'il est permis de soumettre cette intégrale à la différentiation par rapport à q.

4. *Remarque.* — Les développements des fonctions $\varphi\cos^p\varphi\sin q\varphi$, $\varphi\cos^p\varphi\cos q\varphi$, etc., pourraient servir à trouver directement les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cos^p\varphi\sin q\varphi d\varphi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi,\ \text{etc.}$$

Digitized by Google

5. *Dérivées, par rapport à* q, *des équations* (22), (23) *et* (24).
En vertu de ce qui précède, ces dérivées sont :

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos^p \varphi \cos q\varphi\, d\varphi &= \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}\left[\frac{\pi}{2}\sin(q-p)\frac{\pi}{2} - \cos(q-p)\frac{\pi}{2}\mathrm{T}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2^{p+2}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx, \end{aligned} \right.$$

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^p \varphi \sin q\varphi\, d\varphi &= \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}\mathrm{T} \\ &\quad - \frac{\pi}{2}\frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx - \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+2}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx, \end{aligned} \right.$$

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^p \varphi \cos q\varphi\, d\varphi &= \frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}\mathrm{T} \\ &\quad + \frac{\pi}{2}\frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p+2}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx. \end{aligned} \right.$$

$$(32)\quad \mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}\right].$$

Par le changement de p en $-p$ et l'hypothèse de $q = 0$, les égalités (29) et (31) se transforment en les suivantes :

$$(33)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin^p \varphi}\, d\varphi = -\frac{\pi}{2^{3-p}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(p)}\operatorname{cotg} p\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^{2-p}}\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\mathfrak{L}x\,dx,$$

$$(34)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\cos^p \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2-p}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(p)}\frac{1}{\sin p\pi} + \frac{1}{2^{2-p}}\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\mathfrak{L}x\,dx.$$

Digitized by Google

Semblablement,

$$(35)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^2}{\sin^p\varphi}\,d\varphi = \operatorname{tg} p\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{2}\right)}{2^{1-p}\Gamma(p)}\left[\pi^2 - 8\frac{d^2}{dp^2}\,\Sigma\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2^{2-p}}\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma x\,dx;$$

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^3}{\sin^p\varphi}\,d\varphi = -\frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{1-p}}\,\frac{d^2}{dq^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}\,\mathrm{T}\right]_{q=0} \\ \qquad\qquad - 3\frac{\pi^2}{2^{2-p}}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma x\,dx + \frac{1}{2^{2-p}}\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma^3 x\,dx. \end{array}\right.$$

. . . . . .

. . . . . .

On voit ainsi que les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin^p\varphi}\,d\varphi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^2}{\sin^p\varphi}\,d\varphi,\quad \ldots\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^m}{\sin^p\varphi}\,d\varphi$$

sont exprimables au moyen de la fonction gamma, de ses dérivées successives et des transcendantes

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma x\,dx,\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma^3 x\,dx,\ \ldots$$

Ces intégrales sont développables en séries convergentes; car, par la formule du binôme, $(1+x)^r$ est exprimable par une série équiconvergente, pour toutes les valeurs de la variable comprises entre 0 et 1 inclusivement.

Ainsi,

$$(37)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma x\,dx = -4\left[\frac{1}{p^2} - \frac{p}{1}\frac{1}{(p+2)^2} + \frac{p(p+1)}{1.2}\,\frac{1}{(p+4)^2} - \ldots\right].$$

$$(38)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}\,\Sigma^3 x\,dx = 96\left[\frac{1}{p^4} - \frac{p}{1}\,\frac{1}{(p+2)^2} + \frac{p(p+1)}{1.2}\,\frac{1}{(p+4)^2} - \ldots\right].$$

Digitized by Google

6. *Valeur de l'intégrale* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx$.

Remontons au développement de $\frac{\sin qx}{\sin^p x}$:

$$\frac{\sin qx}{2^p \sin^p x} = \cos p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{-p}{k}\sin(q+p+2k)x - \sin p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{-p}{k}\cos(q+q+2k)x,$$

d'où

$$\frac{1}{2^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin qx}{\sin^p x}\,dx = \frac{\pi}{4\sin p\frac{\pi}{2}\,\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)} - \cos q\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{-p}{k}\frac{1}{q+p+2k}.$$

Pour toute valeur de p, comprise entre 0 et 1 (inclusivement), la série

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{-p}{k}\frac{1}{q+p+2k}$$

est uniformément convergente. Le premier membre est aussi une fonction finie et continue de p; donc, à la limite :

$$(39)\quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\cos q\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{1}{q+p+2k},$$

ou

$$(40)\quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos q\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{x^{\frac{q+1}{2}-1}}{1+x}\,dx.$$

D'après Legendre (*),

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{q+1}{2}-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right];$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, t. II, p. 157.

Digitized by Google

donc,

$$(41)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right].$$

De la relation (39) résulte immédiatement la formule

$$(42)\quad \ldots \ldots \ldots \quad \lim_{q=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. — Serret donne la formule (*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1-q}{2}-1} - t^{\frac{1+q}{2}-1}}{1+t}\,dt.$$

Cette égalité suppose $1 > q$, tandis que la formule (41) est générale. Dans l'hypothèse de $1 > q$, on identifie, sans aucune difficulté, ces deux résultats.

Si $q = 2n + 1$, n étant un nombre entier,

$$(43)\quad \ldots \ldots \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si $q = 2n$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx.$$

7. Prenons la dérivée, par rapport à q, des deux membres de la relation (41) :

$$(44)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos qx}{\sin x}\,x\,dx = \pi \sin q\frac{\pi}{2}\,\frac{d}{dq}\left[\mathfrak{L}\frac{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right] - 2\cos q\frac{\pi}{2}\,\frac{d^2}{dq^2}\left[\mathfrak{L}\frac{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right].$$

(*) *Journal de Liouville*, t. VIII.

Digitized by Google

Pour déterminer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x} x dx$, nous procéderons de la façon suivante :

Changeons p en $-p$ dans l'équation (30) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin^p x} x dx = -\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{2-p}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} \right]$$

$$-\pi \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{2-p}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+p}{2}-1}}{(1+x)^p} dx - \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{2-p}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+p}{2}-1}}{(1+x)^p} \mathfrak{L}x dx.$$

Le premier terme du second membre équivaut à

$$-\frac{\pi}{2^{3-p}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma(p)\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} \left[\frac{\frac{\Gamma'\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}}{\cos p\frac{\pi}{2}} \right];$$

et, pour $p = 1$, la valeur de cette quantité sera

$$\frac{\pi}{4} \left[\frac{\frac{1}{2}\frac{\Gamma''\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'^2\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{q+p}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma''\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'^2\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{q-p}{2}\right)}}{\frac{\pi}{2}\sin p\frac{\pi}{2}} \right]_{p=1}.$$

Finalement,

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x} x dx = 2\frac{d^2}{dq^2}\left[\mathfrak{L}\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\right] \\ -\pi\cos q\frac{\pi}{2}\frac{d}{dq}\left[\mathfrak{L}\frac{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right] - 2\sin q\frac{\pi}{2}\frac{d^2}{dq^2}\left[\mathfrak{L}\frac{\Gamma\left(\frac{q+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{4}\right)}\right]. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Actuellement, des formules (44) et (45), on déduira par des différentiations successives les deux suites d'intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x} x^s dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x} x^{s'} dx, \ldots, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x} x^m dx, \ldots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos qx}{\sin x} x^s dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos qx}{\sin x} x^{s'} dx, \ldots, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos qx}{\sin x} x^m dx, \ldots,$$

En particulier, ces mêmes intégrales serviront à déterminer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{\sin x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m \operatorname{cotg} x dx.$$

Ainsi, en vertu de (44),

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos qx}{\sin x} x^s dx &= 2 \frac{d^s}{dq^s} \left[\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \right] + \frac{\pi^s}{4} \sin q\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+s}{2}-1}}{1+x} dx \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \cos q\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+s}{2}-1}}{1+x} lx dx - \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{4} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+s}{2}-1}}{1+x} l^s x dx. \end{aligned} \right.$$

Si $q = 1$,

$$(47) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^s \operatorname{cotg} x dx = \frac{\pi^s}{4} l2 - \frac{1}{2}[S_s + T_s],$$

en posant

$$S_s = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

$$T_s = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots.$$

Si, dans l'équation (44), on fait $q = 0$,

$$(48) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx = 2\left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots\right] = 2\mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{G}$ est la constante de M. Catalan.

Digitized by Google

8. *Remarque.* — Legendre (*) a trouvé les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{\sin x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m \operatorname{cotg} x\,dx.$$

Il est à peu près inutile d'ajouter que la méthode du grand géomètre diffère entièrement de la nôtre.

9. Si, dans les formules (29), (30) et (31), on fait $q = p + 2m$, m étant entier, il viendra :

$$(49)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^p \cos^p \varphi \cos(p+2m)\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{p+1}} \mathrm{B}(m, p+1)\,\mathrm{T} + \frac{1}{2^{p+2}} \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx,$$

$$(50)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^p \varphi \sin(p+2m)\varphi\, d\varphi = \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}(m, p+1)\,\mathrm{T} \\ \displaystyle + (-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}\frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p\,dx + (-1)^{m+1}\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+2}} \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx, \end{array} \right.$$

$$(51)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^p \varphi \cos(p+2m)\varphi\, d\varphi = \frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \mathrm{B}(m, p+1)\,\mathrm{T} \\ \displaystyle + (-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p\,dx + (-1)^{m+1}\frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+2}} \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathfrak{L}x\,dx; \end{array} \right.$$

$$(52)\quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{B}(m, p+1) = \dfrac{1.2.3\ldots\overline{m-1}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}, \\ \mathrm{T} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)} - \dfrac{\Gamma'(m+p+1)}{\Gamma(m+p+1)}\right]. \end{array} \right.$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, t. II, p. 157.

Digitized by Google

On trouve très facilement les formules de réduction :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p dx = \frac{2^{p+1}}{m+p} - \frac{m-1}{m+p}\int_0^1 x^{m-2}(1+x)^p dx,$$

$$\int_0^1 x^{m-2}(1+x)^p dx = \frac{2^{p+1}}{m+p-1} - \frac{m-2}{m+p+1}\int_0^1 x^{m-3}(1+x)^p dx,$$

. . . . . .

$$\int_0^1 (1+x)^p dx = \frac{2^{p+1}}{p+1};$$

d'où résulte :

$$(55)\quad \left\{ \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p dx = 2^{p+1}\left[\frac{1}{m+p} - \frac{m-1}{(m+p)(m+p-1)} + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+p)(m+p-1)(m+p-2)} - \cdots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+2)(p+1)}\right]\right.$$

Quant à l'intégrale $\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \Sigma x dx$, en suivant une voie analogue à la précédente, on la fera dépendre de l'intégrale

$$\int_0^1 (1+x)^p \Sigma x dx,$$

laquelle, si p est commensurable, est toujours exprimable par les fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires.

Si p est incommensurable, on pourra développer cette intégrale, en série convergente, de la manière suivante :

$$(54)\quad \int_0^1 (1+x)^p \Sigma x dx = -\left[\frac{1}{1^2} + \binom{p}{1}\frac{1}{2^2} + \binom{p}{2}\frac{1}{3^2} + \cdots + \binom{p}{k}\frac{1}{(k+1)^2} + \cdots\right].$$

A partir d'un certain rang, les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs. Si p est négatif et qu'on change p en $-p$,

$$(55)\quad \int_0^1 \frac{\Sigma x}{(1+x)^p} dx = -\left\{\frac{1}{p} - \frac{p}{1}\frac{1}{2^2} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{1}{3^2} - \cdots\right\}. \qquad (1 > p > 0)$$

Digitized by Google

10. *Dérivées, par rapport à* p, *des formules* (22), (23) *et* (24).
Ces dérivées sont :

$$(56)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin q\varphi \mathfrak{L}\cos\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\pi}{2}\frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} + \frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathfrak{L}2 - \frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathrm{T}\right]\mathrm{B}$$
$$- \frac{\mathfrak{L}2}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx + \frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)dx,$$

$$(57)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \cos q\varphi \mathfrak{L}\sin\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} + \mathfrak{L}2\,\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} - \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathrm{T}\right]\mathrm{B}$$
$$- \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathfrak{L}2\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx$$
$$+ \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)dx,$$

$$(58)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \sin q\varphi \mathfrak{L}\sin\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\pi}{2}\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} - \frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathfrak{L}2 + \frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathrm{T}\right]\mathrm{B}$$
$$+ \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\mathfrak{L}2\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx$$
$$- \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p \mathfrak{L}\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)dx,$$

si l'on pose

$$\mathrm{B} = \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)},$$

$$\mathrm{T} = \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{q-p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)}.$$

Digitized by Google

Pour $p = 0$, ces formules deviennent :

$$(59)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q\varphi\, \mathfrak{L}\cos p d\varphi = \frac{1}{q}\left\{-\frac{\pi}{2}\sin q\frac{\pi}{2} + \cos q\frac{\pi}{2}\mathfrak{L}2 - \cos q\frac{\pi}{2}T_0\right\} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x}\,dx,$$

$$(60)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2q} + \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{q^2} - \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{q}\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x}\,dx,$$

$$(61)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{q}\left[-\mathfrak{L}2 + T_0\right] - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{q^2} + \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{q}\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x}\,dx;$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{4}+1\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right],$$

$$T_0 = -C - \frac{1}{q} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

C est la constante d'Euler.

Dans les égalités (59), (60) et (61), faisons $q = 2m$, m étant entier :

$$(62)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2m\varphi\, \mathfrak{L}\cos\varphi d\varphi = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{4m};$$

$$(63)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2m\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = (-1)^m\frac{\mathfrak{L}2}{2m} + \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2m}\int_0^1 \frac{x^m}{1+x}\,dx;$$

$$(64)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2m\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{4m}.$$

$$(65)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2m\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\mathfrak{L}2}{4m} + \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2} + \frac{(-1)^m}{2m}\int_0^1 \frac{x^m}{1+x}\,dx.$$

Digitized by Google

Puis, $q = 2m + 1$:

$$(66)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2m+1)\varphi\, \mathfrak{L}\cos\varphi d\varphi = (-1)^m \left[\mathrm{T} - \frac{\mathfrak{L}2}{2^{m+1}}\right],$$

$$(67)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\varphi\, \mathfrak{L}\cos\varphi d\varphi = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{2(2m+1)} + \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{2m+1} \int_0^1 \frac{x^{m+\frac{1}{2}}}{1+x} dx,$$

$$(68)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2m+1)\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2(2m+1)} + \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1} \int_0^1 \frac{x^{m+\frac{1}{2}}}{1+x} dx,$$

$$(69)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\mathfrak{L}2}{2m+1} + \frac{\mathrm{T}}{2m+1};$$

$$\mathrm{T} = -\mathrm{C} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{m-1} - \frac{1}{2m}.$$

Remarque. — Pour montrer l'analogie de ces résultats avec la formule qui donne la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\varphi\, \mathfrak{L}\cos\varphi d\varphi$, transcrivons cette dernière :

$$(70)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\varphi\, \mathfrak{L}\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{q}\left[-\frac{\pi}{2}\cos q\frac{\pi}{2} - \sin q\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{L}2 + \sin q\frac{\pi}{2}\,\mathrm{T}_0\right].$$

Bien que cette formule ne soit pas dans les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan, on peut la supposer connue, puisqu'elle dépend de l'identité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}\,\mathrm{B}\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right).$$

Comme conséquences des relations (59), (60) et (61), citons les formules :

$$(71)\quad \ldots \quad \int_0^{\pi} \sin q\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\pi\frac{\sin q\pi}{2q} - 2\,\frac{\mathrm{C} + \mathfrak{L}2 + \frac{1}{q} + \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}}{q}\sin^2 q\frac{\pi}{2},$$

$$(72)\quad \ldots \quad \int_0^{\pi} \cos q\varphi\, \mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi = -\pi\frac{1+\cos q\pi}{2q} - \frac{\sin q\pi}{q}\left[\mathrm{C} + \mathfrak{L}2 + \frac{1}{q} + \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\right].$$

Digitized by Google

11. *Remarque.* — Dans les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan, table 354, on trouve la formule

$$\int_0^{\pi} \cos qx \, \mathrm{S} \sin \frac{1}{2} x \, dx = -\frac{\pi}{2q},$$

intégrale attribuée à Raabe. Elle est fautive, car

$$\int_0^{\pi} \cos qx \, \mathrm{S} \sin \frac{1}{2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, \mathrm{S} \sin x dx = -\frac{\pi}{4q}.$$

D'après la formule (60) :

$$(73) \quad \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2qx \, \mathrm{S} \sin x dx = -\frac{\pi}{4q} + \frac{\sin q\pi}{4q^2} - \frac{\sin q\pi}{2q} \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx.$$

La formule de Raabe n'est vraie que pour $q =$ nombre entier.

On vérifie très simplement ce résultat en choisissant pour q la valeur $\frac{1}{2}$.

D'après la formule de Raabe,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{S} \sin x = -\frac{\pi}{2};$$

en vertu de (73),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{S} \sin x dx = -1,$$

ce qui est exact.

12. *Remarque.* — Dans le travail déjà cité plusieurs fois, Serret donne les deux formules

$$\int_0^{2\pi} \sin^{p-1} x \cos qx dx = 2^{p-1} \cos p \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma(p-q)\,\Gamma(p+q)} \Gamma(p),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{p-1} x \sin qx dx = 2^{p-1} \sin q \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma(p-q)\,\Gamma(p+q)} \Gamma(p).$$

Digitized by Google

A vrai dire, elles permettraient de déterminer les valeurs des intégrales (71) et (72); mais ces formules ne subsisteraient que pour les valeurs de q satisfaisant à l'inégalité

$$1 > q > 0.$$

Dans aucun cas, elles ne pourraient servir au calcul des intégrales (59), (60) et (61).

13. Si $q = p + 2m$, on obtiendra les valeurs des intégrales plus générales, savoir :

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin(p+2m)\varphi\, \mathcal{L}\cos\varphi\, d\varphi \\ = (-1)^m \Big\{ 1 - \mathrm{T}\Big\{ \dfrac{1.2.3\ldots\overline{m-1}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)} \dfrac{\mathcal{L}2}{2^{p+1}} - \dfrac{\mathcal{L}2}{2^{p+1}} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p\, dx \\ + \dfrac{1}{2^{p+1}} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathcal{L}'(1+x)\, dx - \dfrac{1}{2^{p+2}} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p\, \mathcal{L}'x\, dx, \end{array}\right.$$

$$(75)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \cos(p+2m)\varphi\, \mathcal{L}\sin\varphi\, d\varphi \\ = \Big[-\dfrac{\pi}{2}\cos p\dfrac{\pi}{2} + \mathcal{L}'2 \sin p\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{T}\sin p\dfrac{\pi}{2} \Big] \dfrac{1.2.3\ldots\overline{m-1}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)} \dfrac{1}{2^{p+1}} \\ + (-1)^{m+1} \dfrac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \Big[\mathcal{L}2 \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p dx - \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathcal{L}(1+x)\, dx \\ + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathcal{L}'x\, dx \Big], \end{array}\right.$$

$$(76)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \sin(p+2m)\varphi\, \mathcal{L}\sin\varphi\, d\varphi \\ = \Big[-\dfrac{\pi}{2}\sin p\dfrac{\pi}{2} - \mathcal{L}'2 \cos p\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{T}\cos p\dfrac{\pi}{2} \Big] \dfrac{1.2.3\ldots\overline{m-1}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)} \dfrac{1}{2^{p+1}} \\ + (-1)^{m+1} \dfrac{\cos p\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \Big[-\mathcal{L}2 \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p dx + \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathcal{L}'(1+x) dx \\ - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathcal{L}x\, dx \Big], \end{array}\right.$$

Digitized by Google

si l'on pose :

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}-\frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)}-\frac{1}{p+m}-\frac{1}{p+m-1}-\ldots-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+1}\right].$$

Quel que soit p, les intégrales

$$\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p dx, \qquad \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathrm{L}(1+x)dx$$

seront connues, sous forme finie; pour avoir la valeur de cette dernière intégrale, il suffit de prendre, par rapport à p, la dérivée de la formule (53). Car l'application du principe de la différentiation sous le signe est évidemment permise.

Nous savons en outre que, si p est commensurable, la valeur de

$$\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathrm{L}x dx$$

sera exprimable par les fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires.

Si p est incommensurable, on pourra développer la valeur de cette intégrale, en série convergente, de la manière suivante :

$$(77) \quad \ldots \quad \int_0^1 x^{m-1}(1+x)^p \mathrm{L}x dx = -\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{(m+k)^2}.$$

La différentiation, par rapport à q, des formules (59), (60) et (61) nous conduira à la détermination des transcendantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^m \cos q\varphi \,\mathrm{L}\sin\varphi d\varphi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^m \sin q\varphi \,\mathrm{L}'\sin\varphi d\varphi, \ldots$$

en fonction des dérivées successives de la fonction gamma.

Montrons rapidement la légitimité de cette opération. Soit, par exemple :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q\varphi \,\mathrm{L}'\cos\varphi d\varphi,$$

$$\frac{dA}{dq}=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \varphi\cos q\varphi \,\mathrm{L}'\cos\varphi d\varphi + \lim_{h=0}\left\{\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)\varphi-\sin q\varphi}{h}\,\mathrm{L}\cos\varphi d\varphi\right\},$$

Digitized by Google

ou, en vertu du théorème de Taylor :

$$\frac{dA}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \varphi \cos q\varphi \, \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi + \lim_{h=0} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos(q+\theta h)\varphi \, \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi.$$

Il suffit maintenant de prouver que

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{ \lim_{h=0} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos(q+\theta h)\varphi \, \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi \right\} = 0.$$

Posons

$$\mathrm{R} = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos(q+\theta h)\varphi \, \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi.$$

Quel que soit h, on a

$$\text{Val. abs. R} < \text{Val. abs.} \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\varepsilon} \mathrm{f}\sin\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sin\varepsilon} \frac{\mathrm{f}x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mais

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{\sin\varepsilon} \frac{\mathrm{f}x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} = 0;$$

donc

$$\frac{dA}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos q\varphi \, \mathrm{f}\cos\varphi d\varphi. \qquad (78)$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos q\varphi \, \mathrm{f}\sin\varphi d\varphi &= \frac{1}{q^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \sin q\frac{\pi}{2} - \mathrm{f}2\cos q\frac{\pi}{2} + \mathrm{T}_0 \cos q\frac{\pi}{2} \right\} - \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x} dx \\ &\quad - \frac{1}{q} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \cos q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \mathrm{f}2\sin q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \mathrm{T}_0 \sin q\frac{\pi}{2} + \cos q\frac{\pi}{2} \frac{d\mathrm{T}_0}{dq} \right) + \frac{1}{2q} \int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}}}{1+x} \mathrm{f}x dx. \end{aligned} \right. \qquad (79)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}} \mathrm{f}x}{1+x} dx = \frac{d}{dq} \left[\frac{\Gamma'\left(\frac{q}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{4}+1\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{4}+\frac{1}{2}\right)} \right],$$

$$\mathrm{T}_0 = -\mathrm{C} - \frac{1}{q} - \frac{\Gamma'\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE III.

14. Dans un précédent travail (*), nous avons donné les formules

$$(80)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi = -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} M_1 + \frac{\sin (q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} M_2,$$

$$(81)\quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} M_1 - \frac{\cos (q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} M_2,$$

$$M_1 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1} (1-x)^r (1+x)^s dx$$

$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(1+r)}{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(q-s-r+2k-2)\ldots(q-s-r)}{(q-s+r+2k)\ldots(q-s+r+2)}\right],$$

$$M_2 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1} (1+x)^r (1-x)^s dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{q-r+s}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{r}{k}\frac{(q-s-r+2k-2)\ldots(q-s-r)}{(q-r+s+2k)\ldots(q-r+s+2)}\right].$$

Par le changement de r en $-r$, la formule (80) devient :

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi}{\sin^r\varphi} d\varphi \\ \displaystyle = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{s-r+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}+1\right)\Gamma(r)\sin r\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(q-s+r+2k-2)\ldots(q-s+r)}{(q-s-r+2k)\ldots(q-s-r+2)}\right] \\ \displaystyle -\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s-r+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{q+s+r}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{-r}{k}\frac{(q-s+r+2k-2)\ldots(q-s+r)}{(q+r+s+2k)\ldots(q+r+s+2)}\right]. \end{array}\right.$$

(*) *Mémoires* in-4° de l'Académie royale de Belgique, t. LI.

Digitized by Google

Les séries du second membre de l'équation (82) sont uniformément convergentes pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et 1, inclusivement. Effectivement, pour $r = 1$, ces séries deviennent, la première,

$$1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \binom{s}{k} = 2^s;$$

et la seconde,

$$1 - \frac{q-s+1}{q+s+3} + \frac{(q-s+1)(q-s+3)}{(q+s+3)(q+s+5)} - \frac{(q-s+1)(q-s+3)(q-s+5)}{(q+s+3)(q+s+5)(q+s+7)} - \cdots.$$

Le premier membre de l'équation (82) est une fonction finie et continue du paramètre r; donc, à la limite :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^s \varphi \sin q\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^s} \frac{\Gamma\left(\frac{q-s+1}{2}\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{q+s+1}{2}+1\right)} \left[1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{(q-s+2k-1)\ldots(q-s+1)}{(q+s+2k+1)\ldots(q+s+3)}\right].$$

Cette série convergente peut être mise sous la forme

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Gamma\left(\frac{q-s+1}{2}\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{q+s+1}{2}+1\right)} \left[1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \dfrac{(q-s+2k-1)\ldots(q-s+1)}{(q+s+2k+1)\ldots(q+s+3)}\right] \\ = \int_0^1 x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s dx - \int_0^1 x^{\frac{q-s+1}{2}}(1-x)^s dx + \int_0^1 x^{\frac{q-s+1}{2}+1}(1-x)^s dx - \cdots \end{array} \right.$$

Considérons la série

$$(84) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^X \frac{x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s}{1+x} dx = \int_0^X x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s dx \\ \displaystyle - \int_0^X x^{\frac{q-s+1}{2}}(1-x)^s dx + \int_0^X x^{\frac{q-s+1}{2}+1}(1-x)^s dx - \cdots, \end{array} \right.$$

X restant compris entre 0 et 1, exclusivement.

Digitized by Google

Quand X tend vers 1, la série (84) tend vers la série (83) et reste uniformément convergente. D'autre part,

$$\int_0^X \frac{x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s}{1+x}$$

est une fonction finie et continue de la limite X; donc

$$(85)\quad \left\{ \int_0^1 \frac{x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s}{1+x}\,dx \right. \\ \left. = \frac{\Gamma\left(\frac{q-s+1}{2}\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{q+s+1}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\frac{(q-s+2k-1)\ldots(q-s+1)}{(q+s+2k+1)\ldots(q+s+3)}\right].$$

Alors,

$$(86)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^s\varphi\sin q\varphi}{\sin\varphi}d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^s}\int_0^1 \frac{x^{\frac{q-s+1}{2}-1}(1-x)^s}{1+x}\,dx.$$

Si $q = s$,

$$(87)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^q\varphi\sin q\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^{q-1}}\int_0^1 \frac{(1-x^2)^q}{1+x^2}\,dx.$$

Prenons, par rapport à q, la dérivée des deux membres de cette formule et faisons ensuite $q = 0$: ce qui est évidemment permis, car les fonctions, sous le signe $\int$, et leurs dérivées, par rapport à q, restent finies et continues dans tout le champ de l'intégration.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\mathfrak{L}2 + 2\int_0^\infty \frac{\mathfrak{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta;$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathfrak{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta = 2\int_0^1 \frac{\mathfrak{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta - \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}\beta}{1+\beta^2}\,d\beta;$$

Digitized by Google

donc

$$(88) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta = \frac{\pi}{8}\mathcal{L}2,$$

intégrale due à M. Bertrand.

Remarquons en passant qu'une simple transformation permet de déterminer la valeur de l'intégrale (88). Effectivement, faisons $\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta = \mathcal{L}2\int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} - \int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+\beta)}{1+\beta^2}\,d\beta = \frac{\pi}{8}\mathcal{L}2.$$

15. Dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois, nous avons démontré la formule

$$(89) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{s+1}\varphi \sin s\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{s+1}}.$$

Par des différentiations successives de cette formule, par rapport à s, on peut établir une série de relations entre des intégrales définies assez remarquables. Nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps : il nous suffira de faire remarquer que la différentiation sous le signe est une opération légitime, car la fonction à intégrer et sa dérivée restent finies et continues, entre les limites de l'intégration. Nous supposons toujours que le paramètre s est supérieur ou tout au plus égal à -1.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Dérivées, par rapport à q, *des formules* (80) *et* (81).

16. Si s et r sont positifs, il n'y a pas de doute qu'on peut soumettre à la différentiation les deux membres des formules (80) et (81). Examinons le cas où ces deux paramètres sont négatifs et considérons l'intégrale

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin q\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi.$$

La fonction à intégrer devenant discontinue pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$, posons

$$(90)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dB}{dq} = &\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\varphi \cos q\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi + \lim_{h=0}\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(q+h)\varphi - \sin q\varphi}{h} \frac{d\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\right] \\ &+ \lim_{h=0}\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q+h)\varphi - \sin q\varphi}{h} \frac{d\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\right], \end{aligned} \right.$$

ou encore

$$\frac{dB}{dq} = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\varphi \cos q\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi + \lim_{h=0}\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi \cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi\right] + \lim_{h=0}\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi \cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi\right];$$

faisons

$$M = \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi \cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi} d\varphi, \qquad N = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi \cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi \cos^s\varphi}\, d\varphi.$$

La fonction sous le signe restant constamment finie dans le champ de l'intégration, la valeur de l'intégrale M tend indéfiniment vers zéro avec ε.

Digitized by Google

Quant à N, on a l'inégalité

$$\text{Val. abs. N} < \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^s\varphi\cos^r\varphi},$$

$$\text{Val abs. N} < \frac{\pi}{2\cos^r\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^s\varphi}.$$

On voit aisément que la valeur de l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^s\varphi}$ diminue indéfiniment avec ε; donc, quelle que soit la valeur de h,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\lim_{h=0}\int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi\cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi}d\varphi\right] = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0}\left[\lim_{h=0}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\cos(q+\theta h)\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi}d\varphi\right] = 0.$$

Par suite,

$$\frac{dB}{dq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\cos q\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi}d\varphi.$$

Examinons maintenant s'il est permis de différentier, par rapport à q, les intégrales du second membre de ces mêmes équations.

Soit

$$T = \int_0^1 \frac{x^{\frac{q+s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}dx.$$

La fonction à intégrer croît au delà de toute limite pour $x = 1$; il en est encore de même pour $x = 0$, si $\frac{q+s+r}{2}$ est inférieur à 1.

Posons donc

$$(91)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{dT}{dq} = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^{\frac{q+s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}lx\,dx + \lim_{h=0}\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{x^{\frac{q+s+r+h}{2}-1} - x^{\frac{q+s+r}{2}-1}}{h}\frac{dx}{(1-x)^r(1+x)^s}\right]\\ + \lim_{h=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{x^{\frac{q+s+r+h}{2}-1} - x^{\frac{q+s+r}{2}-1}}{h}\frac{dx}{(1-x)^r(1+x)^s}\right],\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

ou bien

$$\frac{dT}{dq} = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^{\frac{q+s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,\mathfrak{L}x\,dx + \frac{1}{2}\lim_{h=0}\left[\int_{0}^{\varepsilon} \frac{x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,\mathfrak{L}x\,dx\right]$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{h=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,\mathfrak{L}x\,dx\right].$$

Soient maintenant

$$A = \int_{0}^{\varepsilon} \frac{x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,\mathfrak{L}x\,dx, \quad B = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,\mathfrak{L}x\,dx;$$

on a les inégalités

$$\text{Val. abs. } A < \frac{1}{(1-\varepsilon)^r}\,\text{Val. abs.}\int_{0}^{\varepsilon} x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}\,\mathfrak{L}x\,dx,$$

$$\text{Val. abs. } B < \frac{1}{(2-\varepsilon)^s}\,\text{Val. abs.}\int_{0}^{\varepsilon} \frac{(1-x)^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{x^r}\,\mathfrak{L}(1-x)\,dx.$$

On peut toujours donner à h une valeur suffisamment petite pour que $q+s+r+\theta h$ soit positif; donc

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{0}^{\varepsilon} x^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}\,\mathfrak{L}x\,dx\right] = 0.$$

Quant à l'intégrale

$$\int_{0}^{\varepsilon} \frac{(1-x)^{\frac{q+s+r+\theta h}{2}-1}}{x^r}\,\mathfrak{L}(1-x)\,dx,$$

la fonction sous le signe reste constamment finie entre les limites zéro et ε; par suite, la valeur de cette intégrale tend indéfiniment vers zéro avec ε.

Digitized by Google

En résumé, si les trois paramètres q, s et r satisfont aux inégalités, déjà énoncées plusieurs fois,

$$q - s - r > 0, \qquad s > -1, \qquad r > -1,$$

on aura :

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi &= \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+2}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s \Sigma x dx \\ &- \frac{\pi}{2}\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx \\ &- \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+2}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s \Sigma x dx,\end{aligned}\right.$$

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi &= \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+2}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s \Sigma x dx \\ &+ \frac{\pi}{2}\frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx \\ &- \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+2}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s \Sigma x dx,\end{aligned}\right.$$

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi &= \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+3}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s (\Sigma x)^2 dx \\ &+ \frac{\pi^2}{4}\frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx \\ &- \pi\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+2}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s \Sigma x dx \\ &- \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+3}} \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s (\Sigma x)^2 dx,\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^q \sin^r\varphi\cos^s\varphi\,\sin q\varphi\,d\varphi &= -\frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+3}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s(\mathfrak{L}x)^2dx\\ &\quad -\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s\,dx\\ &\quad -\pi\frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+2}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s\,\mathfrak{L}x\,dx\\ &\quad +\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+3}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s(\mathfrak{L}x)^2\,dx.\end{aligned}\right.$$

Soit $q = 0$. Puis, par le changement de s et r en $-s$ et $-r$, l'équation (93) deviendra

$$(96)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi}d\varphi &= \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{2-s-r}}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\mathfrak{L}x\,dx\\ &\quad +\frac{\pi}{2}\frac{\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{1-s-r}}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1+x)^r(1-x)^s}dx-\frac{\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{2-s-r}}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^s(1+x)^r}\mathfrak{L}x\,dx.\end{aligned}\right.$$

En vertu de l'identité suivante, conséquence de la relation (90),

$$\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\mathfrak{L}x\,dx+\sin s\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\mathfrak{L}x\,dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cos s\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1+x)^r(1-x)^s}dx,$$

il viendra

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\sin^r\varphi\cos^s\varphi}d\varphi &= \frac{\pi}{4}\frac{\cos r\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\sin s\frac{\pi}{2}\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(1-\frac{s+r}{2}\right)}\\ &\quad +\frac{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}}{2^{2-s-r}\sin s\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\mathfrak{L}x\,dx.\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

17. Changeons r en $-r$ et faisons ensuite $s = r - 1$ et $q = 1$; les formules (93) et (94) deviendront alors:

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{cotg}^r \varphi d\varphi = {} & \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}\,\mathfrak{L}x dx + \frac{\pi}{2}\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}dx \\ & + \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}\,\mathfrak{L}x dx,\end{aligned}\right.$$

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \operatorname{cotg}^r \varphi d\varphi = {} & \frac{\pi^2}{4}\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}dx + \frac{\pi}{2}\cos r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}\,\mathfrak{L}x dx \\ & - \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{4}\int_0^1 \left[\frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r} + \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}\right]\mathfrak{L}^2 x dx.\end{aligned}\right.$$

Semblablement,

$$(100)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{tg}^r \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}dx - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2}\int_0^1 \left[\frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r} + \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}\right]\mathfrak{L}x dx,$$

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \operatorname{tg}^r \varphi d\varphi = {} & \frac{\pi^2}{4}\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}dx - \frac{\pi}{2}\cos r\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}\,\mathfrak{L}x dx \\ & - \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{4}\int_0^1 \left[\frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r} + \frac{(1-x)^{r-1}}{(1+x)^r}\right]\mathfrak{L}^2 x dx.\end{aligned}\right.$$

Remarquons encore que la transcendante $\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}dx$ se ramène immédiatement aux fonctions eulériennes par la transformation

$$x = \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Effectivement,

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{r-1}}{(1-x)^r}dx = \int_0^1 \frac{\beta^{-r}}{1+\beta}d\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}\right].$$

Digitized by Google

18. Si $r = \frac{1}{2}$, les transcendantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^m \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^m \sqrt{\operatorname{colg}\varphi}$$

sont exprimables par les fonctions gamma et leurs dérivées successives; car leurs valeurs dépendent d'intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma x)^t}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Montrons maintenant qu'on peut toujours exprimer la valeur de cette intégrale au moyen de la fonction gamma et de ses dérivées.

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma x)^t}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2^{t+1}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}(\Sigma z)^t\,dz.$$

Soit généralement

$$(102) \quad \ldots\ldots\ A = \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \sqrt{\Pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Il est permis de différentier, par rapport à p, la formule (102). En effet,

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\Sigma x\,dx + \lim_{h=0}\left[\int_0^\varepsilon \frac{x^{\frac{p+h}{2}-1} - x^{\frac{p}{2}-1}}{h}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\right]$$
$$+ \lim_{h=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^{\frac{p+h}{2}-1} - x^{\frac{p}{2}-1}}{h}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\right];$$

ou

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\Sigma x\,dx + \frac{1}{2}\lim_{h=0}\left[\int_0^\varepsilon \frac{x^{\frac{p+\theta h}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\Sigma x\,dx\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\lim_{h=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^{\frac{p+\theta h}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\Sigma x\,dx\right].$$

Digitized by Google

Or,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^{\frac{p+\theta h}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}x\,dx\right]=0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{x^{\frac{p+\theta h}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}x\,dx\right]=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-x)^{\frac{p+\theta h}{2}-1}}{\sqrt{x}}\,\mathfrak{L}(1-x)\,dx\right]=0.$$

En conséquence,

$$\frac{dA}{dp}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}x\,dx.$$

On demontrerait de la même manière que

$$\frac{d^2A}{dp^2}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}^2x\,dx.$$

Ainsi,

$$(103)\quad\int_0^1\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right],$$

$$(104)\quad\int_0^1\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}\,\mathfrak{L}^2x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right].$$

Si $p=1$,

$$(105)\quad\int_0^1\frac{\mathfrak{L}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{\pi}{2}\mathfrak{L}2,$$

$$(106)\quad\int_0^1\frac{\mathfrak{L}^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}(\mathfrak{L}2)^2+\frac{\pi^3}{24}.$$

Digitized by Google

Reportons ces valeurs dans les relations (100) et (101), après y avoir fait $r = \frac{1}{2}$:

$$(107) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sqrt{\operatorname{cotg}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \Sigma 2\right],$$

$$(108) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \sqrt{\operatorname{cotg}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\frac{5\pi^2}{12} - \pi \Sigma 2 - (\Sigma 2)^2\right],$$

$$(109) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \Sigma 2\right],$$

$$(110) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\frac{5\pi^2}{12} + \pi \Sigma 2 - (\Sigma 2)^2\right].$$

Digitized by Google

CHAPITRE V.

19. D'après Serret (*) :

$$(111)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{p-q}{2}} - t^{\frac{p+q}{2}}}{(1+t)^{p+1}(1-t)}\, dt,$$

$$(112)\qquad \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = \pi \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)} - \cos q\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)} \mathrm{P}, \right.$$

$$(113)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin p\varphi d\varphi = \int_0^1 \frac{1-t^p}{(1-t)(1+t)^{p+1}}\, dt,$$

$$\mathrm{P} = \int_0^1 \frac{t^{\frac{p-q}{2}} - t^{\frac{p+q}{2}}}{(1+t)^{p+1}(1-t)}.$$

Remarque. — Cette dernière formule ne diffère pas au fond de celle que nous avons donnée (**). La transformation $t = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ la ramène à

$$(114)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin p\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 \frac{(1+\beta)^p - (1-\beta)^p}{\beta}\, d\beta.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. VIII.

(**) Tome LI des *Mémoires* in-4° de l'Académie royale de Belgique.

Digitized by Google

Si p est négatif, écrivons ainsi la formule (112), après avoir changé p en $-p$:

$$(115)\quad \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin^p x}\,dx = \frac{\pi}{\Gamma(p)\,\Gamma\left(1-\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} \left[\frac{\pi \sin q\frac{\pi}{2} - 2^{1-p}\cos q\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}}{(1+t)^{1-p}(1-t)}\,dt}{\sin p\pi} \right].\right.$$

Si $p = 1$, on doit avoir identiquement

$$(116)\quad \ldots\ldots\ldots \pi \operatorname{tg} q\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{q+1}{2}} - t^{\frac{q-1}{2}}}{1-t}\,dt;$$

ou, en faisant $p = \frac{q+1}{2}$:

$$(117)\quad \ldots\ldots\ldots \pi \operatorname{cotg} p\pi = \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t}\,dt,$$

formule classique.

Ainsi, dans l'équation (115), pour $p = 1$, le terme entre crochets prend la forme $\frac{0}{0}$.

Donc

$$(118)\quad \ldots \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \left[\pi \mathcal{L}2 \sin q\frac{\pi}{2} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\cos q\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{q+1}{2}} - t^{\frac{q-1}{2}}}{1-t}\,\mathcal{L}t\,dt - \cos q\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{q+1}{2}} - t^{\frac{q-1}{2}}}{1-t}\,\mathcal{L}(1+t)\,dt \right].\right.$$

Posons $p = \frac{q+1}{2}$ et comparons les relations (41) et (118) :

$$(119)\quad \left\{ \frac{\pi^2}{2\sin p\pi} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \right] = \pi \mathcal{L}2 \cos p\pi - \frac{1}{2}\sin p\pi \int_0^1 \frac{t^{-p} - t^{p-1}}{1-t}\,\mathcal{L}t\,dt \right.$$
$$\left. + \sin p\pi \int_0^1 \frac{t^{-p} - t^{p-1}}{1-t}\,\mathcal{L}(1+t)\,dt. \right.$$

Digitized by Google

De la formule connue

$$\int_0^1 \frac{1-t^p}{1-t}\,dt = C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)},\ (*)$$

on déduit par différentiation

$$\int_0^1 \frac{t^{-p}-t^{p-1}}{1-t}\,\mathcal{L}t\,dt = \frac{d^2}{dp^2}[\mathcal{L}\Gamma(p)] - \frac{d^2}{dp^2}[\mathcal{L}\Gamma(1-p)].$$

Substituons la valeur de cette dernière intégrale dans la relation (119) :

$$(120)\quad \int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{-p}}{1-t}\,\mathcal{L}(1+t)\,dt = \pi\,\mathcal{L}2\cot g\,p\pi + \frac{\pi}{2\sin p\pi}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\right] - \frac{d^2}{dp^2}[\mathcal{L}\Gamma(p)].$$

Cependant, il nous reste à montrer qu'il est permis de soumettre l'intégrale

$$A = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}}{(1+t)^{1-p}(1-t)}\,dt$$

à la différentiation sous le signe.

Pour $t = 0$ et $t = 1$, la fonction à intégrer croit au delà de toute limite. Posons donc

$$\frac{dA}{dp} = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{d}{dp}\left[\frac{t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}}{(1+t)^{1-p}(1-t)}\,dt\right]$$

$$+ \lim_{h=0}\left[\int_0^\varepsilon \left[\frac{\left(t^{-\frac{p+q+h}{2}} - t^{\frac{q-p-h}{2}}\right)(1+t)^{p+h} - \left(t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}\right)(1+t)^p}{(1-t^2)\,h}\right] dt\right]$$

$$+ \lim_{h=0}\left[\int_{1-\varepsilon}^1 \left[\frac{\left(t^{-\frac{p+q+h}{2}} - t^{\frac{q-p-h}{2}}\right)(1+t)^{p+h} - \left(t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}\right)(1+t)^p}{(1-t^2)\,h}\right] dt\right].$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, par LEGENDRE.

Digitized by Google

En vertu du théorème de Taylor,

$$A = \int_0^{\varepsilon} \left[\frac{\left(t^{-\frac{p+q+h}{2}} - t^{\frac{q-p-h}{2}}\right)(1+t)^{p+h} - \left(t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}\right)(1+t)^{p}}{(1-t^2)h} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \frac{t^{\frac{q-p-\theta h}{2}} - t^{-\frac{q+p+\theta h}{2}}}{1-t^2}(1+t)^{p+\theta h} \mathfrak{L}\, t\, dt.$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} \frac{t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}} - t^{-\frac{q-p-\theta h}{2}}}{1-t^2}(1+t)^{p+\theta h} \mathfrak{L}(1+t)\, dt,$$

$$B = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\left(t^{-\frac{p+q+h}{2}} - t^{\frac{q-p-h}{2}}\right)(1+t)^{p+h} - \left(t^{-\frac{p+q}{2}} - t^{\frac{q-p}{2}}\right)(1+t)^{p}}{(1-t^2)h} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{t^{\frac{q-p-\theta h}{2}} - t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}}{(1-t^2)}(1+t)^{p+\theta h} \mathfrak{L}\, t\, dt$$

$$+ \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}} - t^{\frac{q-p-\theta h}{2}}}{1-t^2}(1+t)^{p+\theta h} \mathfrak{L}(1+t)\, dt.$$

En valeur absolue,

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \frac{t^{\frac{q-p-\theta h}{2}} - t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}}{1-t^2}(1+t)^{p+\theta h} \mathfrak{L}\, t\, dt < \frac{1}{2}\frac{(1+\varepsilon)^{p+\theta h}}{1-\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon} \left(t^{\frac{q-p-\theta h}{2}} - t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}\right) \mathfrak{L}\, t\, dt.$$

Mais, p et q satisfaisant aux inégalités

$$1 + \frac{q-p}{2} > 0, \qquad 1 - \frac{p+q}{2} > 0,$$

on peut toujours supposer h suffisamment petit pour que les conditions suivantes soient remplies :

$$1 + \frac{q-p-\theta h}{2} > 0, \qquad 1 - \frac{p+q+\theta h}{2} > 0.$$

Cela étant, M tendra indéfiniment vers zéro avec ε.

Digitized by Google

De même,

$$N=\int_0^{\varepsilon}\frac{t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}-t^{\frac{q-p-\theta h}{2}}}{1-t^2}(1+t)^{p+\theta h}\mathcal{L}(1+t)dt<\frac{\mathcal{L}(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{p+\theta h}}{1-\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}\left(t^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}-t^{\frac{q-p-\theta h}{2}}\right)dt,$$

et

$$\lim_{\varepsilon=0}[N]=0.$$

Par le changement de t en $1-t$, B devient

$$B=\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-t)^{\frac{q-p-\theta h}{2}}-(1-t)^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}}{t}(2-t)^{p+\theta h-1}\mathcal{L}(1-t)\,dt$$
$$+\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-t)^{\frac{q-p-\theta h}{2}}-(1-t)^{-\frac{p+q+\theta h}{2}}}{t}(2-t)^{p+\theta h-1}\mathcal{L}(2-t)\,dt.$$

Comme les fonctions sous le signe restent finies et continues entre les limites de l'intégration, on aura

$$\lim_{\varepsilon=0}[B]=0.$$

De cette analyse, nous concluons la formule

$$\frac{dA}{dp}=\frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{t^{\frac{q-p}{2}}-t^{-\frac{p+q}{2}}}{(1-t^2)}(1+t)^p\mathcal{L}t\,dt+\int_0^{1}\frac{t^{-\frac{p+q}{2}}-t^{\frac{q-p}{2}}}{1-t^2}(1+t)^p\mathcal{L}(1+t)\,dt.$$

20. Le même procédé peut servir à déterminer toute une série d'intégrales nouvelles.

Pour éviter toute confusion, remplaçons, dans l'équation (115), la lettre p par la lettre u, et prenons, par rapport à q, les dérivées des deux membres de cette égalité

$$(121)\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\cos qx}{\sin^u x}dx=\frac{\pi}{\Gamma(u)\,\Gamma\left(1-\frac{u+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{q-u}{2}\right)}\\ \times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'\left(1-\frac{q+u}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{q+u}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(1+\frac{q-u}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q-u}{2}\right)}\right)\frac{A}{\sin p\pi}+\frac{dA}{dq}\frac{1}{\sin p\pi}\right],\end{array}\right.$$

Digitized by Google

où, pour plus de simplicité, nous faisons

$$A = \pi \sin q\frac{\pi}{2} - 2^{1-u}\cos q\frac{\pi}{2}B, \qquad B = \int_0^{+1} \frac{t^{-\frac{q+u}{2}} - t^{\frac{q-u}{2}}}{(1+t)^{1-u}(1-t)}\,dt.$$

Soit $u = p = 1$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos qx}{\sin x}\,dx = \frac{\sin q\frac{\pi}{2}}{2}\left[\frac{dA}{du}\right]_{u=1} - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{\pi}\left[\frac{d^2A}{dudq}\right]_{u=1},$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos qx}{\sin x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} q\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin qx}{\sin x}\,dx - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}}{\pi}\left[\frac{d^2A}{dudq}\right]_{u=1}. \tag{122}$$

Si nous développons $\left(\frac{d^2A}{dudq}\right)_{u=1}$, nous trouvons :

$$\left[\frac{d^2A}{dudq}\right]_{u=1} = -\frac{\pi}{2}\mathfrak{L}2\sin q\frac{\pi}{2}(B)_{u=1} + \frac{\pi}{2}\sin q\frac{\pi}{2}\left[\frac{dB}{du}\right]_{u=1} + \mathfrak{L}2\cos q\frac{\pi}{2}\left[\frac{dB}{dq}\right]_{u=1} - \cos q\frac{\pi}{2}\left[\frac{d^2B}{dudq}\right]_{u=1}. \tag{123}$$

En vertu de l'hypothèse $p = \frac{q+1}{2}$, des relations (116), (117) et (120),

$$[B]_{u=1} = -\pi\operatorname{cotg} p\pi, \qquad \left[\frac{dB}{dq}\right]_{u=1} = \frac{\pi^2}{2\sin^2 p\pi},$$

$$\int_0^{+1} \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t}(\mathfrak{L}t)^2\,dt = -2\pi^3\frac{\cos p\pi}{\sin^3 p\pi}, \qquad \left[\frac{dB}{du}\right]_{u=1} = \frac{\pi^2}{2\sin^2 p\pi} - \pi\mathfrak{L}2\operatorname{cotg} p\pi - \frac{\pi D}{2\sin p\pi},$$

où, pour abréger, nous posons

$$D = \frac{\Gamma'\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (123) :

$$\left[\frac{d^2A}{dudq}\right]_{u=1} = \frac{\pi^2\mathfrak{L}2}{2\sin p\pi} + \frac{\pi^3\cos p\pi}{4\sin^2 p\pi} + \frac{\pi^2 D}{4}\operatorname{cotg} p\pi + \frac{\sin p\pi}{2}\,T.$$

Digitized by Google

Puis de la comparaison des relations (44), (122) et (123), résulte la formule

$$(124)\quad \int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{-p}}{1-t}\,\mathfrak{L}t\,\mathfrak{L}_1(1+t)\,dt = -\frac{\pi^2\,\mathfrak{L}2}{\sin^2 p\pi} - \frac{\pi^3\cos p\pi}{2\sin^2 p\pi}\,\mathrm{D} + \frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{d^2}{dp^2}\left[\mathfrak{L}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\right].$$

En particulier, si $p = \frac{1}{2}$,

$$(125)\quad \ldots\ldots \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}t\,\mathfrak{L}(1+t^2)}{t-t^2}\,dt = -\frac{\pi^2}{2}\mathfrak{L}2 - \frac{\pi}{2}\mathfrak{G},$$

$\mathfrak{G}$ représentant la constante connue

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \cdots$$

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

21. Nous savons qu'on peut, par des développements en série trigonométrique, calculer directement les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2m} \cos^p x \cos px\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2m+1} \cos^p x \sin px\,dx.$$

Ces mêmes intégrales peuvent être obtenues en différentiant, par rapport à q, la formule

$$(126) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi \cos q\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Le rapprochement de ces diverses valeurs permettra d'exprimer certaines transcendantes, au moyen de la fonction gamma et de ses dérivées successives.

Ainsi, d'une part,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^p x \sin px\,dx = -\frac{\pi}{2^{p+2}}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right],$$

et, d'autre part,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^p x \sin px\,dx = -\frac{\pi}{2^{p+2}} \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\,dx;$$

d'où résulte la formule connue :

$$(127) \quad \ldots \quad \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\,dx = C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}.$$

C est la constante d'Euler.

Digitized by Google

Soit, plus généralement, à chercher les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos^p x \sin px dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos^p x \cos px dx.$$

On aura :

$$(128)\ \ldots \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos^p x \sin px dx = \sum_{k=1}^{k=\infty} \binom{p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin 2kx dx, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos^p x \cos px dx = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos 2kx dx. \end{cases}$$

Sans difficulté aucune, on trouve les formules de réduction suivantes :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin 2kx dx = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{(-1)^k}{2k} - \frac{n(n-1)}{(2k)^2} A_{n-2}.$$

$$A_{n-2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \frac{(-1)^k}{2k} - \frac{(n-2)(n-3)}{(2k)^2} A_{n-4},$$

. . . . . .

Si n est pair, cette suite d'égalités se terminera par

$$A_2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(-1)^k}{2k} - \frac{1.2}{(2k)^2} A_0;$$

et, si n est impair,

$$A_3 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{(-1)^k}{2k} - \frac{3.2}{(2k)^2} A_0, \quad A_1 = -\frac{\pi}{2} \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Par suite,

$$(129)\ \begin{cases} A_{2n} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^k}{2k} + 2n(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \frac{(-1)^k}{(2k)^3} - 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} \frac{(-1)^k}{(2k)^5} + \cdots \\ \quad + (-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)\ldots 5.4.3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(-1)^k}{(2k)^{2n-1}} + (-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)\ldots 3.2.1. \frac{A_0}{(2k)^{2n}}; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(130)\quad \begin{cases} A_{2n+1}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k}+(2n+1)(2n)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)^3}-(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\frac{(-1)^k}{(2k)^5}+\cdots \\ \quad +(-1)^{n+1}(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 5.4.3.2.1.\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k}{(2k)^{2n+1}}. \end{cases}$$

Par une voie analogue à celle-ci, on trouve :

$$(131)\quad \begin{cases} B_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos 2kx\,dx=(-1)^k\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\frac{2n}{(2k)^2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(2k)^4}+\cdots\right. \\ \quad \left.+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}\frac{2n(2n-1)\ldots 3.2}{(2k)^{2n}}\right], \\ B_{2n+1}=(-1)^k\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{2n+1}{(2k)^2}-\frac{(2n+1)2n}{(2k)^4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}+\cdots\right. \\ \quad \left.+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots 3.2}{(2k)^{2n}}-(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)2n\ldots 3.2.1}{(2k)^{2n+2}}\{1-(-1)^k\}\right]. \end{cases}$$

De ces formules résultent les relations :

$$(132)\quad \ldots\ldots \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos^p x\sin px\,dx=\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}A_{2n}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\cos^p x\sin px\,dx=\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}A_{2n+1}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos^p x\cos px\,dx=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}B_{2n}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\cos^p x\cos px\,dx=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}B_{2n+1}. \end{cases}$$

Les séries $\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}A_{2n}$, etc., sont absolument convergentes, puisque nous avons prouvé qu'il en est ainsi de la série $\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{2k}$. On peut donc grouper arbitrairement les termes de ces séries, et il nous reste à mettre, sous forme d'intégrales définies, les suites indéfinies :

$$S_1=\frac{1}{2^b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{(-1)^k}{k^b},\quad S_2=\frac{1}{2^b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1-(-1)^k}{k^b}.$$

Digitized by Google

On a

$$\int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k},\quad \int_0^1 x^{k-1}\,\mathfrak{L}x\,dx = -\frac{1}{k^2},\quad \cdots,\quad \int_0^1 x^{k-1}\,(\mathfrak{L}x)^b\,dx = (-1)^b\frac{1.2.3\ldots(b-1)}{k^b};$$

d'où

$$S_1 = \frac{(-1)^{b-1}}{2^b.1.2\,3\ldots(b-1)}\left[\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\int_0^{1-\varepsilon}x^{k-1}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\int_{1-\varepsilon}^{1}x^{k-1}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx\right],$$

ou

$$S_1 = \frac{(-1)^{b-1}}{2^b.1.2.3\ldots(b-1)}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{(1-x)^p-1}{2}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\int_{1-\varepsilon}^{1}x^{k-1}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx\right].$$

Quand ε tend vers zéro, chacun des termes de la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\int_{1-\varepsilon}^{1}x^{k-1}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx$$

décroît au delà de toute limite. Donc,

$$(133)\quad \ldots\ldots\quad S_1 = \frac{(-1)^{b-1}}{2^b.1.2\,3\ldots(b-1)}\int_0^1\frac{(1-x)^p-1}{x}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx.$$

On trouverait tout aussi facilement

$$(134)\quad \ldots\quad S_2 = \frac{(-1)^b}{1.2.3\ldots(b-1)\,2^{b+1}}\int_0^1\frac{(1+x)^p-(1-x)^p}{x}(\mathfrak{L}x)^{b-1}dx.$$

De ces diverses formules, on conclut les valeurs des intégrales :

$$(135)\quad \ldots\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^p x\cos px\,dx = \frac{\pi^3}{3.2^{p+3}} + \frac{\pi}{2^{p+2}}\int_0^1\frac{1-(1-x)^p}{x}\mathfrak{L}x\,dx,$$

$$(136)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^p x\sin px\,dx = \frac{\pi^3}{2^{p+4}}\int_0^1\frac{1-(1-x)^p}{x}dx + \frac{3\pi}{2^{p+4}}\int_0^1\left[\frac{(1-x)^p-1}{x}\right](\mathfrak{L}x)^2\,dx.$$

Digitized by Google

Par différentiation, on déduit de la formule (126) les deux suivantes :

$$(137)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^p x \cos px\,dx = -\frac{\pi}{2^{p+3}}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]^2 + \frac{\pi}{2^{p+3}}\frac{d^2}{dp^2}\left[\mathfrak{L}\Gamma(p+1)\right] + \frac{\pi^3}{3.2^{p+4}},$$

$$(138)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^p x \sin px\,dx = &-\frac{\pi}{2^{p+4}}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]^3 \\ &+ \frac{3\pi}{2^{p+4}}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]\left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{d^2}{dp^2}\{\mathfrak{L}\Gamma(p+1)\}\right] \\ &- \frac{\pi}{2^{p+4}}\frac{d^3}{dp^3}\left[\mathfrak{L}\Gamma(p+1)\right] - \frac{\pi}{2^{p+3}}T_3, \end{aligned}\right.$$

où nous posons

$$T_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de p supérieures à -1. En les combinant, on aura :

$$(139)\quad \int_0^1 \frac{1-(1-x)^p}{x}\,\mathfrak{L}x\,dx = -\frac{1}{2}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[\mathfrak{L}\Gamma(p+1)\right] - \frac{\pi^2}{12},$$

$$(140)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-(1-x)^p}{x}(\mathfrak{L}x)^2\,dx = &\frac{1}{3}\left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]^3 \\ &+ \left[C + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right]\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{d^2}{dp^2}(\mathfrak{L}\Gamma(p+1))\right] + \frac{1}{3}\frac{d^3}{dp^3}\left[\mathfrak{L}\Gamma(p+1)\right] + \frac{2}{3}T_3. \end{aligned}\right.$$

22. *Remarque.* — Si p est positif, on peut déterminer directement les valeurs de ces intégrales. Effectivement, l'intégration par parties donne :

$$(141)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1-(1-x)^p}{x}\,dx = -p\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,\mathfrak{L}x\,dx \\ &\int_0^1 \frac{1-(1-x)^p}{x}\,\mathfrak{L}x\,dx = -\frac{p}{2}\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,\mathfrak{L}^2 x\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_0^1 \frac{1-(1-x)^p}{x}\,\mathfrak{L}^k x\,dx = -\frac{p}{k+1}\int_0^1 (1-x)^{p-1}(\mathfrak{L}x)^{k+1}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Maintenant, en partant de la formule

$$(142) \quad \ldots \ldots \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

on parviendra sans peine aux relations (137), (139) et (140).

Si p est négatif, mais supérieur à -1, les valeurs des intégrales

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{-p}}{x}dx, \quad \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{-p}}{x}\mathfrak{L}x\,dx, \ldots$$

dépendent des transcendantes

$$\int_0^1 \frac{\mathfrak{L}x}{(1-x)^{p+1}}dx, \quad \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}^2x}{(1-x)^{p+1}}dx, \quad \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}^3x}{(1-x)^{p+1}}dx, \ldots$$

qu'on ne saurait exprimer directement par la fonction gamma et ses dérivées successives. Pour trouver dans ce cas les formules (137), (139) et (140), il faut avoir recours au procédé indirect dont nous avons fait usage.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

23. Nous terminerons ce travail par quelques applications des résultats précédents et de la célèbre série de Gauss.

M. Catalan (*) a démontré que si l'on fait, suivant la notation de cet illustre géomètre,

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\alpha+\alpha'}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\alpha')(\alpha+\alpha'+1)}x^2 + \cdots,$$

on a

$$(143) \quad \ldots \quad F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x) = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')}\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-1}}{(1-\theta x)^{\beta}}\,d\theta,$$

relation due à Binet.

Elle suppose $1 \geqq x$. Si $x = -1$, on la transforme aisément en la suivante :

$$(144) \quad F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', -1) = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\alpha'-\beta)}\int_0^1 \theta^{\beta-1}(1-\theta)^{\alpha+\alpha'-\beta-1}(1+\theta)^{-\alpha}\,d\theta.$$

Supposons $\alpha + \alpha' - \beta - 1 = 2n - \alpha$; la relation (144) devient

$$(145) \quad \ldots \quad F(\alpha, \beta, 2n+1+\beta-\alpha, -1) = A\,\frac{\Gamma(2n+1+\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2n+1-\alpha)};$$

si nous posons, pour abréger,

$$A = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)_p\, C_{2n,p} \int_0^1 \theta^{\beta+p-1}(1-\theta^2)^{-\alpha}\,d\theta.$$

Puis, par le changement de θ en $\sqrt{\theta}$,

$$A = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^p\, C_{2n,p}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+p}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\beta+p}{2}+1-\alpha\right)}.$$

(*) Académie de Belgique, octobre 1885.

Digitized by Google

Groupant les termes de rang pair et ceux de rang impair, et observant que

$$\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+k\right)=\frac{\beta(\beta+2)(\beta+4)\dots(\beta+2k-2)}{2^k}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

et que

$$\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+k+1-\alpha\right)=\frac{(\beta-2\alpha+2)(\beta-2\alpha+4)\dots(\beta+2k-2\alpha)}{2^k}\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}-\alpha\right),$$

on aura

$$(146)\quad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha,\beta,2n+1+\beta-\alpha,-1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\beta-\alpha)(2+\beta-\alpha)\dots(2n+\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(2n-\alpha)} \\ \qquad\times\left[\dfrac{\Gamma\left(1+\dfrac{\beta}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(1+\dfrac{\beta}{2}-\alpha\right)}T_1-\dfrac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(1+\dfrac{\beta+1}{2}-\alpha\right)}T_2\right], \end{array}\right.$$

où nous faisons, pour plus de simplicité,

$$(147)\quad \left\{\begin{array}{l} T_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}C_{2n,2k}\frac{\beta(\beta+2)\dots(\beta+2k-2)}{(\beta-2\alpha+2)(\beta-2\alpha+4)\dots(\beta-2\alpha+2k)}, \\ T_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}C_{2n,2k-1}\frac{(\beta+1)(\beta+3)\dots(\beta+2k-1)}{(\beta-2\alpha+3)(\beta-2\alpha+5)\dots(\beta-2\alpha+2k+1)}. \end{array}\right.$$

Semblablement,

$$(148)\quad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha,\beta,2n+\beta-\alpha,-1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\beta-\alpha)(2+\beta-\alpha)\dots(2n+\beta-1-\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(2n-1-\alpha)} \\ \qquad\left[T_3\dfrac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(1+\dfrac{\beta}{2}-\alpha\right)}-T_4\dfrac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(1+\dfrac{\beta+1}{2}-\alpha\right)}\right], \end{array}\right.$$

$$(149)\quad \left\{\begin{array}{l} T_3=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}C_{2n-1,2k}\frac{\beta(\beta+2)\dots(\beta+2k-2)}{(\beta-2\alpha+2)\dots(\beta-2\alpha+2k)}, \\ T_4=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}C_{2n-1,2k-1}\frac{(\beta+1)(\beta+3)\dots(\beta+2k-1)}{(\beta-2\alpha+3)(\beta-2\alpha+5)\dots(\beta-2\alpha+2k+1)}. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Si n croît indéfiniment, on aura à la limite

$$(150)\quad \ldots\ldots \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\beta+1}{2}-\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}-\alpha\right)} = \lim_{n=\infty}\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{T_4}{T_3}\right).$$

24. Si $\beta = 2\alpha$,

$$(151)\quad \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-2}} \lim_{n=\infty}\left[\frac{\sum_{k=0}^{k=n} C_{2n,2k}\frac{2\alpha(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+2k-2)}{2.4.6\ldots 2k}}{\sum_{k=1}^{k=n} C_{2n,2k-1}\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2k-1)}{3.5.7\ldots(2k+1)}}\right],$$

pourvu que l'on suppose $1 > \alpha$.

Dans la même hypothèse, on transforme aisément les formules (146) et (148) dans les suivantes :

$$(152)\quad \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-2}}\frac{T_2}{T_1} + \frac{2}{T_1}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(2n-\alpha)}{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(2n+\alpha)} F(\alpha, 2\alpha, 2n+\alpha+1, -1),$$

$$(153)\quad \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-2}}\frac{T_4}{T_3} + \frac{2}{T_3}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(2n-1-\alpha))}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(2n+\alpha-1)} F(\alpha, 2\alpha, 2n+\alpha, -1);$$

$$(154)\quad F(\alpha, 2\alpha, 2n+1+\alpha, -1) = 1 - \frac{\alpha}{1}\frac{2\alpha}{2n+\alpha+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{2\alpha(2\alpha+1)}{(2n+1+\alpha)(2n+2+\alpha)}\ldots$$

$$(155)\quad F(\alpha, 2\alpha, 2n+\alpha, -1) = 1 - \frac{\alpha}{1}\frac{2\alpha}{2n+\alpha} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{2\alpha(2\alpha+1)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\ldots$$

Soit $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(156)\quad \ldots\quad \pi = 2\frac{T_4}{T_3} + \frac{4}{(4n+1)T_3}\left[1 - \frac{1}{4n+1} + \frac{1.3}{(4n+1)(4n+3)}\ldots\right].$$

La transcendante π est donc développée en série d'autant plus convergente que le nombre n est plus grand.

Digitized by Google

25. *Application.* $n = 6$.

$$T_3 = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_{2n-1,2k} \frac{1.3.5.7 \ldots 2k-1}{2.4.6 \ldots 2k}, \quad T_4 = \sum_{k=1}^{k=n} C_{2n-1,2k-1} \frac{2.4.6 \ldots 2k}{3.5.7 \ldots (2k+1)};$$

$$T_3 = C_{11,0} + \frac{1}{2} C_{11,2} + \frac{1.3}{2.4} C_{11,4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} C_{11,6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} C_{11,8} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} C_{11,10} = \frac{88179}{256},$$

$$T_4 = C_{11,1} + \frac{2}{3} C_{11,3} + \frac{2.4}{3.5} C_{11,5} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} C_{11,7} + \frac{2.4.6}{3.5.7} C_{11,9} + \frac{2.4.6.8.10}{3.5.7.9.11} C_{11,11} = \frac{1\,874\,481}{3465}.$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} C_{2n-1,2k-1} \frac{2.4.6 \ldots 2k}{3.5.7 \ldots 2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} C_{2n-1,2k} \frac{1.3.5.7 \ldots 2k-1}{2.4.6.8 \ldots 2k}} \right],$$

et

$$(157) \quad \frac{\pi}{2} = 1.570\,553\,010\,800\,688\,8 \ldots + \frac{512}{1\,522\,685} \left[1 - \frac{1}{17} + \frac{1.3}{17.19} - \frac{1.3.5}{17.19.21} + \frac{1.3.5.7}{17.19.21.25} + \cdots \right].$$

26. Si, dans la relation (145), on suppose $n = 0$ et qu'on fasse ensuite $\beta = 2n + 2\alpha$,

$$(158) \quad \ldots \quad F(\alpha, 2n+2\alpha, 2n+\alpha+1, -1) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(1+2n+\alpha)}{\Gamma(2n+2\alpha)\Gamma(1+n)},$$

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(1+\alpha+2n)}{\Gamma(2n+2\alpha)\Gamma(1+n)} = \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots(1+\alpha)\alpha}{1.2.3 \ldots n} \frac{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)\ldots(1+\alpha)\alpha}{(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha-2)\ldots(1+2\alpha)2\alpha} \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Si n croit indéfiniment,

$$\lim_{n=\infty} \left[F(\alpha, 2n+2\alpha, 2n+\alpha-1, -1) \right] = \frac{1}{2^\alpha};$$

donc

$$(159) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{\alpha 2^\alpha} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{2n}{2n+\alpha-1} \frac{2n+2\alpha-1}{2n+\alpha} \right),$$

Digitized by Google

formule qu'on peut encore écrire

$$(160)\quad \ldots\ldots\quad B(\alpha,\alpha)=\frac{1}{\alpha 2^{2\alpha}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\alpha^2-\alpha}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)}\right).$$

27. *Valeur de* $\frac{1}{\Gamma(a)}$ *en produit indéfini.*

En vertu du développement de $\mathfrak{L}\sin\varphi$,

$$(161)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin q\varphi\,\mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi=-\mathfrak{L}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin q\varphi d\varphi-\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin q\varphi\cos 2m\varphi d\varphi.$$

Si $q=2a$,

$$(162)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2a\varphi\,\mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi=\mathfrak{L}2\frac{\cos a\pi-1}{2a}+\frac{a}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{m^2-a^2}-\frac{a\cos a\pi}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{1}{m^2-a^2};$$

d'autre part, d'après une formule précédente,

$$(163)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2a\varphi\,\mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi=-\frac{\mathfrak{L}_2+T_0}{2a}-\frac{\cos a\pi}{4a^2}+\frac{\cos a\pi}{2a}\int_0^1\frac{x^a}{1+x}dx;$$

d'où, par comparaison des formules (159) et (160),

$$(164)\quad \mathfrak{L}2\frac{\cos a\pi}{2a}+\frac{a}{2}S_2+\frac{a\cos a\pi}{2}S_1=\frac{T_0}{2a}-\frac{\cos a\pi}{4a^2}+\frac{\cos a\pi}{2a}\int_0^1\frac{x^a}{1+x}dx,$$

où nous posons

$$S_1=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{1}{m^2-a^2},\quad S_2=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{m^2-a^2},\quad T_0=-C-\frac{1}{2a}\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

En partant de la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos q\varphi\,\mathfrak{L}\sin\varphi d\varphi=-\mathfrak{L}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos q\varphi d\varphi-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos q\varphi\cos 2m\varphi d\varphi,$$

Digitized by Google

on trouve

$$(165)\quad \ldots \quad \frac{\pi}{4a} - \frac{\sin a\pi}{4a^2} + \frac{\sin a\pi}{2a}\int_0^1 \frac{x^a}{1+x}\,dx = \mathfrak{L}2\,\frac{\sin a\pi}{2a} - \frac{a\sin a\pi}{2}\,S_1.$$

Éliminons l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^a}{1+x}\,dx$ entre les équations (164) et (165) :

$$(166)\quad \ldots\ldots\ldots \quad T_0 = a^2 S_2 + \frac{\pi}{2}\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi},$$

ou

$$(167)\quad -C - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2a} + \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} + a^2\left[\frac{1}{2}\frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{9-a^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{16-a^2} + \cdots\right].$$

Intégrons entre les limites 1 et a :

$$(168)\quad \ldots \quad \begin{cases} -\mathfrak{L}\,\Gamma(a) = C(a-1) - (a-1) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}\,\frac{a(1+a)\sin a\pi}{1-a} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}2\pi \\ \qquad + \sum_{m=2}^{m=\infty}\left(-\frac{a-1}{m} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}\,\frac{m+a}{m-a}\,\frac{m-1}{m+1}\right). \end{cases}$$

Pour nous débarrasser de la constante d'Euler, faisons $a = \frac{1}{2}$:

$$(169)\quad \ldots \quad 0 = -C + 1 + \mathfrak{L}3 - 2\,\mathfrak{L}2 + \sum_{m=2}^{m=\infty}\left[\frac{1}{m} + \mathfrak{L}\left(\frac{2m+1}{2m-1}\,\frac{m-1}{m+1}\right)\right].$$

Multiplions par $(a-1)$ cette égalité et combinons, par soustraction, les relations (168) et (169) :

$$(170)\quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} -\mathfrak{L}\,\Gamma(a) = (a-1)\sum_{m=2}^{m=\infty}\mathfrak{L}\,\frac{3}{4}\,\frac{(2m+1)(m-1)}{(2m-1)(m+1)} \\ \quad + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{m=\infty}\left[\mathfrak{L}\,\frac{a(1+a)\sin a\pi}{(1-a)2\pi}\,\frac{(m+a)(m-1)}{(m-a)(m+1)}\right]. \end{cases}$$

Digitized by Google

Puis, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(171)\qquad \frac{1}{\Gamma(a)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{a-1}\sqrt{\frac{a(1+a)}{1-a}\frac{\sin a\pi}{2\pi}}\prod_{m=2}^{m=\infty}\left[\left(\frac{(2m+1)(m-1)}{(2m-1)(m+1)}\right)^{a-1}\sqrt{\frac{(m+a)(m-1)}{(m-a)(m+1)}}\right],$$

pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de a, car la série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{m^2-a^2}$$

est absolument convergente, quel que soit le module de a. Ce résultat montre, comme on le savait déjà, que $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est une fonction holomorphe dans tout le plan.

28. Cette même formule (167) nous donne encore le développement de $\mathfrak{L}\Gamma(a+1)$ en série convergente.

Si a est inférieur à 1, on a :

$$\frac{a^2}{1-a^2} = a^2\left[1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \cdots\right],$$

$$\frac{a^2}{2\,(4-a^2)} = \frac{a^2}{2^3}\left[1 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^4} + \frac{a^6}{2^6} + \cdots\right],$$

$$\frac{a^2}{3\,(9-a^2)} = \frac{a^2}{3^2}\left[1 + \frac{a^2}{3^2} + \frac{a^4}{3^4} + \cdots\right];$$

donc

$$-C - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2a} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} + a^2S_3 + a^4S_5 + a^6S_7\ldots,$$

si nous faisons

$$S_{2p+1} = \frac{1}{1^{2p+1}} + \frac{1}{2^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+1}} + \cdots$$

Puis, par intégration,

$$(172)\quad \ldots\qquad Ca + \mathfrak{L}\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{a^3}{3}S_3 - \frac{a^5}{5}S_5 - \frac{a^7}{7}S_7\ldots,$$

formule classique.

Digitized by Google

29. *Remarque.* — La formule (165) conduit encore à la sommation d'une série assez remarquable.

On peut mettre cette relation sous la forme :

$$(175)\quad \ldots \quad \frac{\pi}{2\sin a\pi} - \frac{1}{2a} + \int_0^1 \frac{x^a}{1+x}\,dx = T_1 + a^2T_3 + a^4T_5 + a^6T_7 + \cdots,$$

$$T_{2p+1} = \frac{1}{1^{2p+1}} - \frac{1}{2^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+1}} - \frac{1}{4^{2p+1}} + \cdots.$$

30. *Remarque.* — En vertu du développement bien connu

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg} a\pi = \frac{1}{2a} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a}{a^2 - m^2},$$

on peut écrire l'équation (167) sous la forme :

$$-C - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{a} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a}{a^2 - m^2} - \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a^2}{m(m^2 - a^2)};$$

ou, après une transformation facile,

$$-C - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{a} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{1}{m+a} - \frac{1}{m}\right).$$

Par le changement de a en $a+1$, on trouve définitivement

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = -C + \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a+m}\right) + \cdots;$$

d'où, par intégration entre les limites 0 et a, on obtient la formule établie pour la première fois par l'illustre géomètre, M. Weierstrass :

$$(174)\quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{m}\right) e^{-\frac{a}{m}}\right] (*).$$

(*) Cours professé à la Faculté des sciences de Paris par M. Hermite.

Digitized by Google

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE ANATOMIQUE

DES

RENONCULACÉES

RANUNCULUS ARVENSIS *L.*

PAR

Édouard NIHOUL,

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES,

EX-PRÉPARATEUR DE BOTANIQUE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Présenté à la Classe des sciences le 6 juin 1891.)

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

L'anatomie des Renonculacées a fait l'objet de deux monographies importantes, publiées à peu près simultanément.

En 1884, M. Albert Meyer, dans sa thèse inaugurale (*), a décrit en détail la structure de quatre types : *Clematis vitalba, Anemone pratensis, Thalictrum minus* et *Pæonia officinalis*. Ces quatre types, auxquels l'auteur a rattaché toutes les Renonculacées, lui ont permis de caractériser quatre sous-familles qui ne coïncident pas entièrement avec la division en tribus généralement adoptée. Les quatre sous-familles de M. Meyer sont les suivantes :

1° Clématidées;

2° Renonculées, Anémonées, Helléborées;

3° Pæoniées;

4° Les *Thalictrum, Actæa, Cimicifuga*.

Une clef analytique pour la détermination des genres termine le travail.

En 1885, M. Paul Marié (**) a suivi une marche un peu différente. Il a fait séparément la monographie anatomique de chaque genre, en étudiant le

(*) *Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Ranunculaceen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde*, von A. Meyer. Marburg : Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich), 1884.

(**) *Recherches sur la structure des Renonculacées*, par M. Paul Marié. ANNALES DES SCIENCES NATURELLES, 6e série, Botanique, t. XX, 1885.

Digitized by Google

plus grand nombre d'espèces possible. Pour résumer cette longue analyse, il a cherché à énoncer :

I. Les caractères histologiques communs à toutes les Renonculacées. Il a fait dans ce but le relevé des modifications que présentent dans cette famille :

1° L'épiderme avec ses stomates et ses poils ;

2° L'écorce et l'endoderme ;

3° Le péricycle, les faisceaux, le liber et le bois, les rayons médullaires et la moelle.

Cette longue récapitulation ne met guère en évidence des particularités propres à distinguer bien nettement la famille des Renonculacées.

II. Les caractères des genres. Ces derniers semblent plus nets. Ils ont suggéré à l'auteur la remarque suivante :

« Le genre anatomique ne correspond pas toujours exactement au genre morphologique ; il est souvent plus compréhensif, et ce fait constitue un argument important en faveur des botanistes qui tendent à diminuer le nombre des genres (*). »

Il convient de rappeler aussi l'application que M. J. Vesque a faite des caractères anatomiques au groupe des Ranales. Il s'est attaché particulièrement à trouver dans l'histologie des feuilles la diagnose des familles. Il ne croit pas possible de distinguer anatomiquement les tribus de Renonculacées, à l'exception des Pæoniées. Il pense, au contraire, que la distinction des espèces sera facile (**).

Dans les monographies dont je viens de parler, la structure des organes végétatifs à l'état adulte a seule été étudiée au moyen de quelques coupes

(*) *Loc. cit.*, p. 166.

(**) J. Vesque. *De l'anatomie des tissus appliquée à la classification des plantes.* Nouvelles Archives du Museum, 2e sér., t. IV.

Digitized by Google

pratiquées en des points plus ou moins comparables. Pour être vraiment utiles au point de vue de la classification naturelle, les observations anatomiques doivent cependant porter sur l'individu tout entier, aux diverses périodes de son évolution. Il importe surtout de compléter les notions acquises par la connaissance de la structure :

1° De l'embryon;

2° De l'adulte dans son ensemble;

3° Des organes floraux.

Dès lors, il ne semble pas permis de considérer comme épuisé le sujet traité par MM. Meyer, Marié et Vesque.

D'autre part, il y a un intérêt véritable à ne pas trop éparpiller les observations d'anatomie, afin d'arriver le plus tôt possible à un résultat de nature à encourager les chercheurs et à les guider dans l'avenir.

J'ai donc cru faire œuvre utile en entreprenant de rechercher, à partir de la graine, l'organisation d'un type de Renonculacées. Ce type, j'ai cru devoir le choisir dans le genre *Ranunculus*, parce que ce genre, par sa simplicité et sa régularité, semble former la souche de tous les autres. J'ai préféré une espèce annuelle, vigoureuse, pour éviter les adaptations spéciales qu'ont dû éprouver les organes hibernants. Je présente aujourd'hui le résultat de mes recherches sur l'embryon et l'ensemble des organes végétatifs du *Ranunculus arvensis* L., espérant pouvoir étudier plus tard avec le même soin sa fleur et son fruit. Une série d'études semblables permettra de savoir enfin ce qui caractérise véritablement l'organisation des Renonculacées en général et de chaque genre en particulier.

Le présent travail est divisé en trois chapitres :

Chapitre I. — Embryon dans la graine.

Chapitre II. — Développement de l'appareil végétatif. Des plantes en germination seront étudiées à trois stades convenablement choisis.

Chapitre III. — Plante adulte.

Digitized by Google

Pour les chapitres I et II, un certain nombre d'individus ont été inclus dans la paraffine et coupés au microtome d'un bout à l'autre. Pour le chapitre III, l'axe hypocotyle, la tige principale et plusieurs tiges axillaires ont été étudiés dans toute leur étendue. Les racines de divers ordres ont été examinées à divers niveaux. Quant aux appendices, la structure du pétiole et du limbe a été décrite pour les feuilles 1, 2, 3, 5, 8 de la tige principale.

Ces recherches ont été faites au laboratoire de botanique de l'Université de Liège, sous la direction de M. le professeur A. Gravis, auquel je me fais un devoir d'adresser ici publiquement mes remerciements pour les conseils qu'il a bien voulu me donner pendant l'élaboration de mon travail.

Digitized by Google

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE ANATOMIQUE

DES

RENONCULACÉES

RANUNCULUS ARVENSIS *L.*

CHAPITRE PREMIER.

L'EMBRYON DANS LA GRAINE MÛRE.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Le fruit du *Ranunculus arvensis* L. est un polakène. Chaque akène, comprimé latéralement, présente deux faces garnies de pointes épineuses, dont la forme et la longueur varient d'une plante à l'autre (*). Il est terminé par un bec stylaire très visible. Dans l'angle inférieur de l'akène, au milieu d'un albumen abondant et dur, se trouve un embryon très petit (0,8^{mm} de longueur sur 0,3^{mm} de largeur), droit et dont les cotylédons ont leur surface parallèle aux faces latérales du carpelle. Pour la facilité de l'exposition, il est nécessaire d'orienter l'embryon. Nous considérerons comme plan de symétrie principal celui qui, passant par le centre de l'axe hypocotylé, est perpendiculaire à la surface de chaque cotylédon (pl. I, fig. 1).

(*) Baillon. *Histoire des plantes*, t. I, p. 35.

Digitized by Google

STRUCTURE.

Nous fixerons principalement notre attention sur les trois niveaux suivants :

A. Le milieu de l'axe hypocotylé;

B. La région supérieure où l'on trouve l'insertion des cotylédons;

C. La région inférieure où se trouve le sommet végétatif de la racine principale.

Les régions B et C ne peuvent être connues que par l'examen de plusieurs coupes successives.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.* — Symétrie rayonnée très nette. On y trouve de l'extérieur vers l'intérieur (pl. I, fig. 2) :

1. L'*épiderme* formé de cellules assez allongées dans le sens du rayon, limité extérieurement par une cuticule relativement mince;

2. Le *parenchyme cortical,* constitué par onze assises cellulaires environ. Les extérieures sont formées de cellules plus petites, polyédriques. Les intérieures présentent très nettement une disposition radiale de leurs éléments dont la largeur va en diminuant à mesure qu'on se rapproche du centre. La plus profonde de ces assises est un endoderme dont les éléments sont dans une alternance parfaite avec ceux qui leur sont immédiatement sous-jacents. Cet endoderme est d'ailleurs peu distinct et ne présente ni les plissements de la paroi, ni le contenu amylacé qui le caractérisent ordinairement;

3. Le *cylindre central,* délimité par un péricycle assez net : assise unique de cellules plus grandes que les autres alternant avec celles de l'endoderme et avec celles du tissu central. Le reste du massif est constitué par des éléments procambiaux, petits, à section polygonale, allongés dans le sens de l'axe, ainsi qu'on peut le vérifier sur une coupe longitudinale. Le diamètre du cylindre, qui comprend une dizaine de cellules, est à peu près le quart du diamètre total de la coupe.

Digitized by Google

B. *Région d'insertion des cotylédons.* — Une coupe pratiquée à la base du nœud cotylédonaire montre la même structure avec les différences signalées (pl. I, fig. 3) :

1° Le *parenchyme* cortical est moins épais;

2° Le *cylindre central* est plus large et formé d'un plus grand nombre de cellules qui, en même temps, ont un diamètre quelque peu plus petit.

Si, à partir de cet endroit, on examine les coupes successives, on voit le procambium du massif central se localiser en quatre cordons dont deux antérieurs et deux postérieurs. Ces cordons, dirigés très obliquement, s'anastomosent bientôt deux à deux, de façon à ne plus en former que deux : l'un antérieur et l'autre postérieur (pl. I, fig. 4). Ce sont les faisceaux cotylédonaires. Ils sont situés dans le plan principal de symétrie, à égale distance du centre et des bords de la coupe. Ils sont mal délimités et séparés par des cellules plus grandes, à section polygonale, sans méat, isodiamétriques, appartenant au méristème primitif, générateur de la tige principale.

En même temps, le nombre de couches constitutives du parenchyme cortical a diminué, et au niveau considéré (pl. I, fig. 5) les deux faisceaux procambiaux destinés à sortir dans les cotylédons ne sont séparés de l'épiderme que par cinq ou six assises; ils se sont donc notablement écartés du centre, et l'on peut dire que les faisceaux cotylédonaires sont insérés obliquement sur le massif central.

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé.* — Dans sa région inférieure l'axe hypocotylé montre une structure analogue à celle de la région A. On remarquera cependant (pl. I, fig. 6) que :

1° L'*épiderme* est remplacé par plusieurs couches de cellules disposées radialement. Ces cellules, moins régulières que celles de l'épiderme, n'ont pas de cuticule;

2° Le *parenchyme cortical* est formé d'un plus petit nombre d'éléments, les internes régulièrement disposés en files radiales; les deux ou trois couches externes ne présentent pas ce caractère;

3° Le *cylindre central* est moins considérable, ses cellules sont un peu plus grandes et le péricycle est beaucoup plus distinct.

Digitized by Google

Une coupe, pratiquée plus bas encore, à quelque distance de l'extrémité, montre des cellules à section polygonale appartenant au calyptrogène ou à la coiffe elle-même (pl. I, fig. 7).

Coupe longitudinale.

La coupe longitudinale de l'embryon suivant son plan de symétrie principal résume et complète ce qu'on vient d'observer sur des coupes transversales. On y retrouve (pl. I, fig. 8) :

A. *Milieu de l'axe hypocotylé :*

1° L'*épiderme ;*

2° Le *parenchyme cortical,* dont les couches profondes sont allongées dans le sens de l'axe, les externes, plus petites, étant plutôt polyédriques. Il atteint en cet endroit son maximum d'épaisseur;

3° Le *cylindre central,* formé d'éléments étroits, allongés dans le sens de l'axe. Sur la coupe longitudinale, il paraît assez mal délimité.

B. *Région d'insertion des cotylédons :*

Dans cette région on voit, insérés obliquement sur le cylindre central de l'axe, les deux faisceaux qui sortent dans les cotylédons et s'y prolongent presque jusqu'au bout.

Le parenchyme cortical devient de moins en moins épais et se continue avec le parenchyme des cotylédons.

Le méristème primitif, avec ses cellules polyédriques, isodiamétriques, se retrouve entre les deux faisceaux. Il est recouvert par le dermatogène qui est en continuation directe avec l'épiderme des cotylédons.

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé :*

1° Un peu avant d'arriver au sommet radiculaire, à la surface de l'axe hypocotylé, s'observent deux couches de cellules qui, à mesure qu'on descend, sont bientôt remplacées par trois, quatre, cinq, etc., assises semblables. Cette coiffe primordiale est formée vers le bas d'éléments serrés les uns contre les autres, indice d'un cloisonnement actif dans cette région. A l'extrémité se trouvent encore des traces du suspenseur;

Digitized by Google

2° Le *parenchyme cortical* est formé à la base par deux cellules initiales qui se comportent différemment. L'extérieure semble donner naissance à une seule couche localement subdivisée dans les régions les plus larges. L'intérieure donne naissance à deux assises dont une, la plus interne, produit de bonne heure, par des cloisonnements répétés, les files radiales centripètes observées sur les coupes transversales, dont l'autre, au contraire, ne se divise que plus haut pour constituer de la même façon le reste du parenchyme cortical;

3° Le *cylindre central* est terminé inférieurement par un petit groupe d'initiales polyédriques, destinées à engendrer plus tard le faisceau de la racine principale.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE L'APPAREIL VÉGÉTATIF.

Ce développement a été étudié à trois stades de la germination. Pour chaque stade, trois régions. Même marche que pour l'embryon.

STADE I.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Début de la germination; la moitié inférieure de l'axe hypocotylé se montre au dehors.

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.* — Diffère à peine du niveau correspondant dans l'embryon. Le diamètre est plus large et cette augmentation résulte de ce que (pl. I, fig. 9) :

1° L'*épiderme* est un peu plus allongé dans le sens du rayon; il est formé d'un plus grand nombre de cellules;

2° Le *parenchyme cortical* présente un accroissement sensible de ses éléments qui laissent entre eux de plus grands méats;

Digitized by Google

3° Le *cylindre central* s'est agrandi aussi, moins cependant que le tissu précédent, et ses cellules se sont subdivisées. De plus, aux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de symétrie, on remarque quelques éléments différenciés qui indiquent les pôles libériens (*).

B. *Région d'insertion des cotylédons.* — La coupe pratiquée à la base du nœud cotylédonaire (pl. I, fig. 10) montre, outre les deux pôles libériens comme ci-dessus, deux pôles ligneux, l'un antérieur, l'autre postérieur : chacun de ces pôles est occupé par une trachée séparée de l'endoderme par deux rangs de cellules péricycliques.

La différenciation de ces trachées se fait de haut en bas, ce qui explique qu'elles ne sont pas encore visibles dans la coupe (pl. I, fig. 9) pratiquée au milieu de l'axe hypocotylé.

Si l'on examine ensuite les coupes successives en se rapprochant du sommet (fig. 11 à 15), on voit sur une de ces coupes (fig. 11), au pôle antérieur, une nouvelle trachée plus étroite, accolée contre la première du côté externe. Un peu plus haut, on la voit s'élargir et se continuer dans le faisceau cotylédonaire, tandis que l'autre trachée se rétrécit, puis disparaît. Plus haut, au pôle postérieur, il y a un contact semblable entre une trachée de l'axe hypocotylé et la trachée initiale du faisceau cotylédonaire postérieur.

Simultanément les deux pôles libériens se sont bifurqués et les quatre branches, très obliques, s'inclinent deux à deux en avant et en arrière, de telle sorte que, à un niveau peu inférieur à celui où se détachent les deux cotylédons, on trouve (fig. 15) deux faisceaux cotylédonaires unipolaires séparés par le méristème primitif de la tige principale.

Je ferai remarquer que le contact entre les deux trachées, soit au pôle antérieur, soit au pôle postérieur, ne se fait pas toujours dans un plan rigou-

(*) Dans une note insérée dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DE PARIS, t. CXII, n° 8, M. Pierre Lesage annonce que « le liber différencie plus tôt que le bois la paroi de ses cellules » dans la racine de l'*Allium Cepa* et de plusieurs autres plantes. Ce fait n'est pas nouveau ; M. O. Lignier, notamment, a déjà remarqué que *la différenciation libérienne précède la différenciation ligneuse* dans certains faisceaux de la tige du *Melaleuca hypericifolia* (*Recherches sur l'anatomie comparée des Calycanthées, des Melastomacées et des Myrtacées* par O. Lignier ; dans les ARCHIVES BOTANIQUES DU NORD DE LA FRANCE, t. III, p. 387). [*Note ajoutée pendant l'impression.*]

Digitized by Google

reusement radial. Ensuite, la différenciation s'opère parfois plus tôt à l'un des pôles (l'antérieur) qu'à l'autre.

Coupe longitudinale.

La coupe longitudinale représentée planche I, figure 16, montre très clairement aussi, sous le cotylédon postérieur, le contact entre la trachée polaire de l'axe hypocotylé et la trachée polaire du faisceau cotylédonaire. Sous l'autre cotylédon existaient déjà plusieurs trachées différenciées masquant le contact; elles n'ont pas été représentées.

STADE II.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les cotylédons dégagés du péricarpe sont étalés et concourent déjà à l'élaboration. Aucune trace de feuille n'est visible à l'œil nu. Il existe cependant déjà quelques petites feuilles qui, avec le sommet végétatif, sont cachées par les pétioles cotylédonaires très allongés.

L'axe hypocotylé, reconnaissable à sa surface lisse (formée par l'épiderme) de 12 à 15 millimètres de long, a une épaisseur d'un peu plus d'un millimètre en son milieu (pl. II, fig. 17).

La racine principale, dont la surface est terne (constituée par l'assise pilifère), est au moins deux fois aussi longue que l'axe hypocotylé. Au niveau où la surface change ainsi d'aspect, niveau que nous appellerons collet superficiel, se trouvent deux radicelles très apparentes, l'une antérieure, l'autre postérieure, et, en outre, plusieurs autres radicelles moins développées. Il en existe aussi plus bas.

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.* — De l'extérieur vers l'intérieur :

1° *Épiderme.* Cellules un peu allongées dans le sens radial, garnies d'une cuticule assez épaisse. Les parois radiales, très minces, se chiffonnent avec la plus grande facilité. Les parois profondes, accolées au parenchyme cortical, sont plus résistantes (pl. II, fig. 18*a*);

Digitized by Google

2° *Parenchyme cortical.* Onze assises circulaires de cellules arrondies laissant entre elles d'assez grands méats triangulaires ou quadrangulaires. Parenchyme cortical centripète, présentant encore la disposition rayonnante résultant de son mode de formation. Endoderme peu caractérisé;

3° *Cylindre central.* Péricycle constitué par une seule couche de cellules derrière les massifs libériens, mais formé de deux ou trois assises aux environs des pôles ligneux (pl. II, fig. 18*b*).

Faisceau bipolaire bien différencié, arrivé au stade primaire; ses pôles ligneux se trouvent dans le plan principal de symétrie de la plantule. Ces pôles ligneux cunéiformes se composent d'une vingtaine de trachées dont les plus petites sont tournées vers l'extérieur. La partie centrale n'est pas différenciée. A droite et à gauche, on trouve, alternant avec les pôles ligneux, deux massifs libériens déjà bien développés, dont les éléments, pour la plupart de petite dimension, se reconnaissent facilement. Les deux massifs libériens sont séparés de la partie ligneuse par des cellules à parois minces, allongées dans le sens tangentiel, qui constituent l'ébauche de la zone cambiale.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.* — Dans la région supérieure de l'axe, à la base du nœud cotylédonaire, on remarque (pl. II, fig. 19) que le cylindre central est beaucoup plus important. Son diamètre s'allonge perpendiculairement au plan principal de symétrie. Les massifs libériens font hernie vers l'extérieur et sont beaucoup plus développés. Le bois forme un massif continu, composé d'un grand nombre de trachées entremêlées de cellules non différenciées, à parois minces.

L'examen des coupes suivantes et aussi des coupes longitudinales pratiquées dans cette région, m'a conduit à considérer le massif ligneux continu de la figure 19, comme possédant quatre pôles : un antérieur et un postérieur, à développement centripète, qui se continuent dans toute l'étendue de la racine principale; un à droite (t_1 fe_1) et un à gauche (t_1 fe_2), à développement centrifuge, qui vont se continuer respectivement dans la feuille $_1$ et la feuille $_2$. Ces quatre pôles sont constitués par des trachées étroites, très longues, lâchement spiro-annelées.

Digitized by Google

Entre ces quatre pôles se trouvent d'autres trachées plus larges, courtes, à spirales serrées. Elles forment comme un trait d'union entre les trachée polaires. Elles n'existent d'ailleurs que dans le nœud cotylédonaire. (Comparez la figure 19 à la figure 18.)

A un niveau un peu supérieur (pl. II, fig. 20), on trouve les deux pôles antérieur et postérieur très écartés l'un de l'autre, fuyant obliquement dans les cotylédons, en même temps que les faisceaux cotylédonaires. Une moelle assez large existe au centre de l'organe, et autour de cette moelle se distinguent six faisceaux libéro-ligneux dont deux latéraux (pl. II, fig. 21) avec trachées différenciées, continuation de celles qui sont désignées par t_1 fe_1 et t_1 fe_2 de la coupe (pl. II, fig. 19.) Ce sont les faisceaux sortants médians des feuille $_1$ et feuille $_2$. En outre, quatre faisceaux réparateurs au stade du procambium (A, B, C, D).

Une coupe pratiquée dans le bourgeon terminal montre (pl. II, fig. 22) :

1° Une gaine constituée par la concrescence des pétioles cotylédonaires. On y remarque les deux faisceaux qui se rendent l'un dans le cotylédon antérieur, l'autre dans le cotylédon postérieur;

2° La feuille $_1$ et la feuille $_2$, l'une à droite, l'autre à gauche, sensiblement opposées, possédant chacune un faisceau médian à trachées différenciées et deux faisceaux latéraux au stade procambial;

3° La feuille $_3$ et la feuille $_4$, faisant entre elles un angle d'à peu près deux cinquièmes de circonférence. Elles ne possèdent chacune qu'un seul faisceau au stade du procambium;

4° La section de la tige au stade méristématique.

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé.* — Une coupe transversale dans la racine principale, un peu au-dessous du collet superficiel, montre (pl. II, fig. 23) :

1° Vers l'extérieur les traces de l'assise pilifère;

2° Au-dessous le parenchyme cortical avec deux sortes de cellules : les externes, petites, à petits méats; les autres disposées en files radiales diminuant de grandeur à mesure qu'on se rapproche du centre et se terminant vers l'intérieur par l'endoderme;

Digitized by Google

3° Le faisceau limité par un péricycle très net formé par une seule assise de grandes cellules. Les deux massifs ligneux cunéiformes se développent en direction centripète : ils présentent de petits éléments vers l'extérieur et des cellules centrales, de grand diamètre, non différenciées. Deux massifs libériens alternent avec les pôles ligneux; on y reconnaît facilement les cellules grillagées. Aucune zone cambiale n'est encore visible.

Les coupes successives montrent qu'à un niveau supérieur les éléments ligneux sont plus nombreux et le cambium apparent. Les éléments vasculaires de la racine, au moins ceux des pôles, semblent en continuité parfaite avec ceux de l'axe hypocotylé. Les massifs libériens sont aussi dans le prolongement l'un de l'autre. Ce faisceau n'est donc que la continuation de celui qu'on observe au milieu de l'axe hypocotylé.

Aux environs du collet superficiel s'insèrent des racines latérales. Deux d'entre elles, qui sont les plus proches de ce collet, sont déjà développées et ont leurs trachées en contact avec les pôles du faisceau de la racine principale. Les autres ne sont guère développées et semblent disposées par paires des deux côtés du plan de symétrie. La région de contact entre ces racines latérales et la racine principale est marquée par un diaphragme aquifère, constitué par de nombreuses trachées courtes et de grand diamètre.

Coupe longitudinale.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.* — Une coupe longitudinale, pratiquée suivant le plan de symétrie principal, montre en cet endroit que la lame ligneuse du faisceau bipolaire de l'axe commence aux pôles par une trachée spiro-annelée, très longue, de très petit diamètre. Viennent ensuite des éléments spiralés plus larges, très longs aussi, puis de grandes trachées spiralées à spires très rapprochées; elles sont manifestement plus courtes, et on peut voir que ces trachées, placées dans le prolongement l'une de l'autre, sont réunies entre elles par des faces en biseau.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.* — Dans la région de contact on peut constater que les trachées occupant le centre sont entremêlées de cellules non différenciées de même longueur. On observe de

Digitized by Google

plus que ces trachées centrales sont beaucoup plus courtes. Sur une coupe tangentielle, faite un peu en dehors du plan principal de symétrie, on peut vérifier, comme nous l'avons dit antérieurement, que les trachées initiales t_1 fe_1, t_1 fe_2, sont étroites, spiro-annelées, tandis que les autres sont larges, à spires serrées et très courtes (pl. II, fig. 24).

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé.* — Dans cette région la coupe longitudinale montre très bien à l'insertion des radicelles les trachées courtes et larges qui constituent les diaphragmes aquifères dont il a été parlé plus haut. Elle montre de plus que le faisceau de la racine principale est bien la continuation du faisceau de l'axe hypocotylé (pl. II, fig. 25).

STADE III.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

La plantule a déjà commencé à prendre un certain développement. Quatre petites feuilles sont visibles à l'extérieur, deux autres sont cachées par les précédentes (pl. III, fig. 29). Les cotylédons ont atteint leur maximum de développement et nous saisirons cette occasion pour faire connaître leur structure.

STRUCTURE DE L'AXE HYPOCOTYLÉ.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (pl. III, fig. 30). — On retrouve une structure analogue à celle que l'on y rencontre au stade précédent :

1° *Cellules épidermiques* recloisonnées radialement et beaucoup plus nombreuses;

2° *Parenchyme cortical* formé d'éléments plus grands. Méats plus grands aussi, parfois très irréguliers. L'endoderme perd de sa netteté;

3° *Péricycle* abondamment recloisonné vis-à-vis des pôles ligneux, où l'on distingue des files radiales très nettes de cellules à parois minces, destinées à se différencier plus tard. C'est là l'origine des deux arcs générateurs qui doivent compléter la zone cambiale continue. Derrière les massifs

Digitized by Google

libériens le péricycle ne présente qu'une seule couche, parfois subdivisée cependant.

Entre les deux pôles plusieurs trachées se sont encore différenciées et, en outre, de chaque côté se trouvent des vaisseaux entremêlés de cellules à parois minces, issus de l'activité des zones cambiales. De l'autre côté, le cambium a donné naissance à une bande assez large de liber secondaire contre chaque massif libérien primaire.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.* — A la base du nœud cotylédonaire on trouve une disposition semblable à celle de la planche II, figure 19, sauf qu'il existe une zone cambiale continue comme dans la planche III, figure 30. Cette zone génératrice a déjà produit des éléments ligneux et libériens secondaires à droite et à gauche. Quelques coupes plus haut (pl. III, fig. 31), il existe une moelle, et l'on distingue nettement de chaque côté du plan de symétrie trois faisceaux à développement centrifuge. Ces faisceaux sont : les deux médians sortants des feuille$_1$ et feuille$_2$ et quatre faisceaux réparateurs qui se rendent dans la tige principale. Nous les désignerons par la suite par les lettres A, B, C, D.

Plus haut encore, comme dans la planche II, figure 20, les deux faisceaux cotylédonaires sortent, entraînant avec eux les trachées polaires antérieures et postérieures. L'examen des autres coupes successives permet de reconnaître le parcours des faisceaux dans la tige principale et leur sortie dans les premières feuilles. Ce parcours est représenté planche III, figure 32. On remarquera, alternant avec les pôles antérieur et postérieur (figurés par des lignes interrompues), les groupes AM$_1$B et CM$_2$D. Les faisceaux A, B, C, D sont réparateurs dans la tige principale. Ils donnent insertion aux faisceaux cotylédonaires antérieur et postérieur, puis aux faisceaux sortants des feuilles 1, 2, 3, 4, 5. Chacune des trois premières feuilles reçoit trois faisceaux, dont un médian et deux latéraux M, L, L; les deux dernières n'ont que le médian différencié. Nous aurons l'occasion de revenir sur les détails de ce parcours en étudiant la tige principale adulte.

Il résulte de l'observation attentive de plusieurs individus arrivés au stade que nous décrivons :

Digitized by Google

1° Que l'un des faisceaux cotylédonaires sort à un niveau plus bas que l'autre ;

2° Que les faisceaux foliaires latéraux, issus des réparateurs les plus voisins de ce cotylédon, se détachent avant les faisceaux correspondants du côté opposé. Il semble que la plantule soit plus large, plus développée du côté d'un cotylédon que de l'autre. C'est la région la plus développée que j'ai toujours considérée comme antérieure.

Dans d'autres genres que j'ai eu l'occasion d'étudier déjà (*Delphinium, Nigella,* etc.), cette irrégularité est beaucoup plus accentuée.

Enfin la section pratiquée dans le bourgeon terminal est représentée, planche III, figure 33. Il est facile de supposer une spirale partant du cotylédon antérieur, se dirigeant vers la gauche de l'observateur supposé au centre de la tige, passant successivement par le cotylédon postérieur, les feuilles 1, 2 .... 6. L'angle de divergence n'est pas constant. Du cotylédon antérieur au cotylédon postérieur il y a un peu moins d'une demi-circonférence; du cotylédon postérieur à la feuille$_1$ il y a un quart de circonférence environ; de la feuille$_1$ à la feuille$_2$, sensiblement une demi. Ces angles, mesurés exactement, sont transcrits dans le tableau suivant :

cot$_a$		
	180°	
cot$_p$		
	87°	
fe$_1$		
	178°	
fe$_2$		Divergence moyenne : 145°, deux cinquièmes de circonférence.
	133°	
fe$_3$		
	142°	
fe$_4$		
	145°	
fe$_5$		

La planche III, figure 33 montre que le M_4 se trouve précisément dans le plan principal de symétrie en face du cotylédon antérieur. Pour arriver à cette feuille, en partant du cotylédon antérieur, on doit passer par cinq

Digitized by Google

organes appendiculaires et faire deux tours de spire, ce qui démontre déjà que la divergence *moyenne* pour les six premiers appendices est de deux cinquièmes de circonférence. C'est cette divergence moyenne qui sera réalisée pour les feuilles qui se développeront ultérieurement.

STRUCTURE DES COTYLÉDONS.

A ce stade que nous venons de faire connaître, les cotylédons sont arrivés à leur complet développement. Les pétioles concrescents à leur base mesurent 8 à 9 millimètres de longueur, 1 à 2 millimètres de largeur. Le limbe, de forme ovale avec sommet obtus, mesure 10 à 11 millimètres de longueur, 6 à 8 millimètres de largeur. Sa nervation consiste en une nervure médiane, deux nervures latérales détachées de la médiane dans sa région inférieure, deux autres distinctes à partir de la base du limbe et enfin de très fines nervures anastomosées (pl. IV, fig. 52).

Quant à la structure, rappelons d'abord que deux faisceaux se rendent dans chaque cotylédon en se fusionnant dès leur sortie de l'axe hypocotylé; que l'un des pôles antérieur ou postérieur accompagne le faisceau cotylédonaire sortant, de telle manière que dans la région concrescente des pétioles chaque faisceau cotylédonaire montre, outre le bois primaire centrifuge, quelques trachées actuellement écrasées, qui se sont développées dans un ordre centripède (pl. II, fig. 20). Cette disposition est beaucoup plus évidente chez le *Delphinium*, la *Nigella* et d'autres Renonculacées, ainsi que j'ai pu le constater moi-même planche II, figures 27 et 28; elle l'est aussi chez d'autres plantes, comme le *Raphanus*, par exemple, ainsi que le figure M. Gérard (*).

La section transversale, vers le milieu du pétiole (pl. IV, fig. 60), présente trois faisceaux normalement orientés et constitués, entourés de quelques cellules à parois légèrement épaissies.

La coupe au milieu du limbe montre :

1° L'*épiderme* supérieur et inférieur avec stomates;

(*) *Recherches sur le passage de la racine à la tige*, par R. Gérard (ANNALES DES SCIENCES NATURELLES, 6e série, t. XI, 1881), pl. XV, fig. 15.

Digitized by Google

2° Le *mésophylle :* parenchyme en palissades peu caractérisé et parenchyme spongieux à petits méats. Pas de cristaux, pas de poils, pas de glandes.

L'épiderme, vu de face, ne diffère pas sensiblement de celui des feuilles.

CHAPITRE III.

PLANTE ADULTE.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

L'axe hypocotylé, beaucoup plus mince que la base de la tige principale, varie ordinairement de 2 à 3 centimètres de longueur. Il se continue inférieurement dans une racine principale, toujours peu développée et ne portant que quelques radicelles grêles. Au contraire, de fortes racines adventives se sont développées aux premiers nœuds de la tige principale. Ces racines portent elles-mêmes quelques ramifications grêles et sont disposées autour de l'axe hypocotylé avec lesquelles on pourrait les confondre. Cette disposition (pl. III, fig. 34) rappelle d'une façon surprenante celle que présentent certaines plantules monocotylées.

Au-dessus des cotylédons flétris, au milieu d'une rosette de trois ou quatre feuilles, la plupart flétries aussi, on voit s'élever la tige principale. Cette tige, dont la hauteur ne dépasse guère 30 centimètres, se termine par une fleur. Elle porte huit feuilles alternes, insérées suivant l'angle moyen de divergence de deux cinquièmes. Les trois ou quatre premières sont radicales, portées par des entre-nœuds extrêmement courts; les autres sont espacées par des entre-nœuds d'une longueur variable. A l'aisselle de chaque feuille se trouve un bourgeon plus ou moins développé. Ceux de la base sont généralement peu ou point apparents. Les tiges axillaires, insérées vers le haut de la tige principale, sont ordinairement très fortes. A l'aisselle de la huitième feuille le rameau axillaire est aussi fort que l'axe principal, qu'il

Digitized by Google

semble continuer directement. Chaque tige secondaire porte à son tour quelques feuilles seulement, puis, comme la tige principale, se termine par une fleur, après avoir donné un ou plusieurs rameaux axillaires dont le dernier semble dans la continuation de la tige secondaire.

Les feuilles palmatilobées sont polymorphes. A la base elles sont longuement pétiolées, à limbe peu découpé. Les supérieures sont à peu près sessiles, à lobes plus nombreux et profondément découpés. Entre les deux on rencontre des transitions.

Remarque. Les nœuds ne sont pas toujours également espacés l'un de l'autre. On trouve très souvent des nœuds très rapprochés, d'autres très écartés. Il arrive même que l'entre-nœud est tellement court que les deux nœuds semblent confondus. Ce fait se présente surtout au sommet des axes secondaires, qui présentent alors l'aspect de cymes bipares, l'axe se terminant toujours par une fleur.

D'un autre côté, les tiges de second ordre présentent parfois, comme la principale, plusieurs nœuds basilaires. A ces nœuds prennent naissance des feuilles et même des rameaux de troisième ordre, qui alors paraissent insérés sur la tige principale. Ce fait se présente d'ailleurs aussi sur les axes d'autre ordre.

STRUCTURE.

§ I. — Axe hypocotylé.

Sur une coupe transversale faite au milieu de l'axe hypocotylé, on peut reconnaître (pl. III, fig. 35) :

1° L'*épiderme* qui existe encore ;

2° Le *parenchyme cortical*. Même aspect qu'aux stades précédents. Cellules à contenu très réduit, souvent écrasées vers l'extérieur. L'endoderme, au contraire, est assez peu reconnaissable. Ses éléments se sont recloisonnés radialement, quelquefois même tangentiellement, et leurs parois se sont épaissies ;

3° Au centre, le *massif ligneux primaire* à deux pôles entouré de toute

Digitized by Google

part de bois secondaire. Celui-ci, composé de vaisseaux et de fibres, a été engendré par une zone cambiale circulaire qui a cessé de fonctionner et qui même le plus souvent n'existe plus. Vers la périphérie on rencontre un assez grand nombre d'*îlots libériens*, pour la plupart de formation secondaire. Deux d'entre eux, situés dans le plan perpendiculaire au plan principal de symétrie, sont plus forts que les autres, s'avancent davantage vers l'intérieur et sont constitués de liber primaire et de liber secondaire. Le *péricycle* s'est épaissi et ne se distingue pas des fibres ligneuses.

Dans le nœud cotylédonaire les coupes accusent la même structure que précédemment, sauf que le bois secondaire et le liber secondaire y sont beaucoup plus développés. Ce développement des tissus secondaires est surtout visible en avant.

§ II. — Tige principale.

La tige principale présente huit nœuds, puis se termine par une fleur.

Une coupe faite au milieu du premier entre-nœud présente six faisceaux (pl. III, fig. 36) disposés en deux groupes de trois, à droite et à gauche du plan principal de symétrie. Ces deux groupes existaient déjà dans la coupe (pl. III, fig. 31) du stade précédent. On y distingue de chaque côté un faisceau sortant médian : M_1, M_2 des feuille$_1$ et feuille$_2$, puis deux réparateurs : A, D; B, C; donc en tout deux sortants médians et quatre réparateurs.

La sortie dans la feuille$_1$ est parfaitement symétrique par rapport au plan médian de la feuille$_1$; les faisceaux B et C fournissent les latéraux. Il en résulte que les faisceaux latéraux destinés à la feuille$_1$ croisent en sortant les faisceaux latéraux destinés à la feuille$_2$ (pl. III, fig. 37).

Immédiatement après la sortie dans la feuille$_2$, le faisceau A se bifurque de façon qu'une coupe transversale au milieu du troisième entre-nœud montre cinq faisceaux réparateurs et non plus quatre (pl. III, fig. 37). De ces cinq faisceaux, deux, A′ et A″, fournissent les latéraux L_3 et L_4 aux feuille$_3$ et feuille$_4$. Le réparateur C du côté opposé fournit les autres latéraux aux mêmes feuilles. Les deux autres B et D sont inactifs à cette hauteur. Ces deux feuilles sont symétriquement insérées par rapport à un plan qui passerait

Digitized by Google

par le milieu des réparateurs C et A. Les faisceaux sortants latéraux fournis par les réparateurs A', A'' s'entre-croisent en sortant, mais il n'en est plus de même des faisceaux sortants latéraux fournis par le réparateur C. Cette différence dans la manière de se comporter des faisceaux sortants se retrouve à chaque paire de feuilles suivante.

La coupe transversale dans un des entre-nœuds suivants montre toujours (pl. III, fig. 38) :

1° Cinq faisceaux réparateurs. Un ou plusieurs de ces faisceaux est parfois représenté par deux branches. Il n'est pas toujours aisé de distinguer les faisceaux réparateurs des autres faisceaux sur une coupe quelconque, surtout quand l'entre-nœud est long; il est alors indispensable de recourir au nœud ;

2° Deux faisceaux sortants médians : l'un pour la feuille prochaine, l'autre pour la feuille suivante;

3° Quatre faisceaux sortants latéraux correspondant aux faisceaux sortants médians ;

4° Un nombre variable de faisceaux destinés aux bourgeons axillaires insérés plus haut.

Après la sortie dans la feuille$_8$, à la base du pédoncule floral par conséquent, chacun des réparateurs C, D, A', A'' se divise en deux comme l'avait fait le faisceau A dans l'entre-nœud$_3$; B est déjà bifurqué dans l'entre-nœud$_8$. De cette façon le pédoncule est parcouru par dix faisceaux libéro-ligneux : cinq plus forts, cinq plus petits alternants.

Parcours. Le parcours des faisceaux dans une tige adulte (pl. III, fig. 40) se laisse facilement diviser en deux régions déjà indiquées par les caractères extérieurs :

1° Région inférieure de la tige principale : les entre-nœuds y sont courts; l'insertion des feuilles 1, 2, 3, 4 se fait comme il a été décrit au stade précédent (pl. III, fig. 32). On remarquera, en outre, la division du faisceau réparateur A en deux faisceaux : A', A'';

2° Région supérieure de la tige principale : les entre-nœuds sont longs; cinq réparateurs.

Digitized by Google

Chaque feuille reçoit trois faisceaux sortants, dont un médian fourni par l'un des deux réparateurs voisins : ce faisceau parcourt la longueur de deux entre-nœuds avant de sortir; deux faisceaux sortants latéraux de longueur inégale, celui du côté antérieur ayant toujours une longueur beaucoup plus grande que celui du côté postérieur. Ce nouveau fait semble confirmer l'existence d'un plus grand développement au-dessus du cotylédon que nous avons *considéré comme antérieur.*

Phylotaxie. Les feuilles de l'individu étudié sont insérées suivant une spire génératrice dextre. L'angle de divergence des premiers appendices varie considérablement. On observe des angles sensiblement égaux à ceux constatés pour le stade précédent. A partir de la feuille$_4$, l'angle de divergence est constant et mesure 145°, soit deux cinquièmes de circonférence. La disposition phylotaxique d'une tige principale est représentée par la planche III, figure 41, qui est une projection horizontale de cette tige, dans laquelle on a tenu compte non seulement de la divergence, mais encore de la distance qui sépare le point d'émergence de la feuille du centre de la tige avant la formation des tissus secondaires. C'est ce qui explique pourquoi la ligne spiralée s'écarte du centre de la figure au lieu de s'en rapprocher.

Histologie. Avant de passer à l'étude des ramifications, il nous resterait peut-être une chose à faire : dire un mot de l'histologie de la tige principale. Il suffirait pour cela de regarder de plus près une coupe transversale faite au milieu d'un entre-nœud quelconque, de préférence d'un entre-nœud allongé de la tige :

1° *Épiderme :* analogue à celui de l'axe hypocotylé ;

2° *Tissu fondamental :* deux régions distinctes :

a) Région externe : parenchyme vert, méatique, homogène, sans collenchyme vers l'extérieur.

b) Région centrale : à peu près incolore, contenant des granules amylacés. Dans la plante adulte, surtout quand elle est vigoureuse, la moelle est remplacée par une vaste lacune allant de bas en haut, interrompue seulement aux environs des nœuds et à la partie basilaire de la tige, par conséquent

Digitized by Google

où les nœuds sont excessivement rapprochés. Quelques rangées de cellules parenchymateuses restent seules accolées intérieurement à la bande circulaire des faisceaux libéro-ligneux.

c) Région interfasciculaire : cellules épaissies, présentant les caractères du sclérenchyme. C'est le seul tissu de soutien de la tige. Il se continue en avant et en arrière des faisceaux, de façon à les entourer complètement. D'après M. Marié, il serait dû au péricycle. L'endoderme qui le limiterait extérieurement n'est guère caractérisé;

3° Les *faisceaux* plus ou moins nombreux sur un seul cercle, les plus petits étant un peu plus écartés du centre de la tige :

Bois primaire : première trachée précédée de quelques éléments procambiaux non différenciés (fibres primitives de M. Bertrand). Ces trachées et ces fibres primitives sont plus nombreuses dans les faisceaux sortants que dans les faisceaux réparateurs, ce qui permet généralement de les reconnaître un ou deux entre-nœuds avant leur sortie.

Bois secondaire : vaisseaux et trachéides. Les vaisseaux forment deux séries latérales qui laissent entre elles les trachéides et les massifs libériens (*).

Cambium : deux ou trois rangées radiales de petites cellules dont l'activité s'arrête de bonne heure.

Liber secondaire : massifs petits, arrondis, formés de cellules grillagées et de cellules-annexes bien distinctes : les premières très longues, les secondes étroites, contenant protoplasme et noyau.

Liber primaire : quelques éléments, le plus souvent épaissis, à vitalité très courte.

Gaine fasciculaire : cellules étroites, fortement épaissies, passant insensiblement au sclérenchyme du tissu fondamental.

Dans la région des feuilles radicales les faisceaux sont accompagnés de productions secondaires assez fortes, dont le parcours est analogue à celui des productions primaires. Tous les faisceaux vers la base sont fusionnés laté-

(*) Cette disposition est signalée comme caractéristique des Renonculacées par M. Vesque (*loc. cit.*, p. 22). M. Marié l'indique également et la rapproche de la disposition si fréquente des faisceaux des plantes monocotylées.

Digitized by Google

ralement par leurs productions secondaires. Les faisceaux sortants ne se détachent de la couronne que fort peu de temps avant leur sortie.

§ III. — Tiges axillaires.

En règle générale, les nœuds de la base ne présentent pas de bourgeons axillaires développés. Il n'y a de tiges axillaires développées à ces nœuds que dans les plantes très vigoureuses. Le quatrième, le cinquième même n'en portent généralement que de très faibles. Les nœuds six, sept, huit, au contraire, produisent des ramifications de plus en plus vigoureuses, à tel point, comme nous l'avons déjà dit, que le rameau du huitième nœud semble continuer directement la tige principale. Ces rameaux, quel que soit l'ordre auquel ils appartiennent, possèdent en général un nombre de feuilles bien moindre que la tige principale. Ce nombre diminue de telle sorte que les rameaux d'un ordre élevé ne portent parfois qu'une feuille ou deux.

Si l'on fait une coupe transversale dans l'entre-nœud du rameau qui suit immédiatement son insertion sur la tige, on trouve, dès le début, une structure déjà assez compliquée. Le plus souvent on y rencontre autant de faisceaux que l'on en trouve sur une coupe transversale faite au milieu de l'entre-nœud de la tige principale, qui se trouve immédiatement au-dessous du nœud qui a fourni le rameau. C'est ainsi qu'une coupe transversale dans l'entre-nœud huit de la tige principale présente vingt faisceaux; on en rencontre le même nombre dans le premier entre-nœud visible du rameau inséré au nœud huit. Ce rameau, qui est court, a d'ailleurs une structure analogue à ceux auxquels il donne insertion, de telle sorte que le dernier nœud de la tige principale réalise, à très peu de chose près, le maximum de complication que l'on peut trouver chez le *Ranunculus arvensis*.

La structure maxima n'est cependant pas bien déterminée.

Elle est fonction de la vigueur de la plante. Le nombre de faisceaux dans les entre-nœuds supérieurs est variable d'une plante à l'autre. Dans les plantes vigoureuses, les cinq systèmes de réparateurs sont représentés par un plus grand nombre de faisceaux que dans les plantes peu vigoureuses.

Digitized by Google

Quant à la question de savoir comment les faisceaux d'un rameau axillaire prennent insertion sur ceux de la tige mère, il est difficile de l'établir en détail. Avant la sortie des faisceaux foliaires on observe un nombre variable de faisceaux qui se ramifient et s'anastomosent avant de sortir dans le rameau.

Ces faisceaux sont surtout nombreux pour les rameaux insérés vers le haut de la tige principale. Il est impossible de distinguer leur trajet tortueux (pl. IV, fig. 42, 43). Néanmoins, d'une façon générale, le bourgeon reçoit quatre faisceaux réparateurs de la tige mère. L'un des réparateurs destinés au bourgeon se bifurque bientôt, de telle sorte que dès le premier entre-nœud de la tige axillaire développée on retrouve cinq réparateurs (pl. IV, fig. 44). Cette manière d'être rappelle les faisceaux réparateurs à la base de la tige principale (pl. III, fig. 36 à 40).

L'*histologie* est la même que dans la tige principale. Un seul fait est à noter : la gaine sclérenchymateuse qui entourait et enclavait en quelque sorte les faisceaux libéro-ligneux a perdu énormément de son importance. Cela se conçoit d'ailleurs très bien : cette partie extrême, ne portant pas d'autre ramification, n'a pas besoin de squelette pour la supporter.

§ IV. — Feuilles.

Les feuilles ont une forme variable suivant la hauteur à laquelle on les considère. Les radicales sont très peu découpées; le pétiole va en augmentant de longueur de la feuille$_1$ à la feuille$_4$; en règle générale, la feuille$_1$ possède trois dents, la feuille$_2$ cinq, la feuille$_3$ sept, la feuille$_4$ neuf. A partir de la feuille$_4$, généralement le pétiole devient moins long pour être presque nul à la feuille$_8$; en même temps le limbe est de plus en plus découpé, de telle façon que la feuille$_5$ présente généralement trois lobes, la feuille$_6$ cinq, la feuille$_7$ sept, et la feuille$_8$ neuf lobes profondément séparés. Chacun de ces lobes peut ensuite être plus ou moins denté (pl. IV, fig. 53 à 57).

Chaque feuille reçoit trois faisceaux de la tige. De ces trois faisceaux les deux latéraux se divisent d'abord et très souvent dès la base du pétiole de la feuille. Vers la base du limbe, ces faisceaux se ramifient encore et s'anasto-

Digitized by Google

mosent; ils forment ainsi les nervures principales du limbe. Les ramifications les plus extérieures des nervures latérales forment, du moins dans les feuilles radicales, un faisceau de chaque côté qui suit les bords de la feuille pour se réunir au sommet à la nervure médiane. De plus, en ce qui concerne les mêmes feuilles, toutes les nervures sont réunies par un réseau de nervilles à mailles peu régulières. Les feuilles supérieures ne présentent ni l'un ni l'autre de ces deux faits.

Histologie. Des coupes transversales faites vers le milieu des pétioles foliaires montrent (pl. IV, fig. 61, 62, 63) un nombre de faisceaux qui varie de trois à sept, les ramifications se produisant plus ou moins bas dans ce pétiole, fait qui dépend de la vigueur de la feuille et de la plante qui la porte. Pour les premières feuilles les faisceaux médians sont entourés d'une zone continue de sclérenchyme; deux arcs séparés par des cellules non épaissies limitent en avant et en arrière les faisceaux latéraux; les ramifications de ces derniers n'en présentent généralement pas. Dans les feuilles supérieures on ne rencontre pas de cellules sclérifiées. En avant du bois primaire du faisceau médian on retrouve généralement des éléments procambiaux non différenciés. La section dans le pétiole des feuilles inférieures est plus arrondie que dans le pétiole des feuilles supérieures. Le parenchyme qui se trouve au-dessous de l'épiderme possède des cellules à chlorophylle arrondies, méatiques. Vers la partie centrale on rencontre de grandes cavités produites par la dégénérescence des cellules du parenchyme.

Une coupe transversale au milieu du limbe d'une feuille quelconque montre (pl. IV, fig. 58) :

1° L'*épiderme.* Cellules tabulaires, sans chlorophylle, à cuticule lisse. Stomates nombreux aux deux faces, formés de deux cellules de bordure au niveau de la surface et surmontés de deux replis saillants de la cuticule. Chambres respiratoires formées par un grand méat, surtout à la face externe. Vu de face, l'épiderme présente ses cellules à contours sinueux, ses stomates arrondis, sans cellules annexes (pl. IV, fig. 65). Poils unicellulaires, simples, droits, effilés, flexibles. Ils sont rares, même sur les feuilles jeunes, épars le long des nervures, principalement à la base des feuilles; quelques-uns s'observent aux bords des feuilles inférieures (pl. IV, fig. 64);

Digitized by Google

2° *Mésophylle.* Légèrement hétérogène. Deux rangs de cellules en palissades, courtes. Parenchyme spongieux : cinq ou six couches de cellules irrégulières, à grands méats. Chlorophylle régulièrement répartie dans tout le mésophylle. Pas de cristaux, pas de glandes ;

3° *Nervures.* Toutes constituées par un seul faisceau entouré d'un endoderme à peine caractérisé; pas de cellules sclérifiées. Celles de force moyenne montrent douze à quinze petites trachées et un îlot libérien sans cambium (pl. IV, fig. 59).

§ V. — Racines.

Il faut distinguer la racine principale, ses radicelles; les racines adventives à la base de la tige et leurs radicelles.

Racine principale. Faisceau bipolaire semblable à celui de l'axe hypocotylé, sauf que les deux massifs ligneux se rejoignent nettement au centre (pl. IV, fig. 45, 46, 47 et 48). Bois secondaire formant un épais massif continu. Zone cambiale éteinte. Deux massifs libériens seulement (dans l'axe hypocotylé il y en avait davantage) (pl. III, fig. 35).

Radicelles de la racine principale. Ordinairement faibles; le plus souvent bipolaires, comme la principale. Productions secondaires peu développées.

Racines adventives. Vers le sommet on observe un faisceau à trois ou quatre pôles ligneux se rejoignant au centre; un nombre égal de pôles libériens. Péricycle étroit, endoderme, parenchyme cortical, assise pilifère. A quelque distance de la base une zone cambiale continue a produit une couronne ininterrompue de bois secondaire. Le liber forme trois ou quatre îlots. Péricycle, endoderme, parenchyme cortical persistants (pl. IV, fig. 49, 50 et 51).

Racidelles des racines adventives. Elles ont des faisceaux à deux, trois ou quatre pôles lignéux. Peu de productions secondaires.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

L'*embryon* du *Ranunculus arvensis* possède un axe hypocotylé cylindrique, parcouru dans toute sa longueur par un cylindre de procambium, et deux cotylédons possédant chacun un faisceau de procambium. Ces cordons procambiaux cotylédonaires se rattachent au cylindre procambial en haut de l'axe hypocotylé.

Dès le *début de la germination*, deux trachées se différencient dans toute la longueur de l'axe hypocotylé, marquant les pôles d'un faisceau bipolaire à développement centripète. En même temps une trachée se montre également dans chacun des faisceaux cotylédonaires, dont le développement ultérieur sera centrifuge. Un peu au-dessous de l'insertion des cotylédons cette trachée vient au contact de la trachée polaire de l'axe hypocotylé.

Lorsque les deux *cotylédons* se sont *complètement développés*, l'insertion du faisceau cotylédonaire sur l'un des pôles centripètes de l'axe hypocotylé se fait dans une région assez étendue, qui comprend le nœud cotylédonaire et le bas des pétioles cotylédonaires. Cette insertion se fait par deux branches qui semblent entrainer avec elles le pôle centripète.

Plus tard encore, lorsque les *premières feuilles se développent*, les faisceaux foliaires et réparateurs de la tige principale apparaissent à leur tour, se différencient à droite et à gauche dans le nœud cotylédonaire et s'unissent aux deux pôles centripètes (dans l'axe hypocotylé) par de nombreuses trachées courtes (*).

Dans la *plante adulte*, les faisceaux de la tige principale débutent dans le

(*) Bertrand, *Théorie du faisceau*, p. 21 : « Les rapports des faisceaux d'âges différents s'établissent toujours par l'intermédiaire de massifs de trachées très courtes, globuleuses, dont l'ensemble forme ce que j'appelle, à cause de leur rôle physiologique, des diaphragmes aquifères. »

Digitized by Google

nœud cotylédonaire par six faisceaux, dont deux médians destinés aux feuille$_1$ et feuille$_2$ et quatre réparateurs : A, B, C, D. L'un de ceux-ci, l'antérieur gauche (A), se bifurquait bientôt dans l'exemple étudié (pl. III, fig. 40), de façon à donner naissance à cinq réparateurs : A′, A″, B, C, D et à présenter ainsi une symétrie pentamère qui se retrouve dans la fleur. La spirale phyllotaxique de cette tige était dextre, mais d'autres individus présentent une spire génératrice sénestre. Dans ceux-là, c'est le faisceau réparateur gauche antérieur qui se bifurque, de telle façon que les cinq réparateurs sont A, B′, B″, C, D. Il y a donc dans l'espèce *Ranunculus arvensis* L deux sortes d'individus, les uns dextres, les autres sénestres, et il m'a semblé que dans la nature ils sont en nombre à peu près égal.

D'autre part, tout individu de *Ranunculus arvensis*, convenablement étudié par la méthode des coupes successives, laisse reconnaître l'existence :

1° D'un plan principal de symétrie passant par le milieu des cotylédons.

2° D'une face antérieure caractérisée d'une manière générale par un plus grand développement :

Cotylédon antérieur inséré un peu plus bas que l'autre, et dont le faisceau se différencie un peu plus vite;

Bifurcation de l'un des réparateurs antérieurs à droite ou à gauche. Les faisceaux réparateurs postérieurs ne présentent jamais rien de semblable;

Faisceaux foliaires latéraux du côté antérieur toujours beaucoup plus longs que les faisceaux correspondants du côté postérieur;

Tissus secondaires de l'axe hypocotylé plus développés antérieurement (*).

Dans l'*Urtica dioïca*, l'existence d'un plan principal de symétrie a été également signalée par M. Gravis (**).

La *tige principale* porte un nombre défini d'appendices : deux cotylédons et huit feuilles dont les trois ou quatre premières sont rapprochées en une

(*) Un autre fait vient s'ajouter aux précédents chez la *Nigella* et le *Delphinium*. La feuille$_4$, qui se trouve exactement au-dessus du cotylédon antérieur, se distingue de ses voisines par le fait que son médian est inséré à la fois sur les deux réparateurs voisins.

(**) *Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers*, publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XLVIII, in-4° (pp. 71, 128, 217), 1884.

Digitized by Google

rosette voisine du sol; elle se termine par une fleur. On doit la considérer comme une individualité nettement définie, laquelle porterait des individus semblables, c'est-à-dire des tiges axillaires terminées aussi par une fleur.

Ces *tiges axillaires*, en outre, sont formées comme la tige principale de deux régions : l'une inférieure, à nœuds rapprochés et souvent emprisonnés dans la tige mère, ne portant donc pas de feuilles, l'autre, visible extérieurement, portant quelques feuilles et présentant la structure qui caractérise la partie supérieure de la tige principale. Je crois donc qu'il convient d'interpréter comme nœuds très rapprochés les uns des autres les nombreuses ramifications et anostomoses que présentent les faisceaux avant leur sortie dans le bourgeon (*) (pl. IV, fig. 42 et 43).

Remarquons enfin une dernière ressemblance entre la tige axillaire et la tige principale. Comme cette dernière, le rameau débute par quatre faisceaux dont l'un bientôt se bifurque de telle sorte que cinq réparateurs se trouvent constitués. La base d'un bourgeon rappelle donc par la disposition de ses faisceaux l'insertion de la tige principale sur l'axe hypocotylé.

L'*Urtica dioïca* rappelle quelque chose de semblable (**).

En s'accentuant davantage, l'organisation du *Ranunculus arvensis* conduirait à celle d'une plante bisannuelle produisant une rosette de feuilles radicales, sans bourgeons, du milieu de laquelle la tige principale s'élèverait à l'état de hampe florale, ne portant plus que des bractées et des rameaux constituant les branches latérales de l'inflorescence. Ce port n'est guère réalisé dans les Renonculacées actuelles.

Les *feuilles* sont polymorphes. Les dix appendices de la tige principale se groupent en trois catégories : les cotylédons entiers, les feuilles radicales

(*) L'insertion des bourgeons, telle que je l'ai fait connaître, ne semble rentrer dans aucune des catégories que M. Van Tieghem distingue dans son *Traité de botanique*, 2e édition, page 779. C'est peut-être une disposition semblable que M. Vuillemin (*De la valeur des caractères anatomiques au point de vue de la classification des végétaux. Tige des composées*, par Paul Vuillemin. Paris, Baillière et fils, 1884) a rencontrée dans le rhizome de l'*Arnica* et d'autres composées. Dans ces plantes, le bourgeon aurait, d'après lui, une insertion périphérique et serait (p. 163) « un bourgeon agrégé, c'est-à-dire l'équivalent d'une réunion de bourgeons ordinaires ».

(**) A. Gravis, *loc. cit.*, pp. 71 et 73.

Digitized by Google

simplement dentées, les feuilles caulinaires profondément lobées. Les pétioles cotylédonaires concrescents engainent la tige; les feuilles radicales sont pétiolées; les autres, presque sessiles, passent à l'état de bractées.

Quant à la structure, elle varie peu. Il suffira de rappeler que l'épiderme porte partout des stomates aux deux faces. Les poils sont rares, le parenchyme relativement peu différencié, les cristaux et les glandes nuls.

Les *racines* appartiennent à quatre catégories; la racine principale a un faisceau toujours bipolaire, les autres un faisceau à deux, trois ou quatre pôles. Dans les racines adventives les pôles ligneux ne sont guère cunéiformes, mais plutôt étalés (pl. IV, fig. 51).

Les coupes sériées pratiquées dans les germinations d'un assez grand nombre d'espèces du genre *Ranunculus,* ainsi que de plusieurs autres genres tels que le *Delphinium,* le *Nigella,* l'*Helleborus,* etc., m'ont toutes démontré que, en ce qui concerne la structure de l'appareil végétatif, la symétrie pintamère que l'on rencontre dans la tige adulte et qui se poursuit jusque dans la fleur, dérive d'une symétrie tétramère primitive qui seule existe dans les plantules jeunes.

Dans le *Clematis* la symétrie par quatre que l'on rencontre dans les plantules se retrouve dans la tige adulte où les douze faisceaux que l'on y trouve généralement appartiennent en réalité à quatre systèmes. Cette symétrie se fait d'ailleurs pressentir par les feuilles opposées décussées et la constitution de la fleur qui normalement possède quatre sépales.

Je me propose de vérifier par la suite si cette symétrie par quatre est primitive chez toutes les Renonculacées. Dans l'affirmative, en se basant sur les caractères purement anatomiques, on pourrait conclure que la symétrie tétramère chez le *Clematis* constitue un caractère de plus grande ancienneté.

Ce fait concorderait avec cet autre fait que le *Clematis* est une des rares Renonculacées dont le port se rapproche le plus des plantes arborescentes que l'on considère généralement comme plus primitives. Il s'ajouterait aussi aux données paléontologiques, d'après lesquelles le *Clematis* serait une des plus anciennes Renonculacées connues.

Digitized by Google

L'étude assez complète de l'axe hypocotylé que j'ai eu l'occasion de faire à l'aide de coupes microtomiques bien sériées dans des individus de divers âges, me permet d'aborder l'examen de la question si contreversée du *collet*.

Le travail le plus complet sur ce sujet est celui de M. Gérard (*), dont les conclusions se trouvent reproduites dans la seconde édition (qui vient de paraître) du *Traité de botanique* de M. Van Tieghem. Je ne chercherai pas à les résumer ici; il me suffira d'en rappeler l'idée fondamentale :

Le collet n'est pas un plan, mais une région plus ou moins étendue dans laquelle tous les tissus de la racine *passent* insensiblement aux tissus de la tige. L'épiderme, le parenchyme cortical, l'endoderme et le péricycle subissent des modifications de faible importance sans changer de place. Les massifs libériens se comportent différemment suivant les cas. Quant aux massifs ligneux, ils se dédoublent, suivant le rayon, en deux moitiés qui se séparent, se déplacent, se tordent de 180°, de telle manière que le bois, qui était centripète dans la racine, devient centrifuge.

Cette dernière explication ne pourrait être applicable qu'aux éléments ligneux qui se rendent dans les cotylédons, et en aucune façon à ceux qui se rendent dans la tige et les premières feuilles. En outre, il est des cas où cette torsion apparente est bien difficile à constater.

En 1884, dans ses recherches sur l'*Urtica dioïca*, M. A. Gravis interprète autrement l'axe hypocotylé de cette plante (**). Il y voit le *contact* du faisceau bipolaire de la racine avec deux faisceaux larges centrifuges, qui, en se ramifiant, fournissent les faisceaux cotylédonaires et les faisceaux de la tige principale.

M. Vuillemin (***) semble partager cette manière de voir, lorsqu'il dit : « Il n'y a pas de transformation du système de la racine en système de tige. Tous deux sont absolument indépendants; . . . . . il n'y a aucun passage de la racine à la tige, mais insertion du pivot sur la tige principale, insertion analogue à celle des racines latérales ».

(*) *Recherches sur le passage de la racine à la tige*, par R. Gérard, Annales des Sciences naturelles, 6e sér., t. XI, 1881.

(**) *Loc. cit.*

(***) *Loc. cit.*, p. 24.

Digitized by Google

M. Dangeard (*), renonçant à l'idée de *passage* et à l'interprétation par la torsion de 180° des massifs ligneux, décrit le *mode d'union* de la tige et de la racine : « Il faut considérer séparément trois parties, dit-il avec raison : la racine, les faisceaux fournis par les cotylédons, les faisceaux fournis par les feuilles (**) ». Aussi recherche-t-il où et comment se raccordent ces diverses catégories de faisceaux.

A mon tour j'ai porté mon attention sur la région où se fait le contact entre les faisceaux cotylédonaires, les faisceaux foliaires, les faisceaux réparateurs d'une part, et le faisceau bipolaire de la racine d'autre part. Dans le *Ranunculus arvensis* cette région de contact se trouve à la base du nœud cotylédonaire. On pourrait l'appeler le collet interne par opposition au collet superficiel situé parfois 2 ou 3 centimètres plus bas, dans la région inférieure de l'axe hypocotylé qui est caractérisée par le contact de l'épiderme avec l'assise pilifère.

Pour pouvoir étudier la question d'une façon précise, il convient de tenir compte des particularités de structure aux divers âges de la plantule.

Aux débuts de la germination, lorsqu'une seule trachée marque chacun des pôles de la racine, une seule trachée occupe aussi le pôle de chaque faisceau cotylédonaire; la première touche à la seconde à la base du nœud cotylédonaire (pl. I, fig. 10 à 15).

Plus tard, quand les cotylédons se sont complètement étalés, chaque pôle ligneux de la racine compte plusieurs trachées. Chaque faisceau cotylédonaire est inséré sur l'un des pôles de la racine par deux branches appliquées de part et d'autre du pôle. Ces deux branches entrainent avec elles les pôles ligneux en sortant dans les cotylédons et se réunissent rapidement en un seul faisceau (***).

A l'époque où les feuilles se développent à leur tour apparaissent dans le

(*) Dangeard. *Recherches sur le mode d'union de la tige et de la racine chez les Dicotylédonés* (Le Botaniste, 1e sér., 1889).

(**) *Loc. cit.*, p. 85.

(***) Dans le *Delphinium* les faisceaux cotylédonaires restent doubles dans toute l'étendue du pétiole. Les deux branches qu'ils constituent restent bien distinctes et laissent voir entre elles (pl. II, fig. 27 et 28) le pôle centripète de la racine.

Digitized by Google

nœud cotylédonaire les trachées initiales des faisceaux foliaires et des faisceaux réparateurs. Ces nouveaux faisceaux s'unissent aux deux pôles de la racine par de nombreuses trachées courtes (pl. II, fig. 19).

Le contact entre les faisceaux unipolaires centrifuges (faisceaux cotylédonaires, faisceaux foliaires, faisceaux réparateurs) et le faisceau bipolaire centripète se fait donc de la manière la plus simple; les premiers se plaçant à droite et à gauche des pôles de la racine.

Je ne me suis pas d'ailleurs borné à étudier le *Ranunculus arvensis*, j'ai pratiqué de nombreuses coupes microtomiques dans diverses plantules de *Delphinium*, *Nigella*, *Helleborus*, etc., ainsi que de beaucoup d'espèces du genre *Ranunculus*. L'examen de ces coupes m'a permis d'exposer, comme je viens de le faire, la structure du *Ranunculus arvensis*.

Cette étude comparative m'a permis aussi de constater une erreur qui s'est glissée dans le mémoire de M. Gérard, où il s'exprime comme suit, en parlant des faisceaux centrifuges d'insertion de la Nigelle (*) : « Les faisceaux libéro-ligneux ainsi constitués se divisent bientôt en trois masses : deux petites latérales qui deviennent les nervures latérales des cotylédons; la médiane, plus volumineuse, passe dans le premier entre-nœud ». Les massifs qui, d'après M. Gérard, constituent les latéraux cotylédonaires, sont au contraire des réparateurs qui, à un stade plus avancé, fournissent notamment les faisceaux foliaires des feuilles 3, 4 et 5. D'autre part, les trois faisceaux figurés par cet auteur à la base des pétioles cotylédonaires proviennent d'une trifurcation de l'unique faisceau sortant du cotylédon.

L'étude anatomique de l'axe hypocotylé dans les germinations dont je viens de parler, et tout particulièrement dans celles du *Delphinium ajacis*, m'a démontré que dans cette région le bois de la tige est en contact avec celui de la racine et qu'il n'y a pas, comme on le croit encore, passage du bois de la racine au bois de la tige par simple torsion du tissu ligneux. On retrouve donc dans cet organe, qui certainement est le plus primitif de la plante, un dernier vestige d'une structure qui existait jadis sur toute l'étendue de la tige chez les *Sigillaria*, les *Poroxylon*, etc. On sait que chez ces plantes

(*) *Loc. cit.*, p. 311.

Digitized by Google

fossiles il existe, dans toute l'étendue des organes aériens, du bois centripète et du bois centrifuge juxtaposés. Par suite du développement de plus en plus hâtif et de plus en plus considérable de ce dernier, le bois centripète, qui probablement existait seul à l'origine, a fini par disparaître dans ces organes, et dans les plantes actuellement vivantes on ne le retrouve plus guère que dans les feuilles de Cycadées.

En interprétant comme je viens de le faire la structure de l'axe hypocotylé chez les plantes phanérogames, on arrivera, je pense, à le considérer comme un membre à part, embryonnaire, qui, à ce titre, serait capable de fournir des caractères précieux à la classification.

Digitized by Google

Planche I.

Embryon.

Fig. 1. Figure schématique indiquant la direction du plan principal de symétrie.

2. Section transversale faite au milieu de l'axe hypocotylé : Épiderme (Ép.), parenchyme cortical (p. cort.), cylindre central (cyl. cent.). $\frac{147}{1}$

3. Section transversale faite à la base du nœud cotylédonaire. $\frac{300}{1}$

4. Section transversale au-dessus du nœud cotylédonaire : on y voit les deux massifs procambiaux destinés aux cotylédons. $\frac{91}{1}$

5. Dessin détaillé d'une partie de la coupe précédente. $\frac{300}{1}$

6. Section transversale dans la région inférieure de l'axe hypocotylé : coiffe (coif.), parenchyme cortical (p. c.), endoderme (end.); péricycle (péric. ou per.), procambium (pcb. ou pr. cb.) devant constituer le faisceau bipolaire de la racine. $\frac{300}{1}$

7. Section transversale dans la coiffe. $\frac{300}{1}$

8. Coupe longitudinale de l'embryon pratiquée suivant son plan principal de symétrie. Elle montre la structure du sommet végétatif de la racine principale ainsi que celle de l'axe hypocotylé aux différents niveaux étudiés sur les coupes transversales qui précèdent. $\frac{160}{1}$

Premier stade de la germination.

9. Section transversale au milieu de l'axe hypocotylé. Différenciation des pôles libériens. $\frac{173}{1}$

10. Section transversale à la base du nœud cotylédonaire. Différenciation des pôles libériens et des pôles ligneux. $\frac{340}{1}$

11-14. Coupes transversales successives dans le nœud cotylédonaire montrant le contact de la première trachée du faisceau bipolaire de l'axe hypocotylé avec la première trachée du faisceau unipolaire du cotylédon antérieur.

15. Section transversale au-dessus du nœud cotylédonaire montrant vers le haut le faisceau unipolaire à développement centrifuge du cotylédon antérieur; au milieu le méristème primitif de la tige principale, en bas la première trachée du faisceau cotylédonaire postérieur. $\frac{340}{1}$

16. Coupe longitudinale pratiquée suivant le plan principal de symétrie montrant le contact entre la trachée polaire antérieure du faisceau de l'axe hypocotylé avec la trachée polaire du faisceau du cotylédon correspondant. $\frac{56}{1}$

Digitized by Google

Planche II.

Deuxième stade de la germination.

Fig. 17. Germination arrivée au stade II : axe hypocotylé (A. h.); niveau du collet interne (c. int.); gemmule (s. g.); cotylédons (cot.); collet superficiel (col. sup.); racine principale (R. P.); radicelles (r.). $\frac{4}{1}$

18*a* Section transversale au milieu de l'axe hypocotylé. Périphérie. $\frac{300}{1}$

18*b* Section transversale au milieu de l'axe hypocotylé. Massif central. Bois et liber bien différenciés. La partie centrale est encore occupée par du procambium. $\frac{380}{1}$

19. Section transversale à la base du nœud cotylédonaire. Apparition des premières trachées des faisceaux médians des feuille$_1$ et feuille$_2$. $\frac{380}{1}$

20. Section transversale d'ensemble au-dessus du nœud cotylédonaire. Les quatre massifs caulinaires A, B, C, D, sont déjà distincts. On y voit aussi les médians sortant des feuille$_1$ et feuille$_2$. $\frac{33}{1}$

21. Partie dé la coupe précédente vue à un plus fort grossissement et montrant en détail ces deux derniers faisceaux. $\frac{380}{1}$

22. Section transversale au-dessus du niveau précédent, montrant la disposition des appendices. $\frac{33}{1}$

23. Coupe transversale à la base de la racine principale : parenchyme cortical, endoderme; péricycle, bois, liber, partie centrale non différenciée. $\frac{140}{1}$

24, 25. Coupes longitudinales suivant le plan principal de symétrie : la première, pratiquée vers le haut de l'axe hypocotylé, montre l'insertion des cotylédons; la seconde, pratiquée vers le bas du même axe, montre l'insertion de deux radicelles. $\frac{20}{1}$

Troisième stade de la germination.

26. Coupe transversale dans le pétiole du cotylédon antérieur. Le faisceau cotylédonaire présente encore en avant des trachées écrasées, derniers vestiges du pôle ligneux centripète de l'axe hypocotylé. $\frac{380}{1}$

27. *Delphinium ajacis.* Coupe transversale dans le pétiole du cotylédon. On voit nettement le pôle antérieur centripète du faisceau de l'axe hypocotylé entre les deux faisceaux unipolaires du cotylédon. $\frac{300}{1}$

28. Section transversale dans la partie supérieure du nœud cotylédonaire de la même plante. On y remarque la même disposition que dans la coupe précédente. $\frac{380}{1}$

Digitized by Google

Planche III.

Troisième stade de la germination.

Fig. 29. Plantule arrivée au stade III de la germination. Les trois premières feuilles sont visibles extérieurement. $\frac{1}{1}$

30. Coupe transversale au milieu de l'axe hypocotylé. Cylindre central : cambium circulaire commençant à fonctionner. $\frac{147}{1}$

31. Coupe transversale d'ensemble dans le nœud cotylédonaire. $\frac{16}{1}$

32. Parcours développé. Quatre systèmes de faisceaux : A, B, C, D.

33. Coupe transversale d'ensemble dans le sommet végétatif. Disposition des appendices. $\frac{18}{1}$

Tige de la plante adulte.

34. Plante adulte. Base de la tige principale (T. p.). Axe hypocotylé (A. h.). Racine principale (R. p.). Radicelles (r.) et racines adventives (R. a.). $\frac{1}{1}$

35. Coupe transversale d'ensemble au milieu de l'axe hypocotylé : le bois primaire au centre, le bois secondaire en un massif continu; massifs libériens multiples. $\frac{22}{1}$

36. Coupe transversale au milieu de l'entre-nœud$_1$. Sortie des faisceaux dans les feuille$_1$ et feuille$_2$. $\frac{22}{1}$

37. Section transversale au milieu de l'entre-nœud$_3$. Sortie dans les feuille$_3$ et feuille$_4$. Le faisceau A est divisé en A′ et A″. $\frac{22}{1}$

38. Section transversale au milieu de l'entre-nœud$_5$. Sortie dans les feuille$_5$ et feuille$_6$. $\frac{22}{1}$

39. Section transversale dans l'entre-nœud$_7$. Sortie dans les feuille$_7$ et feuille$_8$. $\frac{22}{1}$

40. Parcours développé. Sortie dans les feuilles 1-8. Division du faisceau A au-dessus de la feuille$_2$; à partir de là cinq systèmes de faisceaux existent dans la tige principale.

41. Figure représentant la disposition phylotaxique des feuilles de la tige principale.

Digitized by Google

Planche IV.

Insertion des bourgeons.

Fig. 42, 43. Insertion sur la tige principale du bourgeon du nœud 8. $\frac{55}{1}$

44. Rapports des systèmes de faisceaux de la tige principale avec ceux d'une tige axillaire.

Racines.

45. Coupe transversale d'ensemble à la base d'une racine principale entièrement développée. $\frac{55}{1}$

46. Contact entre le B_1 et le B_2 de la même racine. $\frac{117}{1}$

47. Coupe transversale d'ensemble au sommet de la racine principale. $\frac{55}{1}$

48. Même coupe détaillée. Assise pilifère, parenchyme cortical, endoderme; péricycle, bois et liber. $\frac{150}{1}$

49. Coupe transversale d'ensemble à la base d'une racine adventive à quatre pôles. $\frac{55}{1}$

50. Coupe transversale d'ensemble au sommet de la même racine. $\frac{55}{1}$

51. Partie centrale de la même coupe à un fort grossissement. Pôles ligneux largement cunéiformes. $\frac{110}{1}$

Feuilles.

52. Cotylédon. Nervation. $\frac{3}{2}$

53-57. Nervation des feuilles 1, 2, 3, 5, 8. $\frac{3}{2}$

58. Coupe transversale du limbe. Mésophylle différencié. Épidermes supérieur et inférieur. $\frac{180}{1}$

59. Coupe transversale d'un faisceau. $\frac{200}{1}$

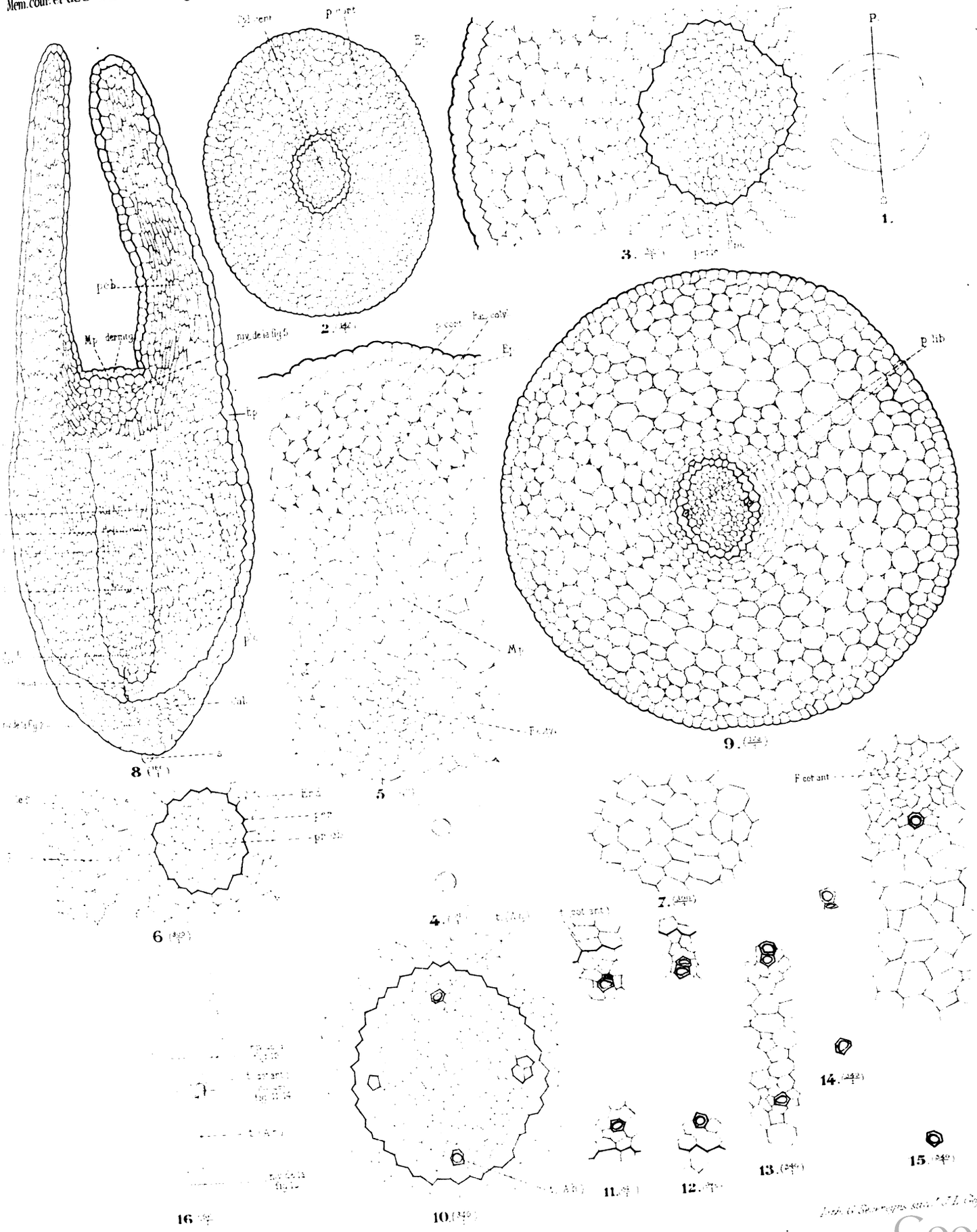
60. Coupe transversale dans le pétiole cotylédonaire. $\frac{50}{1}$

61-63. Coupes transversales dans les pétioles des feuilles 1, 5, 8. $\frac{40}{1}$

64. Poil. $\frac{150}{1}$

65. Stomate, sans cellules annexes. $\frac{150}{1}$

Digitized by Google

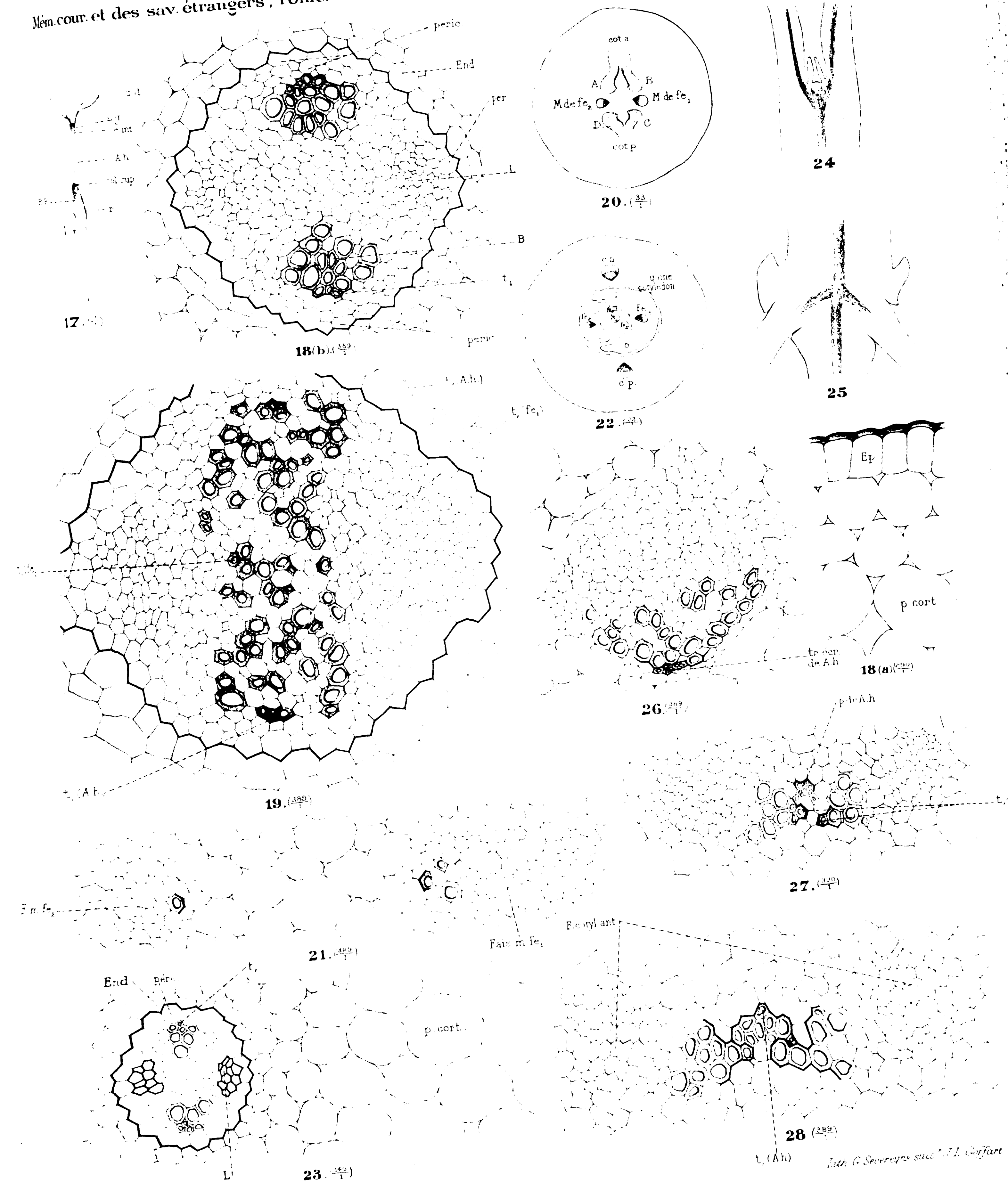


(Fig. 1 à 8.) Embryon; (Fig. 9 à 16.) Premier stade de la germination.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mém. cour. et des sav. étrangers, Tome. LII.

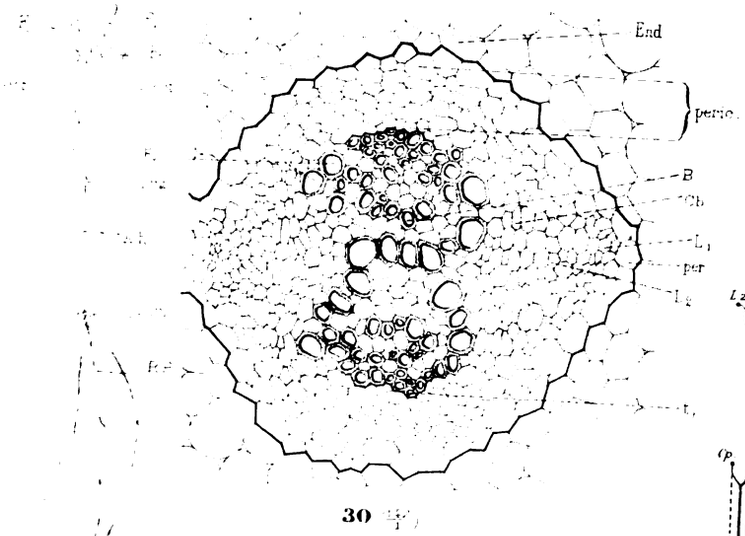


Lith. G. Severeyns succ.r J. L. Goffart

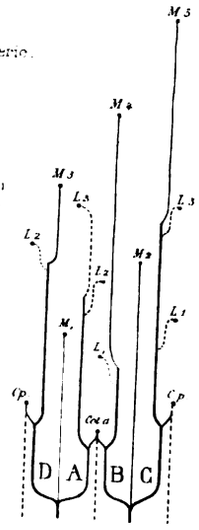
(Fig. 17 à 25.) Stade II; (Fig. 26 à 28.) Stade III de la germination.

Digitized by Google

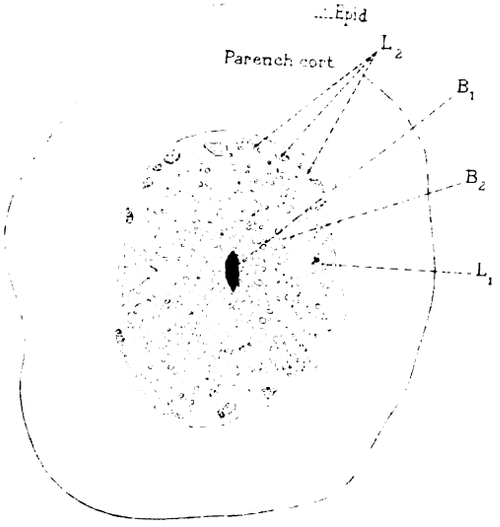
Digitized by Google



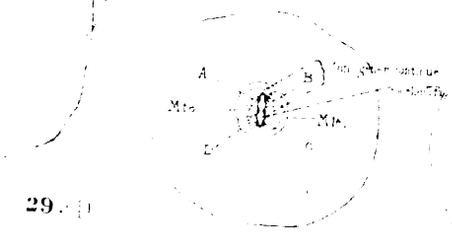
30



32.



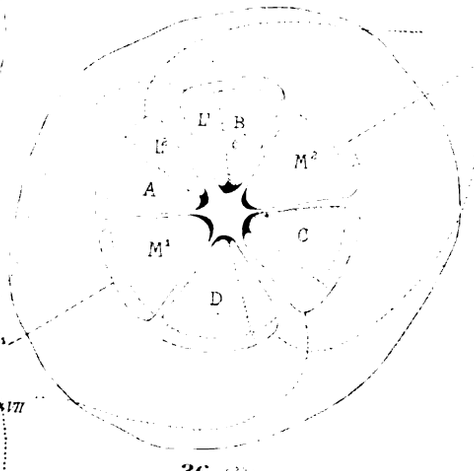
35



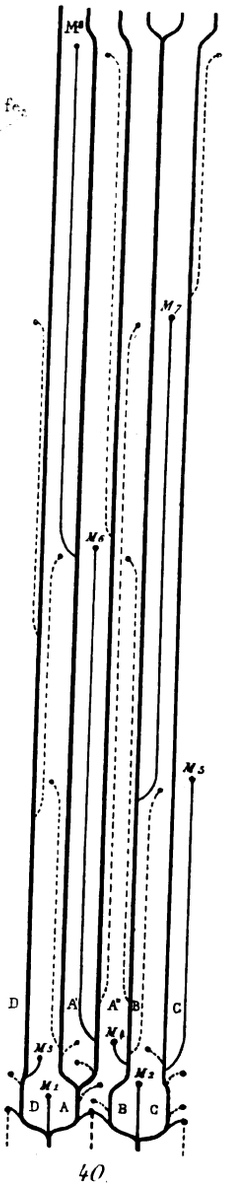
29.

31

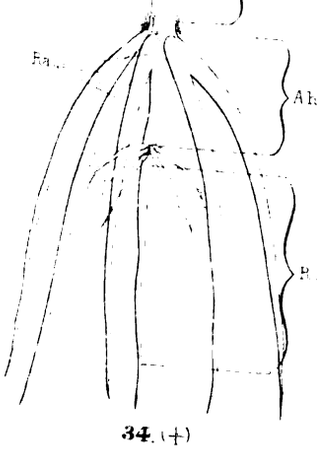
33.



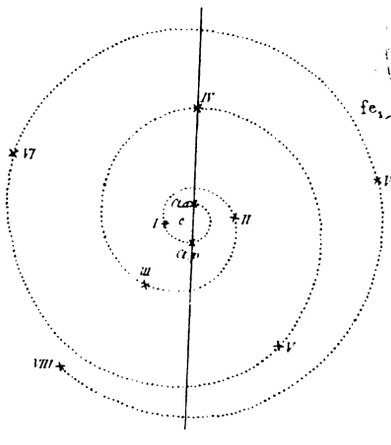
36



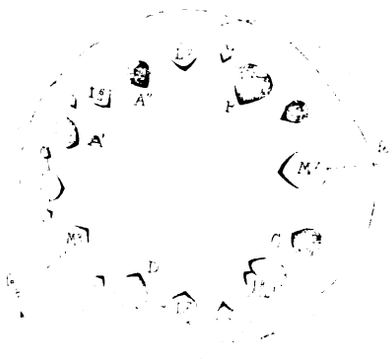
40



34.

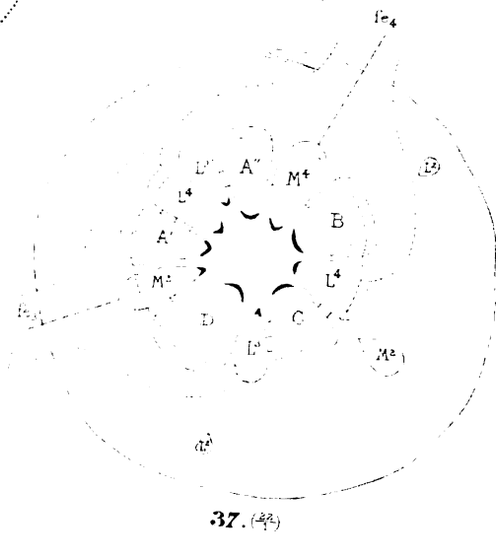


41



39.

38

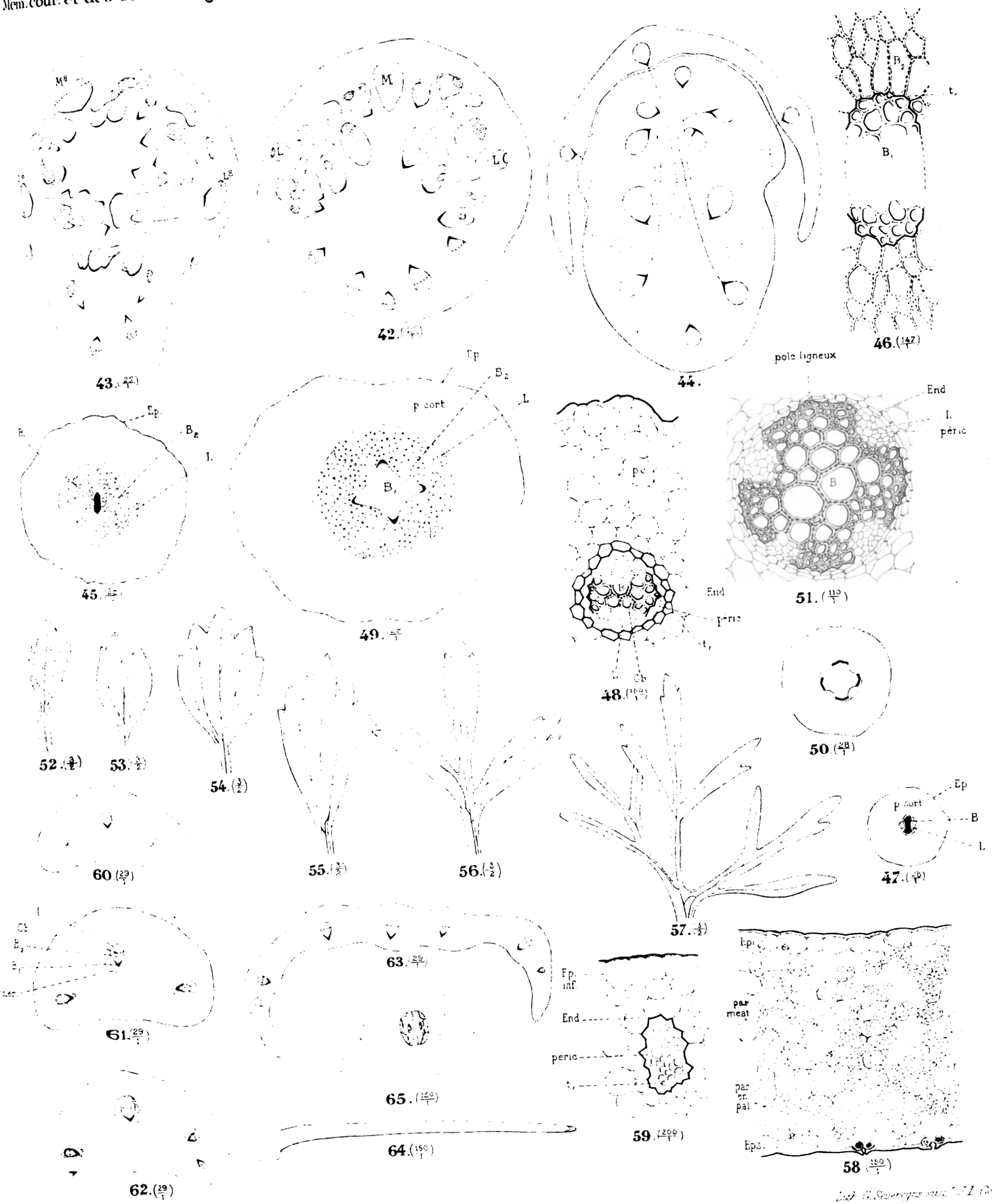


37.

(Fig. 29 à 33.) Stade III de la germination; (Fig. 34 à 40.) Tige de la plante adulte.

Digitized by Google

Digitized by Google



Plante adulte

(Fig. 42 à 44.) Insertion des Bourgeons; (Fig. 45 à 52) Racine; (Fig. 52 à 65.) Feuilles.

Digitized by Google

Digitized by Google

CIRRO-STRATUS ET ALTO-STRATUS

PAR

J. VINCENT,

MÉTÉOROLOGISTE A L'OBSERVATOIRE DE BELGIQUE

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 10 octobre 1891.)

Digitized by Google

Digitized by Google

CIRRO-STRATUS ET ALTO-STRATUS.

Lorsque, après une période de beau temps, un cyclone s'avance de l'Atlantique vers nos contrées, les premiers indices de son approche sont ordinairement des nuages légers, qui s'élèvent de l'horizon occidental. Ces nuages sont formés de filaments d'un blanc éclatant, groupés en houppes et en pinceaux, ou simulant des boucles de cheveux ou des queues de cheval. Au bout d'un certain temps, les nuages de cette espèce qui traversent le ciel offrent des contours moins bien marqués; autour d'eux un enduit blanchâtre voile l'azur du ciel. Cette sorte de brouillard farineux s'épaissit peu à peu; les bouquets de filaments s'y noient de plus en plus et finissent par s'y fondre complètement. Le ciel est couvert alors d'un véritable voile, où l'on observe pourtant encore des portions peu épaisses et même de véritables ouvertures.

Lorsque ces nuages poudreux commencent à passer devant le soleil, ils donnent naissance au beau phénomène du halo. Celui-ci est d'autant plus vif que le voile nuageux est plus léger.

A mesure que ce voile s'étend davantage sur le ciel, il s'épaissit. Il était d'abord d'un blanc éblouissant; il est devenu maintenant grisâtre. Le halo pâlit graduellement, pour s'évanouir bientôt tout à fait. Puis, sous le voile épais, s'avancent des nuages bas, floconneux, d'un gris foncé, aux formes indécises. Ils forment bientôt comme un tapis épais et sombre, d'où la pluie ou la neige commence à tomber. Depuis l'apparition des premiers nuages, le vent a pris peu à peu de la force. Le changement de temps est accompli.

Digitized by Google

C'est en hiver que la dernière phase, celle qui renferme l'arrivée des nuages inférieurs, se présente le plus souvent telle que nous venons de la décrire. En été, d'ordinaire de beaux nuages arrondis apparaissent sous le manteau des nuages les plus élevés; ils grandissent et se transforment en nuages orageux.

Nous voudrions présenter ici le résultat d'observations que nous avons faites dans ces derniers temps sur les nuages qui forment le voile supérieur, lorsque le temps se met à la pluie. Il a toujours régné à leur sujet une opinion que nous croyons erronée. On admet que ce voile, depuis les parties légères, filamenteuses, du bord, et celles qui, plus loin, donnent naissance au halo, jusqu'aux parties épaisses et uniformes sous lesquelles flottent les nuages qui versent la pluie et la neige, n'est qu'une seule et même couche de nuages. Nous y voyons, au contraire, deux couches distinctes, de hauteurs différentes. Avant d'exposer les preuves sur lesquelles se fonde notre opinion, nous croyons utile de passer rapidement en revue ce qu'ont dit des nuages en question les météorologistes les plus éminents.

Le premier qui proposa une nomenclature des nuages fut le grand naturaliste français Lamarck. Il la consigna dans son *Annuaire météorologique* de l'an X. Dans celui de l'an XIII, il étend sa nomenclature, qui comprend alors douze espèces de nuages. Nous n'avons rencontré dans ses *Annuaires* rien qui se rapportât à la question qui fait l'objet de notre travail.

A la même époque se place la première publication de Howard sur la classification des nuages [1]. Il appliqua la dénomination de *cirrus* aux nuages légers, filamenteux, qui paraissent les premiers dans le ciel à l'approche du mauvais temps. Lorsque les cirrus se trouvent enveloppés de cette nébulosité blanche dont nous avons parlé ci-dessus, il les nomme cirro-stratus. Ils sont en même temps, d'après lui, descendus à un niveau inférieur. « Le temps *humide* continu est accompagné de nappes horizontales de ces nuages, qui s'abaissent rapidement et passent aux cirro-stratus [2]. »

[1] *Essay on the modifications of clouds, and on the principles of their production, suspension and destruction.* (TILLOCH'S PHILOSOPHICAL MAGAZINE, London, 1803, t. XVI, XVII.)

[2] *The climate of London.* London, 1833, vol. I, p. XLIII. — Dans cet ouvrage, la nomenclature est la même que celle de l'*Essay on the modifications of clouds*.

Digitized by Google

On retrouve plus loin la même affirmation : « Le cirrus ayant continué à s'accroître pendant un certain temps ou étant resté stationnaire, passe généralement soit au cirro-cumulus, soit au cirro-stratus, et en même temps il descend à un niveau plus inférieur dans l'atmosphère [1]. »

Au reste, voici sa définition du cirro-stratus. Elle est assez obscure et laisserait place au doute, si l'auteur ne mentionnait pas la production du halo : « Ce nuage semble résulter de la descente des fibres du cirrus dans un plan horizontal, en même temps qu'elles se rapprochent latéralement les unes des autres. Sa forme et sa position relative, lorsqu'il est vu à distance, donnent fréquemment l'idée de bancs de poissons. Ici cependant, comme en d'autres cas, c'est la *structure* qui doit être considérée plutôt que la *forme*, qui varie beaucoup, présentant à certains moments l'aspect de barres parallèles ou de filaments entrelacés, comme le grain du bois poli. Il est épais au milieu et aminci vers le bord. Le cirrus distinct ne précède cependant pas toujours la production de cette modification ni de la dernière [du cirro-stratus ni du cirro-cumulus].

» Le cirro-stratus précède le *vent* et la *pluie*, dont on peut estimer quelquefois le voisinage plus ou moins grand d'après son abondance plus ou moins grande et sa permanence. On le voit presque toujours dans les intervalles des tempêtes. Quelquefois le cirro-stratus et le cirro-cumulus apparaissent ensemble dans le ciel et souvent alternent l'un avec l'autre dans le même nuage; les différentes évolutions qui en résultent sont un curieux spectacle, et l'on peut se faire une idée du temps probable qui s'ensuivra en observant quelle forme prévaut à la fin. Le cirro-stratus est la modification qui montre le plus fréquemment et le plus complètement les phénomènes du halo solaire et lunaire, et (comme il est à supposer d'après un petit nombre d'observations) également du parhélie et du parasélène. De là la raison du pronostic de mauvais temps que l'on tire généralement de l'apparition du halo [2]. »

Notons ici, outre une nouvelle affirmation de l'abaissement des cirrus

[1] *The climate of London*. London, 1833, vol. I, p. XLV.
[2] *Ibid.*, pp. XLVI et XLVII.

Digitized by Google

lorsqu'ils se transforment en cirro-stratus, ce *curieux spectacle des alternatives, dans un même nuage, de cirro-stratus et de cirro-cumulus*. Ceux-ci sont, dans la nomenclature d'Howard, les nuages arrondis qui donnent au ciel cet aspect *pommelé* ou *moutonné* que tout le monde connaît.

Kæmtz, en 1831, adopta, avec quelques changements, la classification d'Howard [1]. Le passage suivant pourrait faire croire que son cirro-stratus n'est autre chose que celui du savant anglais : « Ordinairement le cirrus passe au cirrostratus. Les filaments du premier de ces nuages deviennent de plus en plus diffus, le bleu du ciel devient plus vif, de chacun des filaments il en sort d'autres qui leur sont perpendiculaires, le cirrus lui-même devient de plus en plus large, et le cirrostratus ainsi formé, ou bien couvre une portion du ciel seulement, ou donne un aspect blanc à tout le ciel. Ce passage présage le plus souvent de la pluie, car d'autres nuages se forment ordinairement plus bas, les cumulus et les cumulostratus. La pluie qui tombe dans ces circonstances est ordinairement douce, dure longtemps et s'étend souvent sur de grands espaces. Vu d'en dessous, le cirrostratus paraît avoir une limite tout à fait horizontale, et la surface supérieure est également si unie qu'elle a tout à fait l'aspect d'un plan parfait. Cette uniformité n'est pourtant qu'apparente : éblouis par la lumière blanche, nous ne parvenons pas à reconnaître les irrégularités; si l'on regarde les nuages au zénith, on reconnaît bientôt les diverses portions de cette espèce de nuage; lorsqu'ils sont dans le voisinage du soleil et qu'on les examine au moyen d'un miroir noirci, les stries colorées du nuage trahissent sa structure irrégulière. Ce n'est que lorsque le cirrostratus est plus léger, lorsque ses bords sont formés de filaments plutôt crépus que droits et qu'il se rapproche davantage du cirro-cumulus, que sa structure intérieure paraît être plus uniforme.

» Cette espèce de nuage se montre surtout lorsque les vents de sud-ouest l'ont emporté dans les régions supérieures et que, tandis que le baromètre baisse, ils repoussent le vent du nord de la région inférieure. Le ciel est encore pur dans l'est alors, pendant qu'apparaît à l'horizon occidental une couche épaisse de cirrostratus, en forme de banc, à laquelle Goethe a proposé

[1] *Lehrbuch der Meteorologie*. Halle, 1831, vol. I.

Digitized by Google

de donner le nom de *paries*. Les parties supérieures de cette masse nuageuse paraissent plus ou moins blanches, mais près de l'horizon elle devient de plus en plus bleu gris; cette formation s'étend graduellement sur tout le ciel.....

» Par un temps pluvieux, cette espèce de nuage couvre souvent de grandes portions du ciel; sous elle passent rapidement les nuages à pluie; d'autres fois elle paraît en forme de masses étroites, allongées, qui paraissent colorées de belles nuances, particulièrement par le soleil couchant. Aussi longtemps qu'elle se montre en grande quantité et que des nuages de pluie passent au-dessous, il ne faut pas compter sur le beau temps (pp. 390 et 391). »

Mais ce qu'il dit de la formation des halos démontre clairement qu'il rangeait parmi les cirrus la portion la moins épaisse du cirro-stratus de Howard, et qu'il réservait à la partie la plus dense le nom de cirro-stratus : « Dans les vrais cirrostratus je n'ai vu que bien plus rarement ces halos; ce n'est que quand tout le ciel avait un aspect très mat, que les filaments des cirrus étaient très diffus, de manière que l'on ne pouvait décider si l'on devait ranger les nuages observés dans l'une ou l'autre modification, ce n'est qu'alors que j'ai encore aperçu ces cercles, et ceux-ci persistaient quelque temps après que le cirrostratus s'était réellement formé. Dans la plupart des cas les caractères optiques des cirrostratus, toujours ceux des cirrocumulus, rappelaient les phénomènes que produisent les vésicules aqueuses (p. 398) [1]. »

Remarquons en passant que, pour Kæmtz, la forme du cirro-stratus se rapproche parfois de celle du cirro-cumulus (*lorsque ses bords sont formés de filaments plutôt crépus que droits et qu'il se rapproche davantage du cirro-cumulus*) et que la constitution physique de ces deux espèces de nuages est presque toujours la même.

Poey a publié, en 1863, un livre intitulé : *Comment on observe les nuages*

[1] Kæmtz n'avait pas manqué de s'apercevoir qu'il n'était pas d'accord avec Howard au sujet du cirro-stratus : « En Angleterre, ajoute-t-il en note, les cirrostratus paraissent se comporter autrement; en tout cas Howard, Forster et l'auteur de l'article *Cloud* dans la Rees Cyclopædia disent que les halos se montrent surtout dans les cirrostratus. Il est cependant possible qu'ils y rangent déjà les formes intermédiaires dont nous avons parlé. Mais je n'ai jamais constaté dans les cirrus un phénomène rappelant ceux que la réfraction de la lumière produit dans les bulles de vapeur. »

Digitized by Google

pour prévoir le temps, qui fit quelque bruit et qui eut une troisième édition [1]. Il y proposa une nouvelle nomenclature, dont nous n'entreprendrons pas la critique en ce moment. Contentons-nous de reproduire quelques passages relatifs aux nuages dont nous nous occupons ici. Pour Poey, la couche qui surmonte les nuages de pluie, et pour laquelle il propose le nom de *pallio-cirrus,* dérive des cirro-cumulus. « ..... le pallio-cirrus, qui se forme par l'accumulation des cirro-cumulus (p. 12)..... premièrement les mottes des cirro-cumulus s'agrandissent jusqu'à ce qu'elles finissent par s'unir entre elles, couvrant le ciel en entier : c'est alors notre pallio-cirrus (p. 25)..... les balles des cirro-cumulus, aussitôt qu'elles acquièrent une certaine extension prévue, s'unissent entre elles et forment une couche compacte qui devient un pallio-cirrus (p. 28)..... si le pallio-cirrus, en se fragmentant, reprend sa forme primitive de cirro-cumulus (p. 82)..... Le pallio-cirrus se forme sur place par l'accumulation des cirro-cumulus (p. 83)..... L'évolution du cirro-cumulus en pallio-cirrus se fait ainsi : les mottes cotonnées du ciel pommelé s'agrandissent, se rapprochent, se réunissent par degrés et ne forment plus qu'une couche uniforme et compacte (p. 84)..... Il se forme premièrement de petites mottes de cirro-cumulus qui augmentent graduellement de dimensions; elles s'unissent deux ou trois ensemble, puis en plus grand nombre, jusqu'à ce qu'elles forment une couche épaisse et uniforme, ou un pallio-cirrus. Plus cette couche est compacte et dense, plus le nuage prend une teinte cendrée ou grisâtre, et plus la pluie se prolonge; le soleil paraît terne ou devient invisible (pp. 85 et 86). »

Ce qui paraîtra étrange, c'est que le pallio-cirrus, qui était primitivement un cirro-cumulus, est formé de cirrus : « la couche de cirrus ou notre pallio-cirrus (p. 25)..... la [couche] supérieure ..... formée de cirrus, constitue le pallio-cirrus (p. 33)..... le pallium, que nous subdivisons en pallio-cirrus et en pallio-cumulus, suivant que ses couches sont formées de cirrus ou de cumulus (p. 34)..... nos deux pallio sont uniquement des *couches* de cirrus ou de cumulus (p. 45)..... généralement parlant, le cirrus, surtout les pallio-cirrus, donnent naissance au grand halo solaire et lunaire de 22° de rayon (p. 138). »

[1] Paris, 1879.

Digitized by Google

Ce dernier passage est important : il montre que même la partie antérieure et la plus légère du cirro-stratus d'Howard rentre dans le cirro-pallium de Poey; ou, en d'autres termes, que le cirro-pallium n'est ni plus ni moins que le cirro-stratus d'Howard. Poey a pourtant aussi un cirro-stratus, mais ce qu'il en dit montre qu'il n'a rien de commun avec le cirro-stratus d'Howard et que ce n'est probablement qu'une sorte de cirro-cumulus.

Quant à la transformation des cirro-cumulus en cirrus, elle étonnera moins lorsqu'on saura que, pour Poey, les cirro-cumulus sont composés de flocons de neige. Il n'y aurait qu'à désagréger ces flocons pour en faire des nuages formés d'aiguilles de glace, ou des cirrus. Serait-ce ainsi que l'imagination de l'auteur se représentait cette métamorphose?

Dans son ouvrage *Sur la classification des nuages employée à l'Observatoire météorologique d'Upsala* [1], Hildebrandsson s'exprime ainsi : « Lorsque les filaments des cirrus sont plus serrés et comme enchevêtrés les uns avec les autres, de façon à former des masses compactes qui paraissent complètement stratifiées, ils donnent naissance aux cirro-stratus..... Les cirro-stratus précèdent ordinairement le vent et la pluie; ils apparaissent d'abord sous forme de parties détachées, dont l'aspect varie beaucoup et qui présente parfois l'apparence de barres parallèles ou de rubans entrelacés. Plus la pluie s'approche, plus les parties en sont rapprochées, jusqu'à ce qu'elles se confondent toutes ensemble pour former un tapis continu, ou un voile gris blanchâtre, qui s'étend peu à peu sur tout le firmament... C'est dans ce voile nuageux que les halos et les couronnes solaires ou lunaires apparaissent le plus souvent. Quelquefois les cirro-stratus ne sont pas formés de parties détachées, ... mais ils apparaissent dès le début comme un voile clair homogène, sans contours nets, qui s'assombrit et s'épaissit de plus en plus (p. 4) ».

Ces mots : « c'est dans ce voile que les halos et les couronnes solaires ou lunaires apparaissent le plus souvent », semblent montrer que l'auteur croyait ce voile composé, ici de cristaux, ailleurs de particules aqueuses non congelées. Mais il ne tenait pas compte, dans sa nomenclature, de cette différence

[1] Upsal, 1879.

Digitized by Google

de constitution, et ne voyait, lui aussi, dans le voile en question, qu'une seule et même couche.

Parmi les planches photographiques qui accompagnent l'ouvrage d'Hildebrandsson, quatre, celles qui portent les nos 4, 5, 6 et 7, représentent son cirro-stratus. Sur celles qui portent les nos 5 et 7, on ne parvient point à distinguer cette espèce de nuage. Celles qui portent les nos 4 et 6 représentent évidemment des nuages du genre cirro-cumulus, non pas des cirro-cumulus typiques, formés de moutons réguliers et séparés, mais des cirro-cumulus diffus, où les moutons sont irréguliers et serrés. Il est intéressant de signaler ce fait et de le rapprocher de ce que Howard, Kæmtz et Poey avaient dit auparavant de la parenté des cirro-cumulus et des cirro-stratus. Ne s'explique-t-on pas aussi par là que l'auteur mentionne la production par le cirro-stratus à la fois du halo et de la couronne?

Deux ans plus tard, un artiste danois, Ph.Weilbach, publia une description des principales formes des nuages, accompagnée de seize gravures représentant les nuages en blanc sur fond bleu [1]. Cet auteur distingue dans une dépression trois sortes de nuages : 1° le cirro-stratus (nuage fibreux étalé ou en couche, nuage fibreux stratifié), précédé de cirrus (nuages fibreux); 2° le cirro-pallium (nuage fibreux en rideau); 3° le nuage à pluie en manteau (nimbo-pallium). Mais la phrase suivante montre clairement que la première et la deuxième espèce ne sont pour lui qu'une seule et même couche : « Au fur et à mesure que le baromètre baisse, il n'est pas rare de voir le nuage fibreux stratifié se ramasser de plus en plus et former par sa condensation croissante une couche de nuages plus étendue, qu'il est préférable de distinguer du nuage fibreux stratifié proprement dit, et auquel on donne le nom de *rideau de nuages fibreux* ou *cirro-pallium* (p. B. 21). »

Il est à remarquer que, pour Weilbach, le cirro-stratus a deux aspects différents. « Les nuages fibreux étalés, dit-il, apparaissent ordinairement

[1] *Formes des nuages dans l'Europe septentrionale.* (Annales du Bureau central météorologique de France, année 1880.) Le même travail a été publié en danois dans l'*Annuaire météorologique* du Danemark (Copenhague, 1881), mais avec douze gravures seulement. Enfin il a paru un extrait de la première publication sous le titre : *Atlas donnant les principales formes des nuages.* Copenhague, 1881.

Digitized by Google

sous forme de nuages stratifiés disposés par groupes : nous les voyons alors au-dessus de nos têtes, et en général dans les environs du zénith, comme de petites masses nuageuses, d'une forme ronde irrégulière, elliptique ou en quadrilatère oblique, présentant une surface légèrement concave et évidée à la partie inférieure; il n'est pas rare que leurs bords soient frangés. Ils se produisent parfois seuls ou bien en combinaison avec des nuages fibreux; d'autres fois côte à côte avec des nuages pommelés et alors indubitablement dans la même couche d'air, tandis que d'ailleurs on admet qu'ils appartiennent à une couche un peu supérieure à celle où les nuages pommelés apparaissent habituellement.

» Suivant la manière dont ils sont éclairés, ces nuages peuvent être blancs par insolation directe, parfois légèrement ombrés de gris; ou bien, s'ils forment un assemblage plus nombreux et que la perspective projette leurs bords les uns sur les autres, ils peuvent se trouver complètement dans une ombre portée et présenter çà et là une tranche d'un blanc vif; en pareil cas ils ressemblent aux variétés plus denses des nuages pommelés, et même, pendant l'hiver, ils peuvent être difficiles à distinguer des nuages appartenant aux couches inférieures et qui, dans un air froid, affectent le caractère de nuages de neige. Après le coucher du soleil on voit souvent des nuages fibreux étalés, disposés çà et là par groupes et tout à fait dans l'ombre; leur couleur est alors d'un gris souris à teinte fine. Les nuages de ce genre qu'on aperçoit isolés à une grande distance, et qui, pour cette raison, semblent toucher l'horizon, se présentent sous la forme de barres minces, et peuvent être définis *nuages fusiformes* ou *en barre;* parfois le soleil les illumine sur les bords, d'autres fois ils sont entièrement dans l'ombre et leur couleur est alors d'un gris plus ou moins foncé. Leur épaisseur peut être uniforme ou bien leurs extrémités effilées.

» Le nuage fibreux stratifié peut aussi être caractérisé par le fait qu'il envahit l'espace sous forme d'une couche nuageuse mince, et jette sur le ciel entier un voile à demi transparent et d'une teinte laiteuse; ce voile peut être d'une texture si ténue et d'une transparence telle, que c'est à peine si l'azur du ciel pâlit, et au premier coup d'œil on est tenté d'inscrire le ciel comme tout à fait serein (p. B. 20 et B. 21). »

Digitized by Google

On peut se demander si les cirro-stratus de la première espèce sont bien autre chose que des cirro-cumulus. Sur quoi se fonde la distinction faite par l'auteur entre deux nuages qui *se produisent côte à côte* et *indubitablement dans la même couche d'air?*

Rapprochons du passage où l'auteur parle de la couleur grise des nuages en question, celui-ci, où il décrit un *nuage fibreux en rideau* (*cirro-pallium*) : « Dans la région occidentale du ciel, on vit s'élever lentement une mince couche de nébulosités fibreuses à moitié transparentes, tachetée de petits nuages plus denses, puis, dans le voisinage de l'horizon, la stratification nuageuse devint si serrée que l'on ne pouvait y méconnaître le début et l'apparition d'un cirro-pallium. Sur toute la lisière de l'horizon le manteau perdait sa couleur blanche et affectait déjà une teinte grise (p. B. 23). » Nous aurons à revenir plus loin sur l'apparence mentionnée ici.

Dans ces dernières années, des efforts ont été tentés pour établir une classification et une nomenclature nouvelles des nuages. Un météorologiste anglais, R. Abercromby, a fait deux fois le tour du monde, se transportant dans les différentes zones terrestres, afin d'étudier les formes des nuages. A la fin de l'année 1886, il fit un voyage en Suède et rencontra à Upsal Hildebrandsson, le savant suédois dont il a été question ci-dessus. Des entretiens de ces deux météorologistes, qui s'occupent depuis un grand nombre d'années de l'étude des nuages, résulta un projet de classification et de nomenclature qui fut livré à la publicité l'année suivante [1]. Sans entrer ici dans les détails de ce projet, disons seulement que ses auteurs y font une distinction entre la partie antérieure, mince, du voile de nuages supérieurs, et la partie postérieure, épaisse, de ce même voile. Ils conservent à la première seule le nom de *cirro-stratus*, et donnent à la seconde celui de *strato-cirrus*. Mais, comme Kæmtz, comme Howard, comme Poey, comme Weilbach, ils ne voient dans tout le voile en question qu'une seule et même couche. « Lorsque le voile nuageux élevé, dit Hildebrandsson en commentant la nouvelle nomenclature, devient plus épais et plus gris, écrivez *strato-cirrus* au lieu de *cirro-stratus*..... » Dans un ouvrage intitulé *Weather* [2],

[1] *Quarterly Journal of the R. Met. Soc.*, 1887, p. 148, et *Met. Zeitschr.*, 1887, p. 255.
[2] London, 1887. Vol. LIX de *The international scientific Series.*

Digitized by Google

qu'il publia en 1887, Abercromby disait, en termes presque identiques : « Parfois le cirro-stratus se forme plus bas et est d'une structure plus compacte; alors on doit l'appeler strato-cirrus (p. 101). » Dans ses *Instructions for observing clouds* [1], qui parurent l'année suivante, le même auteur définit ainsi ces deux formes nuageuses :

« *Cirro-stratus.* — Voile nuageux mince, élevé, qui, au lieu d'être uniforme comme le vrai stratus, est composé de fibres de cirrus entremêlées. Parfois les fibres de cirrus s'entrelacent et donnent à ce nuage une apparence réticulée, comme celle d'une toile tissée. Outre des fibres minces, le cirro-stratus est ordinairement associé à une espèce de voile informe, blanc, qui s'étend sur tout le ciel et qui est dû à la présence à un niveau élevé de poussière de glace; le soleil et la lune paraissent d'ordinaire entourés de halos lorsqu'ils luisent à travers cette forme nuageuse.

. . . . . .

» *Strato-cirrus.* — Nuage identique pour la structure générale avec le cirro-stratus, mais seulement plus dense et se trouvant à un niveau plus bas. Il est impossible de reproduire par la photographie les différences de densité qui, en pratique, autorisent l'observateur à distinguer l'une de l'autre la forme élevée de la forme de niveau moyen des nuages de cette structure, l'échelle relative de lumière et d'ombre disparaissant dans la chambre noire; mais généralement, en pratique, si le nuage est très mince, on peut le considérer comme flottant à un niveau plus élevé qu'un spécimen plus dense, de structure semblable. On ne peut cependant donner une règle absolue : l'observateur doit regarder tous les nuages environnants et estimer les formes aussi bien qu'il peut. Il diminuera de beaucoup la difficulté en se rappelant comment les nuages se sont formés, soit par l'abaissement successif des formes les plus élevées, soit par l'élévation des nuages bas. Le n° 4 de la planche photographique est un exemple de strato-cirrus de l'océan Indien, à 2° S. environ de l'équateur. La couche mince et plate de nuages s'allonge en fibres à ses extrémités, ce qui montre que le nuage est un composé de cirrus et de stratus; mais comme le nuage est peu dense et relativement bas, on s'aperçoit qu'il doit être appelé strato-cirrus.

[1] London, 1888.

Digitized by Google

» Les variétés du strato-cirrus sont aussi nombreuses que celles du cirro-stratus, et, comme ce dernier, il prend souvent une structure réticulée. »

En 1889, Hildebrandsson exposa la nouvelle nomenclature au Congrès météorologique de Paris [1]. Il parla du cirro-stratus et du strato-cirrus dans les termes suivants, que nous croyons encore devoir reproduire, parce qu'ils lèvent tous les doutes sur la pensée du météorologiste suédois et de son collaborateur : « Il faut avouer qu'en réalité les cirrus se transforment souvent en *cirro-stratus*. Ce voile mince consiste en filaments serrés de cirrus comme enchevêtrés les uns avec les autres, de façon à former des masses compactes qui paraissent complètement stratifiées..... Plus la pluie approche, plus les parties en sont serrées, jusqu'à ce qu'elles se confondent toutes ensemble pour former un tapis continu, ou un voile gris blanchâtre qui s'étend peu à peu sur tout le firmament. C'est ce tapis que Kæmtz a appelé cirro-stratus et auquel nous proposons le nom de *strato-cirrus*, en usage en Portugal, ou *alto-stratus*.

» Les mesures directes de MM. Ekholm et Hagström ont prouvé que la hauteur de cette forme n'est que la moitié environ de celle du voile mince des cirro-stratus. Cela suffit, selon notre opinion, pour justifier la distinction de ces deux formes, quoique en réalité ce soit souvent le même voile qui s'étend en entonnoir autour du centre d'une dépression barométrique, surtout dans sa partie antérieure. Plus le centre s'approche, plus le voile s'abaisse en devenant en même temps plus dense..... Du reste, nous proposons seulement ceci : ..... si les cirro-stratus deviennent plus sombres, plus épais, changez le nom de *strato-cirrus* [2] ou écrivez *alto-stratus* (p. 6, 7 et 11). »

Énoncée ainsi de nouveau et solennellement, dans un congrès, en 1889, cette vieille opinion, que le cirro-stratus passe graduellement au strato-cirrus, n'a soulevé ni protestation ni réserves, non plus que la théorie de l'entonnoir nuageux dans les cyclones, dont on vient de lire l'exposé et qui, à vrai dire, en découle immédiatement. Malgré cette approbation tacite de tous les

[1] *Ministère du Commerce, de l'Industrie et des Colonies. Congrès international de météorologie. Rapport sur la classification des nuages*, par M. Hildebrand Hildebrandsson. Paris, 1889. Voir aussi *Meteor. Zeitschr.*, 1889, pp. 442 et 443.

[2] L'auteur aura évidemment voulu dire *en strato-cirrus*.

Digitized by Google

météorologistes, nous croyons, comme nous l'avons dit en commençant, que *cette transformation des cirro-stratus en strato-cirrus* (*alto-stratus*) *n'a pas lieu.* Lorsque, laissant là les livres, nous avons cherché à la voir s'accomplir sous nos yeux, dans le ciel, nous avons observé que, dans un grand nombre de cas, il était certain qu'elle ne s'accomplissait pas; et que, dans tous, les apparences étaient assez trompeuses pour expliquer facilement les méprises des météorologistes, prévenus déjà favorablement en faveur de cette prétendue transformation.

On trouvera à la suite de cette note, textuellement reproduites, les principales de nos observations [1]. La conclusion qui en découle d'elle-même est que, *dans une dépression, il existe d'ordinaire trois couches de nuages* (4 avril, 2, 5, 8, 20, 24, 25, 29 mai), *savoir :* 1° *une couche supérieure de cirro-stratus,* précédés ou non de cirrus et donnant naissance au halo de 22° de rayon; 2° *une couche moyenne de cirro-cumulus,* donnant naissance à la couronne, qui a de 2 à 4° environ de rayon; 3° *une couche inférieure,* produisant également la couronne et formée, soit de cumulus, soit de nuages voisins du cumulus, tels que le cumulo-nimbus et le nimbus.

Ces trois couches peuvent, à certains moments, ne pas exister simultanément au-dessus du lieu d'observation.

Parfois il existe quatre couches, la couche moyenne étant double (1er mai, peut-être 21 mai et 4 juin); on a observé une fois deux couches seulement (19 juin), les cirro-stratus faisant défaut ou n'ayant pas été aperçus.

Les trois couches ont été observées très distinctement et très sûrement lors du passage par la Belgique d'un centre important de dépression (21 mai), et, une autre fois, lors de l'existence d'un centre de dépression sur la partie méridionale de la mer du Nord, non loin de la Belgique par conséquent (25 mai). Cela renverse la théorie de l'entonnoir d'Hildebrandsson.

La couche moyenne de cirro-cumulus offre dans ses différentes parties

[1] J'ai été constamment aidé, en faisant ces observations, par mon neveu, M. É. Vincent, assistant à l'Observatoire. A maintes reprises, lorsque mon attention se relâchait, il m'a fait remarquer des particularités importantes. Les observations de plusieurs journées ont été faites conjointement avec lui. Je n'ai rien annoté que je n'aie vu par moi-même, mais bien des choses m'auraient échappé s'il ne me les avait pas signalées. On trouvera juste que je dise ici quelle large part il a prise à mon travail.

Digitized by Google

des aspects très variés. La planche ci-jointe, qui est la reproduction d'une photographie prise, il y a plusieurs années, par M. W. Prinz, assistant à l'Observatoire, présente, dans un seul et même banc, une heureuse réunion d'un assez grand nombre de formes. En *D* on reconnait à première vue les moutons des cirro-cumulus typiques, quoiqu'ils soient serrés et même déjà soudés les uns aux autres. Vers la gauche, en *E*, ils sont moins distincts et tendent à former un tapis uniforme. En *F* on ne distingue plus de moutons : c'est une masse presque uniforme, plutôt fibreuse, dont les bords seuls se montrent grenus. Une semblable masse isolée serait bien de nature à induire en erreur; on pourrait aisément la prendre pour un cirrus ou un cirro-stratus. En *A* la matière se groupe de nouveau, mais en flocons et non plus en balles. Cette texture floconneuse est fréquente dans la couche moyenne (8, 14, 20, 25 mai, 4, 6 juin, 1.5 et 2.30 p.), et contribue à rendre si difficile la distinction entre cette couche et celle des cirro-stratus, surtout lorsque cette dernière offre la même apparence (21 mai, 5.30 p., 6 juin). En *C* les moutons succèdent aux flocons, et nous retrouvons la forme typique.

La portion *B* mérite de nous arrêter quelques instants. La matière nuageuse y est disposée en petites bandes parallèles, qui rappellent les *stries* des tubes de Geissler. Cette striation s'observe souvent dans les nuages de l'espèce cirro-cumulus; elle y est certainement plus fréquente que dans les autres nuages et constitue presque un caractère propre. Le sens de la striation ne paraît pas avoir d'importance, car nous avons observé, dans le même banc de nuages, des systèmes de stries orientés de plusieurs façons différentes.

Ce ne sont pas là, certes, toutes les formes que peuvent prendre les nuages de la couche moyenne, mais ce sont les plus communes. Notre planche fournira donc, dans presque tous les cas, d'utiles points de comparaison pour la détermination des cirro-cumulus.

La couche moyenne peut offrir encore une apparence uniforme, celle à laquelle on applique maintenant la dénomination d'alto-stratus ou de strato-cirrus. En certains endroits, de préférence sur ses bords, l'alto-stratus est moutonné, ce qui décèle clairement sa nature (13 avril, 1er, 9, 20 mai, 4, 19 juin).

Enfin la couche moyenne peut offrir un aspect que, dans nos observations,

Digitized by Google

nous avons appelé *en vagues* (4 avril, 8 mai, 4 juin). Les nuages qui le présentent semblent devenus raides, solides; ils prennent l'apparence d'une nappe liquide, ridée par de petites vagues, et qui viendrait à se congeler subitement dans cet état. On peut représenter assez bien cette apparence par le dessin en traçant quelques traits un peu courbes, plus ou moins parallèles, les ombrant fortement vers le haut, puis faisant décroître graduellement l'ombre en s'éloignant des traits. Cette sorte de nuages a été désignée sous le nom de *festoon clouds* [1]. Nous avons, du reste, observé ces *vagues* tant sur des cirro-cumulus que sur les nuages appelés actuellement strato-cumulus et cumulo-nimbus. Sur ces derniers nuages, qui comprennent les nuages orageux, elles se montrent parfois comme des poches arrondies [2]. L'aspect *en vagues* n'est pas rare.

Remarquons que la pluie peut tomber directement de la couche moyenne sur le sol (4 avril, 1er, 2, 20, 21, 24 mai, 4 juin), parfois pendant une journée entière : le 7 avril, la couche moyenne a versé de la pluie depuis le matin avant 8 h. jusqu'à 4 h. 30 m. du soir.

Nous n'avons pas besoin d'insister, croyons-nous, après ce qui précède, sur l'importance capitale qu'il y a à ne pas confondre les cirro-cumulus avec les cirro-stratus ou les cirrus. Les méprises, dans certains cas, sont presque fatales, d'abord à cause de l'épaisseur du tapis de cirro-stratus, qui nuit à l'éclairage des nuages moyens; ensuite à cause de la grande ressemblance de formes et de texture que peuvent offrir les cirro-cumulus avec les cirrus et les cirro-stratus. Nos annotations du 8 mai sont instructives à ce point de vue. Il était impossible de distinguer la couche supérieure de la couche moyenne à la simple vue. « On observe réellement toutes les transitions », écrivions-nous. Mais l'existence du halo jusqu'à 9 h., sa réapparition à 9 h. 15 m., et l'observation de la couronne, à 9 h., dans les parties granuleuses, striées, permettent de croire que les deux couches coexistaient bien, et qu'en annotant : « les cr-sr deviennent granuleux », nous étions le jouet d'une illusion.

[1] Les nuages désignés sous les noms de *mammato-cirrus* et de *mammato-cumulus* sont des *festoon clouds* où les vagues sont arquées et simulent des poches, des mamelles. Voir dans *Nature*, vol. XXI, 1880, p. 209 et 211, des gravures représentant ces deux espèces de nuages.

[2] Voyez la note précédente.

Digitized by Google

Le 14 mai, c'était la forme des nuages qui aurait pu induire en erreur, les cirro-cumulus ressemblant, en certains endroits, aux cirro-stratus.

A d'autres journées, comme celles du 20 mai et du 6 juin, un observateur peu attentif et qui n'aurait examiné le ciel que de temps en temps, n'aurait certes pas distingué la couche supérieure de la couche moyenne, quoiqu'elles existassent toutes les deux à la fois.

Enfin, le 22 juin, il nous a été impossible de voir la couche moyenne s'avancer au-dessous de la couche supérieure, quoique, à certains moments (7.30 a., 8.45 a., 9.10 a.), on ait reconnu d'une manière certaine l'existence des deux couches.

Un voile épais de nuages peut intercepter la lumière au point de rendre très vagues les contours de cumulus situés au-dessous de lui (2 mai, 11.45 a., 8 mai). Rien d'étonnant donc à ce que des flocons légers de cirro-cumulus perdent toute netteté sous un pareil voile.

A certains moments les nuages de la couche supérieure et ceux de la couche moyenne éprouvent des modifications très rapides, qui les rendent uniformes et empêchent toute distinction entre les deux couches (20 mai, 2.30 p., 22 juin, 10.40 a.).

Ce n'est qu'après avoir été soi-même aux prises avec les difficultés qu'opposent fréquemment à leur séparation la couche supérieure et la couche moyenne, que l'on s'explique comment Howard a pu parler d'alternatives de cirro-cumulus et de cirro-stratus; comment Kæmtz a pu être amené à dire que le cirro-stratus a parfois les bords crépus et se rapproche du cirro-cumulus; comment Poey a pu avancer que son pallio-cirrus n'est qu'un cirro-cumulus transformé; comment Weilbach a pu déclarer que les cirro-stratus se rencontrent côte à côte avec les cirro-cumulus et, par conséquent, dans la même couche; que les caractères des cirro-stratus peuvent être très voisins des cirro-cumulus; que les cirro-stratus ont, dans certains cas, de la ressemblance avec des cirro-cumulus grossiers; comment Hildebrandsson et Abercromby donnent le nom de cirro-stratus, le premier aux nuages de ses planches 4 et 6 [1], le second à ceux de sa figure 2 [2], qui toutes représentent des cirro-cumulus.

[1] *Sur la classification des nuages*, etc.
[2] *Instructions for observing clouds.*

Digitized by Google

La forme seule n'est pas toujours un criterium assez sûr pour déterminer l'espèce de nuages à laquelle on a affaire. Les phénomènes optiques du halo et de la couronne, trop négligés par ceux qui se sont livrés à l'étude des nuages, sont un moyen de détermination aussi simple qu'infaillible, auquel nous avons eu constamment recours. On n'observe jamais la couronne dans les cirrus ni dans les cirro-stratus, tandis qu'elle se produit chaque fois que des cirro-cumulus passent devant le soleil ou la lune, à moins que ces nuages ne forment une couche tout à fait uniforme, un alto-stratus. Le halo, par contre, ne se voit jamais dans les cirro-cumulus, mais on le voit apparaître dans les cirrus et surtout dans les cirro-stratus. Lors donc qu'on hésitera à ranger un nuage parmi les cirro-cumulus ou parmi les cirro-stratus, que l'on ait recours aux phénomènes optiques : ce sera un cirro-cumulus s'il donne naissance à une couronne, un cirro-stratus s'il engendre un halo (8, 14 mai).

Il faut bien remarquer que le halo peut alternativement apparaître et disparaître dans les cirro-stratus (2, 8, 20 mai, 6, 22 juin). Lorsqu'on cesse de l'y apercevoir, on ne peut donc pas en conclure que la transformation du cirro-stratus en alto-stratus se soit accomplie. La couronne peut, de même, varier d'éclat dans les diverses portions de la couche moyenne ou d'un même banc de cette couche; elle disparaît dans les parties uniformes appelées alto-stratus, mais se montre sur les bords, où la structure est moutonnée.

L'importance qu'il y a à rechercher dans les nuages les halos et les couronnes nous engage à donner quelques conseils pratiques à ce sujet. Lorsque c'est la lune qui donne lieu à ces cercles colorés, leur observation ne présente guère de difficulté, mais quand ils sont produits par le soleil, il est moins facile de les remarquer. Nous recommandons aux observateurs de procéder à la recherche des couronnes solaires au moyen d'un verre coloré en noir ou en bleu foncé, où on les aperçoit sans peine par réflexion. Un verre noirci sur une flamme fumeuse ou placé sur un papier noir convient également. Un simple morceau de verre à vitre suffit même; il n'a que l'inconvénient de laisser voir en même temps par transparence les objets qui se trouvent au-dessous de lui. Quant aux halos solaires, nous avons trouvé qu'on les voit le plus facilement à l'œil nu. Kæmtz recommandait de les observer par réflexion sur le verre noir, pour ne pas être ébloui. Mais on évite ce dernier inconvénient en tenant devant le soleil la main ou quelque

Digitized by Google

autre objet. On voit bien, dans le miroir noir, les halos qui sont brillants, mais ceux qui sont très faibles y deviennent invisibles; et ce sont ceux-ci qu'il importe de voir, car ils se produisent quand le cirro-stratus est déjà presque partout très épais et que les cirro-cumulus sont devenus très nombreux. Ajoutons enfin que l'on est moins vite ébloui si l'on reste en plein air, que si l'on jette les yeux sur le ciel au moment où l'on sort d'une chambre.

Disons en passant que le verre coloré qui sert à l'observation des couronnes solaires est aussi très utile pour découvrir les cirro-cumulus floconneux, diffus (voir pl., en *A*), dans le voisinage immédiat du soleil, lorsqu'il est impossible de les y distinguer à la simple vue (20 mai, 2.30 p., 19 juin, 1 p.).

Il arrive, sans doute, que les nuages que l'on a à déterminer à un moment donné ne passent pas devant le soleil. Mais si l'on recherche assidûment les couronnes, pendant quelques mois, dans les nuages qui semblent participer autant de la nature du cirro-stratus que de celle du cirro-cumulus, on aura passé en revue un grand nombre de formes, qu'on pourra classer plus tard sans devoir recourir chaque fois aux phénomènes optiques.

Lorsque, à l'avant d'une dépression, les premiers cirro-cumulus qui s'avancent sous le voile épais de cirro-stratus sont très vagues et difficilement discernables (8, 14, 20 mai, 6 juin), on peut adjoindre aux caractères optiques dont nous venons de parler deux autres caractères d'une observation très facile. Le premier consiste dans la différence de coloration que présentent les cirro-stratus et les cirro-cumulus lorsqu'on les observe en certains points du ciel, à une distance de l'horizon qui n'excède pas 45° environ. On voit alors fréquemment ces derniers nuages se détacher nettement en gris sur le fond blanc des cirro-stratus (20, 29 mai, 4, 6 juin). Le deuxième caractère est la différence de vitesse apparente que présentent les nuages dont il s'agit. Aussi longtemps que l'on distingue les rameaux des cirro-stratus, ce moyen est très pratique (29 mai). Mais il est impossible d'y recourir quand la couche supérieure devient uniforme, à moins qu'une grande éclaircie ne s'y montre et que le hasard n'amène des cirro-cumulus devant elle.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE NUAGES.

Les remarques placées entre crochets ont été ajoutées après coup. Elles consistent d'ordinaire en un exposé succinct de la situation atmosphérique sur l'occident de l'Europe.

On a employé les abréviations suivantes :

cr	pour	cirrus,
cm	—	cumulus,
sr	—	stratus,
al	—	alto,
nb	—	nimbus.

L'*Atlas* qui est quelquefois mentionné est l'*Atlas de nuages* publié en 1890 par Hildebrandsson, Köppen et Neumayer, et dans lequel on a suivi la classification et la nomenclature proposées par Hildebrandsson et Abercromby.

On a fait suivre les heures du matin de a.; celles du soir, de p.

1891. — 4 avril.

[8 a. Minimum barométrique de 745^{mm} sur l'Océan, près de la côte occidentale de l'Irlande.]

7.30 a. Cr-sr farineux; par-ci par-là structure feutrée.

10.30 a. Cr-sr épais, halo. Puis plus bas, une autre couche, avec épaisissements indigo. [Ces épaisissements sont des *vagues*.] Elle montre, vers 1.30 p., dans une grande éclaircie, de gros moutons. A 1.15 p. il en tombe une petite pluie. Plus bas, quelques cm.

13 avril.

[8 a. Minimum barométrique de 755^{mm} sur l'Allemagne septentrionale; un autre de même valeur au SW de l'Angleterre.]

Matin, voile épais, uniforme; plus bas, cm. A 0.30 p. éclaircies dans le voile épais, on reconnaît qu'il est formé de gros cr-cm; puis les éclaircies disparaissent et le voile uniforme, ou presque uniforme, se rétablit.

Digitized by Google

1er mai.

[8 a. Mimimum barométrique de 740mm sur l'Océan, près de la côte septentrionale de l'Irlande. — 2. p. Même situation.]

8.15 a. Devant le soleil, couche uniforme, ayant tout à fait l'aspect de l'al-sr de l'*Atlas;* plus loin elle est en gros cr-cm brouillés. Plus haut, une autre couche épaisse, blanche : cr-sr?

Dans le courant de la journée, il tombe à diverses reprises de courtes pluies de la couche de cr-cm épais et diffus. Très peu de nuages bas, lambeaux de nb.

De 3.0 à 3.30 p., très bien vu trois couches :

1° La plus supérieure, cr-sr en bandes SSW-NNE; ils viennent du SW. Tourmentés, farineux. Pas de halo;

2° La moyenne, par places petits moutons, ailleurs plus gros moutons, ailleurs encore masses épaisses; le tout très blanc, éblouissant. Belle couronne rousse, large. Vient du SW;

3° L'inférieure, un peu moutonnée par places, grise sous la précédente; dans tout l'E tourmentée, presque uniforme, gris-indigo, comme le dessous d'un cm-nb, à barres; elle a donné de la pluie pendant quelques instants à 3 p. Vient du SW, comme les deux précédentes.

2 mai.

[8 a. Mimimum barométrique principal de 736mm sur la Suède centrale; dépression secondaire sur l'Angleterre. — 2 p. Minimum principal sur le golfe de Bothnie, secondaire sur la mer du Nord.]

8.30 a. Ciel couvert uniformément, mais à l'horizon SE des bandes montrent que l'on a affaire à un cr-cm diffus.

9.15 a. Bandes près du soleil dans cette couche uniforme. Quelques petits cm.

10.30 a. Couche toujours uniforme, on voit le soleil. C'est bien le ciel représenté dans l'*Atlas* sous le nom d'al-sr (planche 5), mais au lieu de diablotins il y a des cm au-dessous.

Vers 11.30 a. toujours la même couche uniforme, mais plus épaisse, car on n'aperçoit plus le soleil. Cm épais. Faible pluie commence, elle tombe évidemment de la couche uniforme.

11.45 a. Les cm ont un aspect de nb. Il est difficile d'en bien juger, à cause du faible éclairage, résultant de la présence de la couche supérieure, uniforme.

11.50 a. La couche inférieure est franchement nb; grandes masses frangées au-dessous; toujours pluie, un peu plus forte. Il y a encore des cm à l'horizon SE et surtout à l'horizon NW.

3.50 p. Le soleil perce. On voit un voile de cr-sr, un halo et des cm. En regardant attentivement vers le N et l'E, on voit de petits nuages gris, supérieurs aux cm. Est-ce la couche d'al-sr dont on voit le bord postérieur?

4.30 p. Halo dans cr-sr disparaît; la couche devient très uniforme.

5.30 p. Grande éclaircie, halo revient.

Digitized by Google

5 mai.

[8 p. Maximum barométrique de 770^{mm} sur la mer du Nord.]

Fin de la matinée et après-midi, cr et surtout cr-sr; halo.

6 p. Près de l'horizon N et E, d'autres nuages plus bas, cr-cm.

7.30 p. Cr-cm moutonnés, diffus, et au-dessus une autre couche blanche, cr-sr.

8 mai.

[8 a. Minimum principal de 745^{mm} à la côte septentrionale de l'Irlande; secondaire de 747^{mm} sur le SW de l'Angleterre. — 2 p. Minimum de 748^{mm} environ sur la Manche; un autre de 750^{mm} sur l'Autriche.]

8 a. Cr-sr sur tout le ciel; halo avec arc tangent supérieurement.

Vers 9 a. Les cr-sr deviennent granuleux, floconneux, avec bandes irrégulières; il reste sur tout le ciel un fond farineux. Halo disparaît à 9 a., mais reparaît vers 9.15 a. jusqu'à 9.30 a. A 9 a., couronne dans ces parties granuleuses.

9.40 a. Dans l'W, toujours apparences de cr-sr; dans l'E, cr-cm épais. On observe réellement toutes les transitions, mais est-ce réel?

0.30 p. Ciel uniformément blanc, halo partiel.

0.45 p. Idem.

1.0 p. Idem.

2.30 p. Tout le ciel est couvert de la couche *en vagues* déjà souvent observée antérieurement; au-dessous, quelques cm; on distingue très difficilement ceux-ci de la couche qui les surmonte, excepté près de l'horizon.

[A ces notes est joint un dessin des bandes irrégulières, mentionnées vers 9 a. Il a beaucoup de ressemblance avec la portion *B* du banc de nuages représenté sur la planche ci-jointe.]

9 mai.

[8 a. Aire centrale d'une dépression, 748 et 749^{mm}, sur le midi de la France, la Suisse et le SW de l'Allemagne.]

Depuis avant 8 a., pluie.

11.10 a. La couche de nb se divise; on voit l'al-sr uniforme et le disque clair du soleil. La pluie cesse un peu après. A partir de ce moment, cm.

1 p. Dans le NW, la couche paraît composée de cr-cm diffus.

2.15 p. Mêmes apparences. Toujours des cm.

14 mai.

[2 p. Maximum barométrique de 767^{mm} environ sur le golfe de Gascogne. Minimum de 744^{mm} sur le golfe de Finlande.]

1 p. Couche étendue de nuages qui ont par places l'aspect de cr-sr épais, et qui, ailleurs, montrent un grain et des condensations locales, comme des cr-cm diffus, floconneux à certaines places. Pas de halo. Au miroir noir, couronne large; ce sont donc des cr-cm.

Digitized by Google

20 mai.

[8 a. Minimum principal de 745^{mm} sur la mer du Nord, entre l'Écosse et la Norvège; secondaire de 752^{mm} sur le canal Saint-Georges. — 2 p. Le minimum principal atteint la Norvège; le secondaire est sur la mer d'Irlande.]

9.45 a. Halo à peine discernable. Quelques cr-cm devant le soleil; viennent du SW, comme les cr-sr. D'autres au NW?

10.5 a. Halo complet, assez vif.

10.15 a. Dans le SE, cr-cm vagues?

10.45 a. Passage devant le soleil de cr-cm floconneux, donnant une couronne pâle; on peut les voir, sans verre, en cachant le soleil avec la main. Le halo persiste; il est vif.

10.51 a. On voit bien, dans l'E, sans verre, ces cr-cm floconneux, vagues.

10.52 a. Halo maintenant très vif.

11.0 a. Le cr-sr est devenu plus mince et le halo plus vif.

0.45 p. Grand banc de cr-cm floconneux, moutonnés grossièrement, devant le soleil. Tout le ciel est encore couvert de cr-sr. Couronne pâle, assez large, dans ces cr-cm. Plus de halo. Les cr-cm viennent du SW, les cm du SSW.

1.20 p. Traces de halo, plus de cr-cm. Dans le S, on voit un banc de cr-cm gris, sur le fond blanc des cr-sr.

1.25 p. Pas de halo, pas de couronne.

1.35 p. Banc de cr-cm passe devant le soleil, cr-cm SW, cm S; les cr-cm sont grossièrement moutonnés.

1.45 p. Grands bancs de cr-cm moutonnés et légers, avoisinant le soleil, où il y a encore des places à cr-sr farineux, très peu épais, pourtant pas de halo.

1.50 p. Cr farineux, cr-cm vaguement moutonnés, cm, pas de halo. Directions : SW/SW/SSW.

1.55 p. Partie de halo certaine. Quelques instants après, vive.

2.15 p. Traces de halo, quelques instants. Dans le NW, les cr-cm ne se détachent pas sur les cr-sr, tout est blanc; dans le SSE, au contraire, les cr-cm sont gris sur le fond blanc des cr-sr.

2.20 p. Traces de halo.

2.30 p. Au miroir noir, cr-cm devant le soleil. On ne les voit pas se détacher sur la couche de cr-sr. Puis tout devient uniforme, épais, en quelques instants. Plus de halo, plus de couronne.

2.50 p. Le ciel a l'aspect de l'al-sr, mais pas tout à fait uniforme.

3.0 p. Al-sr uniforme, excepté à une place, où l'on voit des cr-cm moutonnés, vagues, dont on peut observer la direction. Ils se fondent avec le reste de la couche, qui est uniforme et qui couvre tout le ciel.

4.30, 5.30 p. et après. Gouttes; elles tombent évidemment de la couche de cr-cm, car il n'y a que de rares cm, dont aucun dans le voisinage du zénith.

Vers 6 p. Petites stries parallèles dans la couche de cr-cm.

Digitized by Google

21 mai.

[8 a. Minimum de 745^{mm} sur le nord de la France. — 2 p. Minimum de 744^{mm} sur la mer du Nord, entre la Hollande et l'Angleterre. — 8. p. Minimum de 745^{mm} sur la côte allemande de la mer du Nord.]

10.30 a. Ciel couvert de cr-cm diffus, serrés, épais. Çà et là quelques cm. Bonne pluie, tombant pendant quelques instants de la première couche.

11.15 a. Éclaircies. Il y a trois couches (peut-être quatre) : au-dessus, cr-sr, SW; plus bas des cr-cm diffus, mais grossièrement moutonnés au bord des éclaircies; vers l'horizon, ils se détachent en gris sur la couche supérieure; SSW; plus bas encore, cm et masses de cm agglomérés, donnant des barres parallèles à l'horizon aux quatre points cardinaux, mais qui ne sont pas les sr-cm de l'*Atlas*.

2 p. Les masses de cm agglomérés donnent de petites ondées.

2.45 p. Grandes éclaircies; on voit trois couches : cm, cr-cm diffus et cr-sr; quelques instants, partie de halo.

4 p. A plusieurs reprises, halo partiel assez vif dans des cr-sr uniformes et peu épais. Plus bas une couche de cr-cm diffus, qui donne une couronne. Plus bas encore, cm.

5.30 p. Mince couche de cr-sr un peu floconneux, dans lesquels parhélie à gauche et à droite; plus bas, cr-cm d'un blanc éclatant, finement moutonnés et épais; plus bas, cm; dans le N, cm-nb, dont les sommets percent la couche moyenne.

6.12 p. Orage.

24 mai.

[8 a. Minimum de 750^{mm} sur le SW de l'Angleterre.]

8.15 a. Ciel couvert de cr-cm diffus, quelques lambeaux de nb; pluie faible, tombant de la couche de cr-cm.

8.55 a. Halo presque complet, faible; voile uniforme; plus bas, débris de la couche de cr-cm.

25 mai.

[8 a. Minimum barométrique de 753^{mm} sur la mer du Nord, près de la côte hollandaise.]

8.20 a. Halo partiel pendant quelques minutes dans un cr-sr léger; plus bas, cr-cm floconneux, en grandes masses, et plus bas, cm. Donc trois couches. Couronne simple dans ces cr-cm.

29 mai.

[8 a. Minimum de 748^{mm} près de la côte septentrionale de l'Irlande; un autre de 755^{mm} sur le golfe de Gascogne, près de l'Espagne.]

Dès le matin, banc (de cr-cm ou de cr-sr) dans l'W et le S; cm.

1 p. Ciel faiblement laiteux, halo faible, presque complet. De petits bancs de cr-cm

Digitized by Google

farineux, un peu en petits moutons, prennent naissance; d'autres se fondent et disparaissent. Marche SSW. Ces petits bancs paraissent être les cr-sr de Poey. Voir ses figures et son texte dans *Comment on observe les nuages*.

1.30 p. Grand banc de cr-cm s'avance du S.

1.40 p. Il commence à passer devant le soleil, belle couronne double (brun, vert pâle, brun pâle). Il y a de petits bancs farineux qu'on pourrait prendre pour des cr, car ils ont quelque chose de filamanteux, mais on y voit un grain, des moutons extrêmement petits et pas de filaments nets.

4.10 p. Les cr-sr surtout dans l'E; des cr-cm diffus arrivent du SW; atteignent déjà le zénith; couronne et halo. On voit les cr-cm aller plus vite que les cr-sr, au zénith, grâce à quelques portions de cr-sr nettes. Dans le SW, banc sombre, indigo; ce sont des cr-cm. Bientôt, dans l'E, on voit les premiers cr-cm se projeter en gris sur les cr-sr blancs. Au-dessous des cr-cm, des cm.

4.40 p. On voit toujours dans le NE des cr-cm projetés en gris sur les cr-sr blancs.

4 juin.

[8 a. Minimum de 748^{mm} sur la mer, près de la côte méridionale de l'Irlande.]

4 a. Halo partiel.

5.45 a. Beau halo, presque complet.

6.30 a. Dans le SW, cr-sr. On voit, de plus, de petits bancs gris noirâtre, vaguement moutonnés, de cr-cm diffus, qui se détachent très nettement sur le fond blanc des cr-sr. Dans le NW, files de cr-cm moutonnés. Deux beaux cr dans le NW. Des cr-sr à l'horizon N; d'autres, légers, près du zénith, vers le NE. Partie de halo faible.

7.20 a. Grand banc de petits moutons passe au zénith; belle couronne double (roux, vert, roux); passe au-dessous du cr-sr, qui est au zénith. A l'arrière, ce banc n'est plus moutonné mais floconneux. Dans la partie épaisse du banc, la couronne est faible, mais toujours double. Dans le SW, des cr-cm moins beaux.

8. a. Un immense banc de gros cr-cm (al-cm de l'*Atlas*) s'avance de l'W environ. Il me paraît inférieur au banc de petits moutons. Il est difficile de le décider, car le banc de petits moutons est trop éloigné déjà.

9. a. Les gros cr-cm couvrent tout le ciel; seulement quelques éclaircies. Ils sont devenus très gros et floconneux. Dans le SE, ils sont *en vagues* à une place. Quelques rares cm.

10 a. La couche de cr-cm est devenue épaisse et il n'y a plus ou presque plus de traces de moutons; c'est une couche continue, si ce n'est en quelques points, à l'horizon, où l'on voit des éclaircies et des cm. Ailleurs aussi quelques rares cm. Toujours, par places, aspect *en vagues*.

Vers 11.30 a. la couche est plus uniforme.

De 11.30 a. à 0.30 p., cette couche, devenue maintenant presque entièrement uniforme, verse une bonne pluie; il n'y a que quelques squelettes de cm, comme des scories légères.

Nouvelle pluie de 1.30 à 2.10 p., tombant encore de cette couche. Quelques cm.

Ces deux pluies ont donné ensemble 1^{mm},3 d'eau.

Digitized by Google

6 juin.

[8 a. Minimum de 755^{mm} sur le golfe de Gascogne.]

De bonne heure, couvert uniformément. Sr?

10 a. Cr-sr indistinct et gris; pas blanc; partie de halo faible. Dans le N, des lambeaux de sr.

11 a. Halo vif, presque complet. Le cr-sr est floconneux, plus mince et plus distinct qu'à 10 a.; il est plus blanc; il vient du SW.

11.30 a. Toujours halo partiel, vif. Les cr-sr ont l'aspect de masses épaisses, nébuleuses, sans structure apparente dans le S; dans le NE, ils ont la forme de bandes tordues, plumeuses, mais diffuses.

0 p. Toujours halo vif; les cr-sr sont plus uniformes. Pas de cr-cm.

1.5 p. Le cr-sr est devenu épais; il est blanc. Dans le SE, ciel plus clair, des portions isolées (de cr-sr ou de cr-cm). Devant le soleil, outre les cr-sr, il y a des cr-cm floconneux, diffus, donnant une couronne pâle. Dans le SW, on en voit se détacher en gris sur les cr-sr blanc gris.

1.10 p. Voisinage du soleil, couche présentant presque exactement l'aspect de la planche 4 d'Hildebrandsson. Dans l'E, petits nuages gris sur fond gris clair de cr-sr. Couronne assez brillante. Pas de halo.

1.30 p. Plus de couronne; halo partiel assez vif.

2.30 p. Plus de halo. Grandes éclaircies dans les cr-sr; il y a de grandes portions très minces, où l'on ne voit pourtant pas de halo. Petits groupes de cr-cm floconneux, très blancs. Direction des deux couches : SW.

2.50 p. Toujours pas de halo, quoique le cr-sr soit très léger près du soleil. Les cr-cm ont l'aspect de ceux de la photographie de Prinz, en *A* et en *F*.

3.5 p. Halo faible.

3.25 p. Dans le S, à l'horizon, des cr-cm gris noirâtre se détachent bien sur le fond blanc des cr-sr.

5.50 p. Partie de halo assez faible, mais belles couleurs.

8.20 p. Au NW, la couche supérieure (cr-sr) est d'un rouge de feu près de l'horizon; plus haut, jaune clair; plus haut encore, de nouveau rouge feu. Des bancs de cr-cm diffus se détachent en gris ardoise sur ce fond clair.

Dans l'E, le ciel est gris ardoise, uniforme. Dans le SW, des cr-cm sur un fond uniforme, mais ils ne s'en détachent pas par leur coloration, qui est la même que celle de ce fond.

19 juin.

[8 a. Pression supérieure à 765^{mm} sur la majeure partie de l'Europe; maximum de 770^{mm} de l'Irlande à Paris.]

Depuis 4 a., cr-cm, tantôt en petits moutons, tantôt en grosses balles.

10 a. Gros moutons.

11 a. Les cr-cm forment une couche presque uniforme. Couronne.

Digitized by Google

11.30 a. La couche est entièrement uniforme. Plus de couronne. Le ciel a tout à fait l'aspect de la planche 5, *Alto-stratus*, de l'*Atlas*. On y voit le disque du soleil, assez clair mais diffus; pas de couronne ni de halo. Cm isolés.

1 p. Près du soleil, au miroir noir, on voit des cr-cm diffus pendant quelques minutes.

1.25 p. Sur une grande portion du ciel, près du zénith, vers l'E et le N, gros moutons, entre lesquels on voit le bleu du ciel. Ailleurs, la couche à laquelle ils appartiennent est uniforme. Toujours cm, passant maintenant au cm-nb. Rares gouttes.

1.40 p. La portion moutonnée de la couche de cr-cm passe devant le soleil; belle couronne. Directions : cr-cm, NNW; cm, NNW.

1.45 p. La portion de la couche de cr-cm qui passe maintenant devant le soleil a l'aspect du haut de la planche 9 d'Hildebrandsson. Couronne d'abord pâle dans cette partie; belle, quelques instants plus tard.

Ensuite, jusqu'à 4 p., vu, à différentes reprises, des moutons plus ou moins serrés; plus bas, cm.

4.30 p. Le ciel a l'aspect représenté sur la photographie 10 d'Hildebrandsson, où l'on voit un tapis de moutons soudés et peu distincts les uns des autres.

Vers 6 p., les moutons sont plus distincts.

A 7 p., le ciel est presque uniforme; on ne distingue plus de vagues moutons que çà et là, en regardant attentivement.

7.30 p. Près du zénith, une grande portion de la couche de cr-cm se présente sous l'aspect de moutons fondus ensemble sur les bords, mais laissant entre eux de petites éclaircies bleues.

22 juin.

[8 a. Pressions supérieures à 765^{mm} sur les Iles Britanniques, la mer du Nord et la Scandinavie; des minima barométriques de 760^{mm} sur l'Europe centrale.]

Vers 6.45 a. Ciel presque entièrement couvert de cr-cm en moutons; au travers des éclaircies, on voit, dans le N, une couche de cr-sr.

7.30 a. Cr-sr sur tout le ciel, excepté à l'horizon SW, où l'on voit le bleu. Dans le N et le NW, à quelque distance de l'horizon, bancs de légers nuages, se détachant en gris un peu ardoise sur le fond blanc grisâtre des cr-sr. Halo partiel avec arc tangent supérieurement, le tout vif.

8 a. Halo plus pâle.

8.45 a. Traces de halo. Le soleil ne donne plus d'ombres sur le sol. Dans le N, jusque 15° au-dessus de l'horizon, banc gris un peu ardoise, dont le bord est parallèle à l'horizon. Près de ce bord il y a des parties détachées, et, à une place, une bande de stries délicates, très régulières.

8.50 a. Plus de halo. Le ciel a exactement l'aspect de l'al-sr de *l'Atlas* : il est gris, uniforme, et le disque du soleil n'a pas de bords nets.

9.10 a. Le banc du N paraît avoir un mouvement vers l'W. Il se termine du N au NE par une bande élevée au-dessus de lui, parallèle à l'horizon.

Digitized by Google

9.15 a. A gauche du soleil, jusqu'à une distance de 45°, le voile gris n'est plus uniforme; il y a des condensations locales, mais vagues, qui donnent au voile un certain aspect de moutons diffus.

9.20 a. Halo réapparaît; il est pâle.

9.25 a. Encore des traces de halo; il disparaît bientôt; alors aspect d'al-sr; pas d'ombres sur le sol.

10.0 a. Toujours aspect d'al-sr. Dans le N des cr-cm gris, assez vagues, en mottes un peu espacées.

10.25 a. Le voile de cr-sr est devenu si épais qu'on soupçonne à peine le soleil. Toujours cr-cm dans le NW, très distincts (photographie de Prinz, *C*); à une place, on y voit des vagues, quoique les cr-cm ne forment point une nappe continue.

10.40 a. Les cr-cm du NW ont complètement disparu, le ciel est uniformément gris, excepté près de l'horizon SW, où il est un peu plus clair et où l'on voit de vagues barres NW-SE et un petit nuage (lambeau de cm ou de cr-cm?). Gouttes.

11 a. Faible pluie. Quelques cm dans le S.

11.10 a. Grandes stries vagues dans la couche grise; rares cm; pluie continue, faible.

11.15 a. Quelques stries vagues au N, d'autres au S.

11.27 a. Plus de stries au S, stries vagues sur tout le ciel septentrional, formant des arcs dont le sommet est au N et les pieds à l'E et à l'W. La pluie continue, elle est faible.

11.35 a. Par ci par-là, sur le voile gris, des taches un peu plus sombres, estompées. Toujours pluie faible. Très rares lambeaux de cm. Ensuite ciel toujours uniforme, faible pluie continue, jusqu'à 0.50 p. Alors la pluie cesse et le ciel offre dans l'W de grosses stries assez nettes et les nuages *C* de la photographie de Prinz, qu'on ne sait pas distinguer de la couche uniforme; ils paraissent en faire partie. Rares lambeaux de cm.

Digitized by Google

Digitized by Google

Phototypie E. Aubry, Bruxelles. Cliché de M. W. Prinz.

PLAQUE ORTHOCHROMATIQUE · MARQUE « REGULARITAS » DE BOISSONAS.

Objectif antiplanat de Steinheil 48 millim. Diaphragme 6. Pose 1/16 de sec.

DÉVELOPPEMENT AU FER.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LA CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE

ENTRE LES

ÉLÉMENTS DE DEUX ESPACES LINÉAIRES QUELCONQUES

PAR

François DERUYTS,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 10 octobre 1891.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LA CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE

ENTRE LES

ÉLÉMENTS DE DEUX ESPACES LINÉAIRES QUELCONQUES.

1. Soient deux espaces à n dimensions, E_n et E'_n : convenons de représenter par x_i et y_i $(i = 1 . 2 . 3 \ldots n+1)$ les coordonnées homogènes d'un point, selon qu'il se trouve dans l'espace E_n ou dans l'espace E'_n, et par ξ_k et η_k, $(k = 1 . 2 . 3 \ldots n+1)$ les coordonnées d'un espace linéaire à $n-1$ dimensions, selon qu'il se trouve dans l'espace E_n ou dans l'espace E'_n.

Une équation bilinéaire à deux séries de $n+1$ variables, dont l'expression symbolique est

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f = a_x a'_y \equiv b_x b'_y \equiv \cdots \equiv n_x n'_y = 0,$$

définit une *correspondance homographique* entre les éléments *complémentaires* (*) des deux espaces E_n et E'_n.

Voici ce que l'on doit entendre par là : à un point X de l'espace E_n, dont

(*) Nous appelons *espaces complémentaires* situés dans un espace à n dimensions, les couples d'espaces tels que point et espace à $n-1$ dimensions, droite et espace à $n-2$ dimensions, en général espace à k dimensions et espace à $n-k-1$ dimensions.

Digitized by Google

les coordonnées sont x_i, $(i = 1, 2, 3 \ldots n+1)$, il correspond tous les points de l'espace E'_n, situés dans l'espace à $n-1$ dimensions représenté par l'équation (1) dans laquelle les x sont des constantes : les coordonnées y_k $(k = 1, 2, 3 \ldots n+1)$ de cet espace satisferont donc aux relations

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho y_k = a_x a'_k \equiv b_x b'_k \equiv \cdots \equiv n_x n'_k,$$

ρ étant un facteur quelconque de proportionnalité.

A un point Y de E'_n il correspond de même, dans E_n, les points situés sur l'espace à $n-1$ dimensions dont les coordonnées satisfont aux conditions

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho' \xi_k \equiv a_k a'_y \equiv b_k b'_y \equiv \cdots \equiv n_k n'_y,$$

ρ' étant un facteur de proportionnalité et $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ étant les coordonnées du point Y.

Pour abréger le langage, nous dirons qu'à un point quelconque X de E_n il correspond un espace à $n-1$ dimensions E'_{n-1} de E'_n, et qu'à un point Y de E'_n il correspond un espace à $n-1$ dimensions E_{n-1} de E_n.

Si, dans E_n, le point X appartient à l'espace E_{n-1}, on a la condition

$$(XE_{n-1}) \equiv (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_{n+1} x_{n+1}) = 0,$$

ou bien

$$(XE_{n-1}) = a_1 x_1 a'_y + a_2 x_2 a'_y + \cdots = y_1 a'_1 a_x + a'_2 y_2 a_x + \cdots = 0,$$

ou bien

$$(XE_{n-1}) = (y_1 y_1 + y_2 y_2 + y_3 y_3 + \cdots + y_{n+1} y_{n+1}) = 0.$$

Si donc on a $(XE_{n-1}) = 0$, on a réciproquement (YE'_{n-1}), et vice versa, ce qui s'exprime par l'énoncé suivant :

Si un point X *de* E_n *est situé dans l'espace correspondant à un point* Y *de* E'_n, *réciproquement ce point* Y *sera situé dans l'espace correspondant de* X, *et vice versa.*

2. Considérons dans l'espace E_n tous les points X situés dans un

Digitized by Google

espace E_{n-1}, de coordonnées ξ_i, $(i = 1, 2, 3 \ldots n+1)$: nous aurons la condition

$$(4). \quad \ldots \ldots \quad (XE_{n-1}) \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_{n+1} x_{n+1} = 0;$$

à ces points il correspond, dans l'espace E'_n, des espaces à $n-1$ dimensions dont les coordonnées sont représentées par les équations (2). Si, entre les relations (2) et la relation (4), nous éliminons les variables $x_1\ x_2 \ldots x_{n+1}$, nous obtenons symboliquement l'équation

$$F \equiv (a\,b\,c \ldots n,\ \xi)\,(a'\,b'\,c' \ldots n,\ \eta) = 0,$$

équation que nous écrirons, pour abréger,

$$(5) \quad \ldots \ldots \ldots \quad F \equiv A_\xi B_\eta = 0.$$

Si, entre les équations (3) et la relation

$$(YE'_{n-1}) \equiv \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \cdots + \eta_{n+1} y_{n+1} = 0,$$

nous éliminons les variables y_1, $y_2 \ldots y_{n+1}$, nous obtiendrons de nouveau l'équation (5).

Nous pouvons en déduire, de la même façon que précédemment, les conséquences suivantes : aux points X d'un espace E_{n-1} situé dans E_n il correspond les espaces à $n-1$ dimensions de E'_n qui passent par le point Y de E'_n dont l'espace E_{n-1} est le correspondant, et vice versa.

Nous dirons qu'à un espace E_{n-1} de E'_n il correspond un point Y de E'_n, et qu'à un espace E'_{n-1} de E'_n il correspond un point X de E_n.

Il est visible que la forme F a pour coefficients les mineurs du discriminant

$$\Delta \equiv (a\,b\,c \ldots n)\,(a'\,b'\,c' \ldots n')$$

de la forme f : la forme F est donc la forme *conjointe* de f.

Soit ∇ le discriminant de F; on a

$$\nabla = \Delta^{n-1};$$

Digitized by Google

par conséquent, si (f) est la forme conjointe de F, nous aurons

$$(f) = (A.B...N.x)(A'B'..N'.y) = \Delta^{n-1} \times f;$$

puisque les coefficients α_{ik} de (f) sont les mineurs du discriminant ∇, on a

$$\alpha_{ik} = a_{ik} \Delta^{n-1}.$$

Nous pouvons donc considérer les deux formes f *et* F *comme définissant la même corrélation :* la première, égalée à zéro, représente la relation qui existe entre les points d'un espace et les espaces E_{n-1} de l'autre; la seconde représente la relation qui existe entre les espaces E_{n-1} d'un espace et les points de l'autre.

3. A k points de l'espace E_n, formant un espace à $k-1$ dimensions, E_{k-1}, il correspond dans E'_n k espaces E'_{n-1} dont l'intersection est un espace à $n-k$ dimensions, E'_{n-k}. Évidemment, à tout point de E_{k-1} il correspond un espace E'_{n-1} passant par E'_{n-k}; à tout espace E_{n-1} passant par E_{k-1} il correspond un point de E'_{n-k}; à tout point de E'_{n-k} il correspond un espace E'_{n-1} passant par E_{k-1}; à tout espace E'_{n-1} passant par E_{n-k} il correspond un point de E_{k-1} : en définitive, à tout espace à h dimensions, situé dans E_{k-1} ou passant par E_{k-1}, il correspond un espace à $n-h-1$ dimensions, passant par E'_{n-k} ou situé dans E'_{n-k}.

Plus généralement, à un espace algébrique d'ordre m et de classe p à un nombre quelconque φ de dimensions, situé dans E_n, il correspond dans E'_n un espace algébrique à $n-\varphi-1$ dimensions, de classe m et d'ordre p; de plus, les singularités de ces espaces se trouvent, pour ainsi dire, transformées dualistiquement. Par exemple, si nous considérons une homographie bilinéaire entre deux plans E_2 et E'_2, si le point X de E_2 décrit une courbe du troisième ordre, possédant un point double, les droites correspondantes de E'_2 décriront une courbe de la troisième classe, possédant une tangente double.

4. Jusqu'à présent nous avons supposé que le discriminant Δ de la forme f est différent de zéro : examinons maintenant le cas où il est nul.

Digitized by Google

S'il en est ainsi, les deux systèmes d'équations symboliques,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} a_x a'_1 = 0 \\ a_x a'_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_x a'_{n+1} = 0 \end{array}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 a'_y = 0 \\ a_2 a'_y = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n+1} a'_y = 0 \end{array}\right.$$

sont également compatibles : il existe donc dans l'espace E_n un point A et dans l'espace E'_n un point B, dont les coordonnées satisfont respectivement à ces équations. Ces points A et B jouissent de la propriété que leurs espaces correspondants sont tout à fait indéterminés.

Les coordonnées du point A satisfont visiblement aux relations

$$(x_i) = \rho A_{ji},$$

i variant de 1 à $n+1$, j pouvant prendre indifféremment une des valeurs comprises entre 1 et $n+1$, A_{ji} étant le mineur (ij) de Δ et ρ un facteur de proportion.

Le point B, de son côté, aura pour coordonnées

$$(y_i) = \rho' A_{ij},$$

i variant de 1 à $n+1$ et j pouvant prendre une des valeurs comprises entre 1 et $n+1$.

A un point quelconque X de E_n il correspond toujours un espace à $n-1$ dimensions de E'_n, déterminé par les équations (2); mais en multipliant ces équations (2) respectivement par $(y_1)\ (y_2)\ \ldots\ (y_{n+1})$, on obtient

$$\rho\left[y_1(y_1) + y_2(y_2) + \cdots + y_{n+1}(y_{n+1})\right] = a_x a'_{(y)} = \sum_1^{n+1} a_k x_k a'_{(y)} = 0.$$

Digitized by Google

L'espace E'_{n-1} correspondant au point X est donc bien déterminé; de plus, il passe par le point B : on verrait de la même façon qu'à un point quelconque Y de E'_n il correspond un espace E_{n-1} de E_n, passant par A.

A un espace plan quelconque E_{n-1} de E_n il correspond, dans le cas général, un point dont les coordonnées, y_i, s'obtiennent en résolvant les équations (3); dans le cas de $\Delta = 0$, il existe une même relation entre les coefficients des inconnues, et les facteurs de ces relations sont précisément les coordonnées (x_i) du point A; pour que le système (3) soit possible, il faut donc que l'on ait la relation

$$\rho\left(\xi_1(x_1) + \xi_2(x_2) + \cdots + \xi_{n+1}(x_{n+1})\right) = \rho\left(\xi(x)\right) = 0.$$

Cette relation se partage en

$$\rho = 0, \quad \text{ou} \quad \left(\xi(x)\right) = 0.$$

Si l'espace E_{n-1} ne passe pas par A, on doit avoir $\rho = 0$; alors le point correspondant de E'_n satisfait par ses coordonnées aux équations (7); ce point coïncide donc avec le point B.

Si l'espace E_{n-1} passe par A, on a $[\xi(x)] = 0$; donc $\rho \gtrless 0$ et les $(n+1)$ équations (3) se réduisent à n d'entre elles, et les points Y, qui y satisfont, forment un système simplement indéterminé.

Nous en déduisons qu'à tout espace E_{n-1} de E_n, passant par le point A, il correspond les points d'une droite : cette droite passe par le point B; en effet, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_{n+1}$, l'équation $[\xi(x)] = 0$ sera vérifiée, identiquement, en attribuant aux paramètres $y_1\ y_2 \ldots y_{n+1}$ les valeurs des coordonnées de B.

Pour ce qui concerne l'espace E'_n, on démontrerait de la même façon qu'à un espace quelconque à $n-1$ dimensions il correspond le point A; si cet espace passe par le point B, il lui correspond une infinité de points situés sur une droite passant par le point A.

Puisque $\Delta = 0$, nous en déduisons que $\nabla = 0$.

Comme conséquences analytiques de ce qui précède, il suit que si l'on désigne par

$$A_x^{(1)}, \quad A_x^{(2)} \ldots A_x^{(n)}$$

Digitized by Google

n formes linéaires, la forme f pourra s'écrire

$$f = A_x^{(1)} y_1 + A_x^{(2)} y_2 + \cdots + A_x^{(n)} y_n + (\lambda_1 A_x^{(1)} + \lambda_2 A_x^{(2)} + \cdots + \lambda_n A_x^{(n)}) y_{n+1},$$

et la forme adjointe

$$F = (A_{i1}\xi_1 + A_{i2}\xi_2 + \cdots + A_{in+1}\xi_{n+1})(A_{1j}y_1 + A_{2j}y_2 + \cdots + A_{n+1,j}y_{n+1}),$$

les A_{ik} et A_{jk} étant les mineurs de Δ, i et j pouvant prendre indifféremment des valeurs comprises entre 1 et $n+1$.

5. Supposons, en général, que le discriminant Δ de la forme f, ainsi que ses mineurs d'ordres n, $n-1$, ... $n-k+2$, soient nuls simultanément. Dans ce cas, les deux systèmes d'équations (6) et (7) forment deux systèmes k fois indéterminés; cela revient à dire que ces deux systèmes se réduisent à deux systèmes de $n-k+1$ équations; ces équations représentent donc, dans l'espace E_n et dans l'espace E'_n, deux espaces à $k-1$ dimensions, A_{k-1} et B_{k-1}. Nous appellerons ces espaces, *espaces singuliers* de la correspondance.

A un point quelconque X de E_n il correspond l'espace à $n-1$ dimensions E'_{n-1} de E'_n qui est parfaitement déterminé par les équations (2).

Si (y_i), $(i = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots n+1)$, sont les coordonnées d'un point quelconque de B_{k-1}, nous en déduisons, en multipliant les équations (2) respectivement par (y_1), (y_2), ... (y_{n+1}), et faisant la somme

$$\rho \sum_1^{n+1} y_i (y_i) = \sum_1^{n+1} a_x b_i (y_i) = \sum_1^{n+1} a_i x_i b_{(y)} = 0.$$

Donc on a

$$\rho = 0, \quad \text{ou} \quad \sum_1^{n+1} y_i (y_i) = 0.$$

On ne peut avoir $\rho = 0$ que dans le cas de $a_x b_i = 0$ $(i = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots n+1)$; alors l'espace E'_{n-1} est complètement indéterminé. Nous en déduisons les conséquences suivantes :

A un point X quelconque de E_n il correspond un espace à $n-1$ dimen-

Digitized by Google

sions passant par B_{k-1}; à un point X, situé sur A_{k-1}, il correspond un espace à $n-1$ dimensions complètement indéterminé.

De même à un point Y quelconque de E'_n il correspond un espace à $n-1$ dimensions, passant par A_{k-1}; à un point Y, situé sur B_{k-1}, il correspond un espace à $n-1$ dimensions, complètement indéterminé.

A un espace E_{n-1} de E_n il correspond un point Y de E'_n, dont les coordonnées satisfont aux équations (3) : or, le déterminant Δ étant nul ainsi que tous ses mineurs d'ordres $n+1$, n, $n-1$, ... $n-k+2$, il existe entre les coefficients du second nombre des équations (3) $k(n+1)$ relations linéaires.

Si nous considérons l'espace singulier A_{k-1} de E_n comme étant la jonction de k de ses points, $X^{(1)}\ X^{(2)}\ \dots\ X^{k)}$ les coordonnées du point $X^{(i)}$ ayant pour valeurs $X_p^{(i)}$, $(p = 1.2.3 \dots n+1)$, ces $k(n+1)$ relations linéaires pourront s'écrire symboliquement :

$$\begin{aligned}
&a_{x(1)}a'_1 = 0, \quad a_{x(1)}a'_2 = 0 \quad \dots \quad a_{x(1)}a'_{n+1} = 0,\\
&a_{x(2)}a'_1 = 0, \quad a_{x(2)}a'_2 = 0 \quad \dots \quad a_{x(2)}a'_{n+1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{x(k)}a'_1 = 0, \quad a_{x(k)}a'_2 = 0 \quad \dots \quad a_{x(k)}a'_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que les équations (2) ne seront résolubles par rapport aux y_i que dans le cas où l'on aurait les relations

$$\begin{aligned}
&\rho(E_{n-1}X^{(1)}) \equiv \rho(\xi_1 X_1^{(1)} + \xi_2 X_2^{(1)} + \dots + \xi_{n+1} X_{n+1}^{(1)}) = 0,\\
&\rho(E_{n-1}X^{(2)}) \equiv \rho(\xi_1 X_1^{(2)} + \xi_2 X_2^{(2)} + \dots + \xi_{n+1} X_{n+1}^{(2)}) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\rho(E_{n-1}X^{(k)}) \equiv \rho(\xi_1 X_1^{(k)} + \xi_2 X_2^{(k)} + \dots + \xi_{n+1} X_{n+1}^{(k)}) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui nécessite soit la condition $\rho = 0$, soit les conditions symboliques

$$(E_{n-1}X^{(1)}) = 0, \quad (E_{n-1}X^{(2)}) = 0, \dots (E_{n-1}X^{(k)}) = 0,$$

Digitized by Google

ou k conditions symboliques analogues à

$$(E_{n-1}.\lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \cdots + \lambda_k X^{k}) = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ étant des constantes.

Dans le premier cas, les coordonnées y_i du point Y correspondant à E_{n-1}, s'expriment en fonction de k d'entre elles, à l'aide des équations

$$y_i = \sum_{j=n-k}^{j=n+1} y_j c_{ij}, \quad (i = 1.2 \ldots n-k+1),$$

(les quantités c_{ij} étant des déterminants formés à l'aide du déterminant multiple obtenu en prenant les $n-k+1$ premières rangées du discriminant Δ); le point Y est donc situé dans un système linéaire $k-1$ fois indéterminé, c'est-à-dire sur un espace à $k-1$ dimensions qui est précisément l'espace singulier B_{k-1}.

Dans le second cas, les coordonnées y_i du point Y s'expriment en fonction de k d'entre elles par des relations de la forme

$$y_i = A_i + \sum_{j=n-k}^{n+1} y_j c_{ij}, \quad (i = 1.2\ 3 \ldots n-k+1),$$

les A_i étant des constantes et les c_{ij} ayant la même signification que plus haut. Le point Y est donc situé dans un système linéaire k fois indéterminé, formant un espace à k dimensions : cet espace passera nécessairement par l'espace singulier B_{k-1}, puisque les valeurs des variables y_i qui satisfont aux équations (7), laissent indéterminé le système des équations (3).

Si nous remarquons qu'un espace quelconque E_{n-1} de E_n ne peut rencontrer l'espace singulier A_{k-1} qu'en un espace à $k-2$ dimensions, c'est-à-dire au plus en $k-1$ points distincts, nous en déduisons : 1° qu'à un espace à $n-1$ dimensions quelconque de E_n, il correspond un point indéterminé situé dans l'espace singulier de E_n'; 2° qu'à un espace à $n-1$ dimensions de E_n, passant par l'espace singulier A_{k-1}, il correspond tous les points

Digitized by Google

d'un espace à k dimensions, passant par B_{k-1}, espace singulier de E'_n. La même chose aurait lieu pour l'espace E'_n. En résumé donc :

A un point X *de* E_n *il correspond un espace à* $n-1$ *dimensions de* E'_n, *passant par l'espace singulier* B_{k-1} *de* E'_n.

A un point Y *de* E'_n *il correspond un espace à* $n-1$ *dimensions de* E_n, *passant par l'espace singulier* A_{k-1} *de* E_n.

A un point X *de* E_n, *situé sur* A_{k-1}, *il correspond un espace à* $n-1$ *dimensions, indéterminé dans* E'_n.

A un point Y *de* E'_n, *situé sur* B_{k-1}, *il correspond un espace à* $n-1$ *dimensions, indéterminé dans* E_n.

A un espace à $n-1$ *dimensions,* E_{n-1}, *quelconque de* E_n, *il correspond les points de* E'_n *situés sur* B_{k-1}.

A un espace de $n-1$ *dimensions, quelconque de* E'_n, *il correspond les points de* E_n *situés sur* A_{k-1}.

A un espace à $n-1$ *dimensions de* E_n, *passant par* A_{k-1}, *il correspond les points d'un espace à* k *dimensions de* E'_n *passant par* B_{k-1}.

A un espace à $n-1$ *dimensions de* E'_n, *passant par* B_{k-1}, *il correspond les points d'un espace à* k *dimensions de* E_n *passant par* A_{k-1}.

A un espace à p *dimensions de* E_n, *passant par* A_{k-1}, *il correspond les points d'un espace à* $n+k-p-1$ *dimensions, passant par* B_{k-1}.

A un espace à p *dimensions de* E'_n, *passant par* B_{k-1}, *il correspond les points d'un espace à* $n+k-p-1$ *dimensions passant par* B_{k-1}.

6. Considérons entre deux espaces E_n et E'_n une homographie k fois dégénérescente et soient, comme plus haut, A_{k-1} et B_{k-1} les espaces singuliers de E_n et de E'_n.

Choisissons dans E_n et dans E'_n deux espaces à $n-k$ dimensions E_{n-k} et E'_{n-k} ne rencontrant pas A_{k-1} et B_{k-1}.

Tout espace à $n-1$ dimensions, E_{n-1} de E_n, passant par A_{k-1}, rencontre E_{n-k} en un espace à $n-k-1$ dimensions, E_{n-k-1}. L'espace à k dimensions E'_k de E'_n, correspondant de E_{n-1} dans l'homographie dégénérescente, rencontre, d'autre part, l'espace E'_{n-k} en un point Y' : ce point correspond

Digitized by Google

à E_{n-k-1} en ce sens que E_{n-k-1} étant donné, on peut déterminer sans ambiguïté Y′, et vice versâ.

Réciproquement, étant donné un point X′ de E_{n-k}, il lui correspond un un espace à $n - k - 1$ dimensions de E'_{n-k}, et vice versâ.

Tout espace à p dimensions, E_p, passant par A_{k-1}, coupe E_{n-k} en un espace à $p - k$ dimensions, E_{p-k} : à E_p il correspond dans l'homographie dégénérescente un espace à $n + k - p - 1$ dimensions, qui coupe E'_{n-k} en un espace à $n - p - 1$ dimensions qui correspond à E_{p-k}, et réciproquement.

Nous pouvons, en conséquence, remarquer que l'homographie dégénérescente entre les espaces E_n et E'_n établit entre deux espaces quelconques à $n - k$ dimensions, situés dans E_n et E'_n, une relation homographique non dégénérescente. Nous pourrons, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Une homographie k *fois dégénérescente entre les éléments de deux espaces à* n *dimensions, se ramène à l'étude d'une homographie non dégénérescente entre deux espaces à* n — k *dimensions.*

Ou, en d'autres termes :

Une homographie k *fois dégénérescente entre les éléments de deux espaces à* n *dimensions est la projection, faite de deux espaces à* k — 1 *dimensions, d'une homographie générale entre les éléments de deux espaces à* n — k *dimensions.*

Comme conséquence, pour étudier les propriétés générales de l'homographie, il suffira d'étudier les propriétés de l'homographie non dégénérescente.

7. Au point de vue analytique, Δ et ses mineurs d'ordre supérieur à $n - k + 1$ étant nuls, il s'ensuit, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que les $n + 1$ formes linéaires

$$a_x a'_1 ; \quad a_x a'_2 ; \quad a_x a'_3 ; \quad \ldots \quad a_x a'_{n+1} ;$$

Digitized by Google

se réduisent à $n - k + 1$ d'entre elles, par exemple à

$$A_x^{(1)} \equiv a_x a_1' \qquad A_x^{(2)} \equiv a_x a_2' \quad \dots \quad A_x^{(n-k+1)} \equiv a_{n-k+1}' a_x .$$

Les formes linéaires restantes s'expriment au moyen des formes indépendantes par des formules analogues à

$$a_x a_{n-k+i}' \equiv A_x^{(n-k+i)} = \lambda_1^{(i-1)} A_x^{(1)} + \lambda_2^{(i-1)} A_x^{(2)} + \dots + \lambda_{n-k+1}^{(i-1)} A_x^{(n-k+1)} . (i = 2.3 \dots k+1).$$

D'après cela, l'équation d'homographie $f = 0$ pourra s'écrire

$$\begin{aligned} f &= A_x^{(1)} y_1 + A_x^{(2)} y_2 + \dots + A_x^{(n-k+1)} y_{n-k+1} + \dots + A_x^{(n+1)} y_{n+1} \\ &\equiv A_x^{(1)} y_1 + A_x^{(2)} y_2 + \dots + A_x^{(n-k+1)} y_{n-k+1} \\ &+ (\lambda_1^{(1)} A_x^{(1)} + \lambda_2^{(1)} A_x^{(2)} + \dots + \lambda_{n-k+1}^{(1)} A_x^{(n-k+1)}) y_{n-k+2} + \dots \\ &+ (\lambda_1^{(k)} A_x^{(1)} + \lambda_2^{(k)} A_x^{(2)} + \dots + \lambda_{n-k+1}^{(k)} A_x^{(n-k+1)}) y_{n+1} \\ &= A_x^{(1)} (y_1 + \lambda_1^{(1)} y_{n-k+2} + \lambda_1^{(2)} y_{n-k+3} + \dots + \lambda_1^{(k)} y_{n+1}) \\ &+ A_x^{(2)} (y_2 + \lambda_2^{(1)} y_{n-k+2} + \lambda_2^{(2)} y_{n-k+3} + \dots + \lambda_2^{(k)} y_{n+1}) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ A_x^{(n-k+1)} (y_{n-k+1} + \lambda_{n-k+1}^{(1)} y_{n-k+2} + \lambda_{n-k+1}^{(2)} y_{n-k+3} + \dots + \lambda_{n-k+1}^{(k)} y_{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en faisant les conventions nécessaires,

$$f = \sum_1^{n-k+1} A_x^{(i)} B_y^{(i)} = 0.$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

L'équation d'une homographie dégénérescente d'espèce k *entre deux espaces à* n *dimensions, se réduit à une somme de* n — k + 1 *produits de deux facteurs linéaires.*

Un des groupes de facteurs linéaires représente l'élément singulier A_{k-1} de l'espace E_n; de plus, les paramètres λ représentent les coordonnées nécessaires et suffisantes pour déterminer l'espace singulier B_{k-1} de E_n'.

Digitized by Google

En faisant une transformation convenable des systèmes coordonnés des deux espaces, et en remarquant que ces systèmes sont indépendants entre eux, nous pourrons encore mettre l'équation d'une homographie dégénérescente d'espèce k sous la forme

$$\sum_{i}^{n-k+1} a_i x_i y_i = 0;$$

il suffit pour cela de prendre deux nouveaux polyèdres de référence tels que k de leurs sommets se trouvent respectivement sur A_{k-1} et sur B_{k-1}.

8. Soit

$$f = 0$$

l'équation d'une homographie non dégénérescente entre les éléments de deux espaces à n dimensions. Effectuons sur les deux systèmes de variables x et y deux substitutions linéaires de module non évanouissant : il est clair que les nouvelles variables jouiront, l'une par rapport à l'autre, des mêmes propriétés et que l'on pourra passer du système primitif au nouveau, et réciproquement, par une suite de sections et projections opérées séparément ou simultanément. D'autre part, deux substitutions linéaires effectuées sur les variables x et y peuvent toujours être considérées comme changeant les systèmes de référence des deux espaces E_n et E'_n. Par suite, si nous prenons dans le premier espace $n+1$ points quelconques comme les sommets du polyèdre de référence de cet espace, et si nous prenons les $n+1$ espaces à $n-1$ dimensions correspondants dans le second espace, comme les faces du polyèdre de référence de ce second espace, il est clair que la forme d'homographie pourra s'écrire

$$f = \sum_{i}^{n+1} a_i x_i y_i = 0.$$

Nous pouvons toujours faire un tel choix de points et de faces des systèmes de référence, puisque la seule condition à laquelle ils soient astreints est que $n+1$ sommets ne soient pas situés dans un même espace

Digitized by Google

à $n - 1$ dimensions, ou, ce qui revient au même, que $n + 1$ faces à $n - 1$ dimensions ne passent pas par un même point.

La forme conjointe de f pourra, d'autre part, s'écrire

$$F = \sum_{1}^{n+1} \frac{\xi_i \eta_i}{a_i} = 0.$$

9. Nous allons démontrer qu'une homographie entre deux espaces à $n - 1$ dimensions est déterminée par $n + 2$ couples d'éléments correspondants (points et espaces à $n - 1$ dimensions).

Pour cela, nous rappellerons d'abord qu'une homographie entre des couples d'éléments de première espèce (c'est-à-dire des éléments dont chacun est déterminé par un seul paramètre) est complètement déterminée par trois couples d'éléments correspondants.

Soient donnés dans le premier espace E_n, $n + 2$ points,

$$A_1, A_2, \dots A_{n+1}, A_{n+2},$$

et dans le second espace E'_n, $n + 2$ espaces à $n - 1$ dimensions,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2},$$

qui doivent être respectivement les espaces correspondants des points donnés de l'espace E_n.

Il s'agit, connaissant un point A de E_n, de déterminer l'espace correspondant α de E'_n.

Soit d la droite qui unit les points A_1 et A_2, et δ l'espace à $n - 2$ dimensions, intersection de α_1 et α_2.

L'espace à $n - 1$ dimensions qui unit les points $A_3, A_4, \dots A_{n+1}, A_{n+2}$, coupe d en un point D : soit Δ l'espace à $n - 1$ dimensions déterminé par l'espace δ et par le point d'intersection des espaces $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$.

Les trois points A_1, A_2, D de la droite d, et les trois espaces $\alpha_1, \alpha_2, \Delta$ du faisceau dont l'axe est l'espace δ, déterminent entre les points de d et les espaces de δ une homographie de première espèce que nous pouvons construire par les procédés connus.

Digitized by Google

D'un autre côté, les n points $A_3, A_4, \ldots A_{n+1}, A_{n+2}$, joints de toutes les manières possibles $n-1$ à $n-1$, forment n espaces à $n-2$ dimensions, $E^{(i)}_{n-2}\,(i = 1.2.3\ldots n)$; et les n espaces $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{n+2}$, pris $n-1$ à $n-1$, se coupent en n droites, $E^{(i)}_1\,(i = 1.2.3\ldots n)$.

L'espace à $n-1$ dimensions, qui joint le point A à l'un quelconque des espaces $E^{(i)}_{n-2}$, coupe la droite d au point X_i; déterminons l'espace correspondant du faisceau δ; il coupe la droite $E^{(i)}_1$ au point Y_i.

L'espace à $n-1$ dimensions qui unit les n points Y_i, sera l'espace correspondant du point A dans l'homographie caractérisée par les éléments que nous nous sommes donnés.

Si l'on voulait obtenir l'espace correspondant d'un espace à φ dimensions de E, il suffirait de considérer cet espace comme étant la jonction de $\varphi+1$ de ses points; l'espace correspondant serait alors l'intersection des $\varphi+1$ espaces à $n-1$ dimensions correspondant à ces $\varphi+1$ points.

D'un autre côté, si l'homographie était caractérisée par k points et $n-k+2$ espaces à $n-1$ dimensions de E_n et par les k espaces à $n-1$ dimensions et les $n-k+2$ points correspondants de E'_n, il serait bien facile de ramener ce cas au précédent; nous ne pensons pas devoir insister sur ce point.

En résumé, nous voyons que *les constructions à effectuer pour construire les éléments correspondants de deux espaces linéaires homographiques reviennent à construire les couples de l'homographie unicursale.*

10. Supposons actuellement que les deux espaces E_n et E'_n coïncident et que les divers éléments, considérés comme appartenant à l'une ou l'autre figure, soient rapportés à un même système de référence.

Il peut, dans ce cas, arriver qu'à un point considéré comme appartenant à la première ou à la seconde figure, il corresponde un espace à $n-1$ dimensions de la seconde ou de la première figure passant par ce point, ou qu'à un espace à $n-1$ dimensions de la première ou de la seconde figure, il corresponde un point de la seconde ou de la première figure situé dans cet espace.

Il est visible que les points qui jouissent de cette propriété sont situés

Digitized by Google

sur l'espace à $n-1$ dimensions et du second ordre, représenté par l'équation

$$S \equiv a_x a'_x = 0$$

et que les espaces à $n-1$ dimensions enveloppent l'espace à $n-1$ dimensions de la seconde classe :

$$\sum = A_\xi A'_\xi = 0 ;$$

les A sont dans cette équation les mineurs du discriminant de la forme d'homographie, ainsi que précédemment.

11. En général, à un point quelconque X des deux espaces superposés, il correspond deux espaces à $n-1$ dimensions, E'_{n-1} et E_{n-1}, selon que le point X est considéré comme appartenant à la première ou à la seconde figure.

Ces espaces E'_{n-1} et E_{n-1} coïncideront dans le cas où les coordonnées du point X satisferont aux conditions

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{a_x a'_1}{a_1 a'_x} = \frac{a_x a'_2}{a_2 a'_x} = \ldots = \frac{a_x a'_{n+1}}{a_{n+1} a'_x} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Nous appelons $-\frac{\alpha}{\beta}$ le rapport constant $\frac{a_x a'_i}{a_i a'_x}$ $(i = 1 . 2 . 3 \ldots n+1)$.

Si entre les $n+1$ équations (8) nous éliminons les $n+1$ variables homogènes $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, nous obtenons l'équation effective :

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{11} & \alpha a_{12} + \beta a_{21} & \ldots & \alpha a_{1i} + \beta a_{i1} & \ldots & \alpha a_{1n+1} + \beta a_{n+1.1} \\ \alpha a_{21} + \beta a_{12} & \alpha a_{22} + \beta a_{22} & \ldots & \alpha a_{2i} + \beta a_{i2} & \ldots & \alpha a_{2n+1} + \beta a_{n+1.2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{i1} + \beta a_{1i} & \alpha a_{i2} + \beta a_{2i} & \ldots & \alpha a_{ii} + \beta a_{ii} & \ldots & \alpha a_{in+1} + \beta a_{n+1.i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{n+1.1} + \beta a_{1n+1} & \alpha a_{n+1.2} + \beta a_{2n+1} & \ldots & \alpha a_{n+1.i} + \beta a_{in+1} & \ldots & \alpha a_{n+1n+1} + \beta a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une somme de produits de déterminants symboliques

$$(9)\quad 0 = \sum C_{n+1,i}\, p^i q^i (\alpha^{n+1-2i} + \beta^{n+1-2i})(a_1 a_2 \dots a_{n+1-i} a'_{n+2-i} \dots a'_{n+1})(a'_1 a'_2 \dots a'_{n+1-i} a_{n+2-i} \dots a_{n+1})$$

Quand le nombre n est pair, i varie de 1 à $\frac{n}{2}$; quand le nombre n est impair, i varie de 1 à $\frac{n+1}{2}$.

Quand n est impair, l'équation (9) est réciproque; elle peut, comme on le sait, se réduire au degré $\frac{n+1}{2}$; quand n est pair, l'équation (9) se partage en l'équation

$$\alpha + \beta = 0,$$

et en une équation réciproque d'ordre n, dont la réduite est d'ordre $\frac{n}{2}$.

Nous arrivons, en conséquence, au théorème suivant :

Il existe dans une homographie, entre les éléments de deux espaces à n *dimensions superposés,* n + 1 *points qui jouissent de la propriété que leurs espaces correspondants coïncident.*

Nous dirons que ces éléments sont les éléments *polaires* ou *pôles* de l'homographie (*), et que le polyèdre qui les unit est le polyèdre *polaire.*

On peut encore démontrer aisément le théorème suivant :

Quand un point est situé dans un de ses espaces correspondants, il est situé également dans l'autre ; en général, *si un élément quelconque est situé ou passe par l'un de ses espaces correspondants, il est situé ou passe également par l'autre.*

De la même façon, la condition pour que les deux points correspondants à un même espace à $n - 1$ dimensions coïncident, est que les paramètres de cet espace satisfassent aux conditions

$$(10)\quad \dots\dots\quad \frac{A_\xi A'_1}{A_1 A'_\xi} = \frac{A A'_2}{A_2 A'_\xi} = \dots = \frac{A_\xi A'_{n+1}}{A_{n+1} A'_\xi} = -\frac{\partial b}{\partial b}.$$

(*) Voir, à ce sujet, les mémoires de M. Battaglini : *Sur la forme ternaire bilinéaire* et *Sur la forme quaternaire bilinéaire* (Atti delle R. Academia dei Lincei, 1880-1886).

Digitized by Google

En éliminant entre ces équations (10) les paramètres ξ_i, nous obtiendrons une équation d'ordre $n+1$ en $\frac{\xi_1}{\xi_2}$. Cette équation, de même que plus haut, se réduira à une équation d'ordre $\frac{n+1}{2}$ ou d'ordre $\frac{n}{2}$, selon que le nombre n est impair ou pair.

Il existe donc dans une homographie, entre les éléments de deux espaces à n dimensions superposés, $n+1$ espaces à $n-1$ dimensions qui jouissent de la propriété que leurs points correspondants coïncident.

Ces espaces sont les *faces polaires* de l'homographie.

Il est évident, d'après la nature même de la correspondance que nous considérons, que le polyèdre qui a pour faces les faces polaires, coïncide avec le polyèdre qui a pour sommets les pôles de l'homographie.

Il est donc nécessaire de rechercher la distribution des éléments polaires correspondants sur le polyèdre polaire.

12. Reprenons les équations (8) et appelons $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}$ les coordonnées d'un point qui y satisfait; on aura

$$\frac{a_x a'_1}{a_1 a'_x} = \frac{a_x a'_2}{a_2 a'_x} = \cdots = \frac{a_x a'_{n+1}}{a_{n+1} a'_x} = \frac{a_x a'_x}{a_x a'_x}.$$

Si le point ne se trouve pas sur l'espace à $n-1$ dimensions du second ordre

$$S = 0,$$

on aura

$$a_x a'_x \gtrless 0;$$

par conséquent, les coordonnées du point seront déterminées par les $n+1$ équations linéaires

$$a_x a'_i - a_i a'_x = 0, \qquad (i = 1.2.3 \ldots n+1)$$

ou bien, en développant :

$$x_1 (a_{11} - a_{1i}) + x_2 (a_{i2} - a_{2i}) + \cdots + x_i (a_{ii} - a_{ii}) + \cdots + x_{n+1} (a_{in+1} - a_{n+1i}) = 0.$$

Digitized by Google

Pour que ces $n+1$ équations soient compatibles, il faut que leur déterminant soit nul; il faut donc que l'on ait :

$$(11)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} & \dots & a_{1n+1}-a_{n+11} \\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32} & \dots & a_{2n+1}-a_{n+12} \\ a_{31}-a_{13} & a_{23}-a_{32} & 0 & \dots & a_{3n+1}-a_{n+13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+11}-a_{1n+1} & a_{n+12}-a_{2n+1} & a_{n+13}-a_{3n+1} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or ce déterminant, qui est symétrique gauche, ne peut être nul que si n est pair. Dans le cas de n pair, n pôles de l'homographie se trouvent donc sur l'espace $S = 0$, tandis que le $n+1^{\text{ième}}$ se trouve en dehors : c'est le pôle qui répond à la racine $\alpha + \beta = 0$ ou $-\frac{\alpha}{\beta} = 1$. Si n est impair, les $n+1$ pôles se trouvent sur la surface $S = 0$, puisque l'équation (11) ne peut être vérifiée.

On obtiendrait des résultats analogues relativement aux espaces polaires et à l'espace de la seconde classe $\Sigma = 0$.

En nous rappelant le rôle des espaces $S = 0$ et $\Sigma = 0$, par rapport aux éléments de l'homographie, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

1° *Les sommets du polyèdre polaire d'une homographie entre deux espaces superposés à un nombre impair de dimensions, jouissent de la propriété que leurs espaces correspondants passent par ces sommets; et réciproquement, les points correspondants aux faces sont situés dans ces faces;*

2° n *sommets du polyèdre polaire d'une homographie entre deux espaces superposés à un nombre pair* n *de dimensions, passent par les faces correspondantes et les points correspondants à* n *faces sont situés dans ces faces; le dernier sommet et la dernière face correspondante sont opposés.*

13. Recherchons l'équation d'une homographie bilinéaire en prenant pour polyèdre de référence le polyèdre polaire.

Digitized by Google

Soient $A_1, A_2, \dots A_{n+1}$ les sommets et

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_{n+1}$$

les faces opposées à ces sommets du polyèdre polaire.

Nous distinguerons, d'après ce que nous avons vu plus haut, deux cas, selon que n est un nombre impair ou pair.

1° n est un nombre impair, donc $n + 1 = 2m$.

Soient

$$k_1, \quad \frac{1}{k_1}, \quad k_2, \quad \frac{1}{k_2} \dots k_m, \quad \frac{1}{k_m}$$

les $2m$ racines de l'équation réciproque (9), et

$$K_1, \quad \frac{1}{K_1}, \quad K_2, \quad \frac{1}{K_2} \dots K_m, \quad \frac{1}{K_m}$$

les racines de l'équation réciproque dérivant des équations (10).

Nous pouvons supposer que dans l'homographie considérée au sommet A_{2i}, il correspond deux espaces à $n - 1$ dimensions coïncidant avec la face α_{2i-1} et qu'au sommet A_{2i-1}, il correspond deux espaces à $n - 1$ dimensions coïncidant avec la face α_{2i}.

Une telle supposition est toujours permise, puisque le sommet A_{2i} se trouve dans la face α_{2i-1} et que le sommet A_{2i-1} se trouve dans la face α_{2i}.

Les coordonnées du point A_{2i} sont

$$x_1^{(2i)} = 0, \quad x_2^{(2i)} = 0, \quad \dots \quad x_{2i-1}^{(2i)} = 0, \quad x_{2i}^{(2i)} \gtrless 0, \quad x_{2i+1}^{(2i)} = 0, \quad \dots \quad x_{2m}^{(2i)} = 0,$$

si le point est considéré comme un point X, ou bien

$$y_1^{(2i)} = 0, \quad y_2^{(2i)} = 0, \quad \dots \quad y_{2i-1}^{(2i)} = 0, \quad y_{2i}^{(2i)} \gtrless 0, \quad y_{2i+1}^{(2i)} = 0, \quad \dots \quad y_{2m}^{(2i)} = 0,$$

s'il est considéré comme étant un point Y.

L'espace correspondant α_{2i-1} aura pour coordonnées

$$y_1^{(2i-1)} = 0, \quad y_2^{(2i-1)} = 0, \quad \dots \quad y_{2i-2}^{(2i-1)} = 0, \quad y_{2i-1}^{(2i-1)} \gtrless 0, \quad y_{2i}^{(2i-1)} = 0, \quad \dots \quad y_{2m}^{(2i-1)} = 0,$$

Digitized by Google

s'il est considéré comme un espace E'_{n-1}, ou bien

$$\xi_1^{(2i-1)}=0,\quad \xi_2^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad \xi_{2i-2}^{(2i-1)}=0,\quad \xi_{2i-1}^{(2i-1)}\gtrless 0,\quad \xi_{2i}^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad \xi_{2m}^{(2i-1)}=0,$$

s'il est considéré comme un espace E_{n-1}.

De même les coordonnées du sommet A_{2i-1} sont

$$x_1^{(2i-1)}=0,\quad x_2^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad x_{2i-2}^{(2i-1)}=0,\quad x_{2i-1}^{(2i-1)}\gtrless 0,\quad x_{2i}^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad x_{2m}^{(2i-1)}=0.$$

ou bien

$$y_1^{(2i-1)}=0,\quad y_2^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad y_{2i-2}^{(2i-1)}=0,\quad y_{2i-1}^{(2i-1)}\lessgtr 0,\quad y_{2i}^{(2i-1)}=0,\quad \ldots\quad y_{2m}^{(2i-1)}=0.$$

et la face correspondante α_{2i} aura pour coordonnées

$$\eta_1^{(2i)}=0,\quad \eta_2^{(2i)}=0,\quad \ldots\quad \eta_{2i-1}^{(2i)}=0,\quad \eta_{2i}^{(2i)}\gtrless 0,\quad \eta_{2i+1}^{(2i)}=0,\quad \ldots\quad \eta_{2m}^{(2i)}=0,$$

ou bien

$$\xi_1^{(2i)}=0,\quad \xi_2^{(2i)}=0,\quad \ldots\quad \xi_{2i-1}^{(2i)}=0,\quad \xi_{2i}^{(2i)}\gtrless 0,\quad \xi_{2i+1}^{(2i)}=0,\quad \ldots\quad \xi_{2m}^{(2i)}=0.$$

Nous pouvons encore supposer que pour les pôles A_{2i} et A_{2i-1} les valeurs de $\frac{\alpha}{\beta}$ racines de l'équation (9) soient réciproques, k_i et $\frac{1}{k_i}$, et que pour les faces correspondantes α_{2i-1} et α_{2i} les valeurs de $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ soient également réciproques $\frac{1}{K_i}$ et K_i; nous aurons par suite les conditions

$$\frac{x_{2i}^{(2i)}}{y_{2i}^{(2i)}}=k_i,\qquad \frac{x_{2i-1}^{(2i-1)}}{y_{2i-1}^{(2i-1)}}=\frac{1}{K_i};$$

$$\frac{\xi_{2i-1}^{(2i-1)}}{\eta_{2i-1}^{(2i-1)}}=K_i,\qquad \frac{\xi_{2i}^{(2i)}}{\eta_{2i}^{(2i)}}=\frac{1}{K_i}.$$

Si nous introduisons ces diverses conditions dans les deux systèmes d'équations (1) et (2), et en tenant compte du rôle du polyèdre que nous

Digitized by Google

prenons comme étant fondamental, nous obtenons les relations suivantes :

$$a_{1,2i}=0,\quad a_{2,2i}=0,\ \dots\quad a_{2i-1,2i}=0,\qquad \rho\,\xi^{(2i-1)}_{2i-1}=a_{2i-1,2i}\,x^{(2i)}_{2i},\quad a_{2i-1,2i}=0,\ \dots\quad a_{2m,2i}=0,$$

$$a_{2i,1}=0,\quad a_{2i,2}=0,\ \dots\quad a_{2i,2i-2}=0,\qquad \rho'\,\eta^{(2i-1)}_{2i-1}=a_{2i,2i-1}\,y^{(2i)}_{2i},\quad a_{2,2i-1}=0,\ \dots\quad a_{2i,2m}=0,$$

$$a_{1,2i-1}=0,\ a_{2,2i-1}=0,\ \dots\ a_{2i-1,2i-1}=0,\qquad \rho\,\xi^{(2i)}_{2i}=a_{2i,2i-1}\,x^{(2i-1)}_{2i-1},\ a_{2i,2i-1}=0,\ \dots\ a_{2m,2i-1}=0,$$

$$a_{2i-1,1}=0,\ a_{2i-1,2}=0,\ \dots\ a_{2i-1,2i-1}=0,\qquad \rho\,\eta^{(2i)}_{2i}=a_{2i,2i-1}\,y^{(2i-1)}_{2i-1},\ a_{2i,2i}=0,\ \dots\ a_{2i-1,2m}=0.$$

En particulier, nous tirons de ces équations qu'à une constante près on a la relation

$$\frac{1}{K_i}=\frac{a_{2i-1,2i}}{a_{2i,2i-1}}\cdot\frac{1}{k_i}.$$

Si nous faisons varier i de 1 à m, et si nous tenons compte des diverses conditions que nous obtenons de la sorte, nous voyons que l'équation d'homographie pourra s'écrire

$$f=\sum_1^m a_{2i,2i-1}\left(x_{2i}\,y_{2i-1}+\frac{K_i}{k_i}\,x_{2i-1}\,y_{2i}\right)=0,$$

équation de la forme

$$f=\sum_1^m (b_{2i}\,y_{2i}\,x_{2i}+b_{2i-1}\,y_{2i}\,x_{2i-1})=0.$$

La forme conjointe de f pourra dans ce cas s'écrire

$$F=\sum_1^m\left(\frac{\xi_{2i}\,\eta_{2i-1}}{b_{2i}}+\frac{\xi_{2i-1}\,\eta_{2i}}{b_{2i-1}}\right)=0.$$

Les surfaces $S=0$ et $\Sigma=0$ seront représentées par les équations

$$S=\sum_1^m (b_{2i}+b_{2i-1})\,x_{2i}\,x_{2i-1}=0,$$

et

$$\Sigma=\sum_1^m\left(\frac{1}{b_{2i}}+\frac{1}{b_{2i-1}}\right)\xi_{2i}\,\xi_{2i-1}=0.$$

Digitized by Google

Ces surfaces peuvent encore se représenter respectivement en coordonnées tangentielles et en coordonnées ponctuelles par

$$S = \sum_1^m \frac{1}{b_{2i} + b_{2i-1}} \xi_{2i}\, \xi_{2i-1} = 0,$$

et

$$\Sigma = \sum_1^m \frac{b_{2i}\, b_{2i-1}}{b_{2i} + b_{2i-1}} x_{2i} x_{2i-1} = 0.$$

Il est visible, d'après cela, que les deux surfaces $S = 0$, $\Sigma = 0$ ont en commun 2^m arêtes à $(m - 1)$ dimensions du polyèdre polaire.

En effet, les équations de ces surfaces sont vérifiées simultanément par les systèmes analogues aux suivants :

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \ \ldots\ x_{2i-1} = 0, \ \ldots\ x_{2m-1} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, par les systèmes analogues à

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_4 = 0, \ \ldots\ \xi_{2i+2} = 0, \ \ldots\ \xi_{2m} = 0.$$

On peut aisément s'assurer que ces systèmes sont en nombre 2^m.

2° n est un nombre pair, $n + 1 = 2m + 1$.

Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons faire les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent pour les $2m$ premiers sommets A_{2m} et A_{i-1}, $(i = 1 . 2 . 3 \ldots 2m)$ du polyèdre polaire, pris comme polyèdre de référence.

Le dernier sommet A_{2m+1}, qui a pour coordonnées

$$x_1^{(2m+1)} = 0, \quad x_2^{(2m+1)} = 0, \ \ldots\ x_{2m}^{(2m+1)} = 0, \quad x_{2m+1}^{(2m+1)} \gtrless 0$$

ou bien

$$y_1^{(2m+1)} = 0, \quad y_2^{(2m+1)} = 0, \ \ldots\ y_{2m}^{(2m+1)} = 0, \quad y_{2m+1}^{(2m+1)} \gtrless 0,$$

selon qu'on le considère comme point X ou comme point Y, a pour correspondante la face opposée α_{2m+1}, qui est représentée par les relations

$$\xi_1^{(2m+1)} = 0, \quad \xi_2^{(2m+1)} = 0, \ \ldots\ \xi_{2m}^{(2m+1)} = 0, \quad \xi_{2m+1}^{(2m+1)} \gtrless 0,$$

ou bien

$$\eta_1^{(2m+1)} = 0, \quad \eta_2^{(2m+1)} = 0, \ \ldots\ \eta_{2m}^{(2m+1)} = 0, \quad \eta_{2m+1}^{(2m+1)} \gtrless 0.$$

Digitized by Google

Ce sommet A_{2m+1} correspond à la racine de l'équation (9) donnée par la relation

$$\alpha + \beta = 0;$$

nous pouvons donc poser

$$\frac{x_{2m+1}^{(2m+1)}}{y_{2m+1}^{(2m+1)}} = \frac{\xi_{2m+1}^{(2m+1)}}{\eta_{2m+1}^{(2m+1)}} = -\frac{\alpha}{\beta} = +1.$$

Il s'ensuit que nous obtenons les égalités

$$a_{1.2m+1} = 0, \quad a_{2.2m+1} = 0, \quad \ldots \quad a_{2m2m+1} = 0, \quad a_{2m+1.2m+1}\, x_{2m+1}^{(2m+1)} = \rho\, \xi_{2m+1}^{(2m+1)},$$

$$a_{2m+1.1} = 0, \quad a_{2m+1.2} = 0, \quad \ldots \quad a_{2m+1.2m} = 0, \quad a_{2m+1.2m+1}\, y_{2m+1} = \rho\, \eta_{2m+1}^{2m+1}.$$

En tenant compte des diverses conditions du problème que nous traitons, et en faisant les conventions nécessaires, l'équation de l'homographie prendra la forme

$$f = \sum_1^m a_{2i2i-1} \left(x_{2i}\, y_{2i-1} + \frac{A_i \beta_i}{B_i \alpha_i}\, x_{2i-1}\, y_{2i} \right) + x_{2m+1}\, y_{2m+1} = 0,$$

ou bien

$$f = \sum_1^m (b_{2i}\, x_{2i}\, y_{2i-1} + b_{2i-1}\, x_{2i-1}\, y_{2i}) + b_{2m+1}\, x_{2m+1}\, y_{2m+1} = 0.$$

La forme adjointe F devient, d'autre part,

$$F = \sum_1^m \left(\frac{\xi_{2i}\, \eta_{2i-1}}{b_{2i}} + \frac{\xi_{2i-1}\, \eta_{2i}}{b_{2i-1}} \right) + \frac{\xi_{2m+1}\, \eta_{2m+1}}{b_{2m+1}} = 0.$$

Les surfaces $S = 0$ et $\Sigma = 0$ auront pour équations

$$S = \sum_1^m (b_{2i} + b_{2i-1})\, x_{2i}\, x_{2i-1} + b_{2m+1}\, x_{2m+1}^2 = 0,$$

$$\Sigma = \sum_1^m \left(\frac{1}{b_{2i}} + \frac{1}{b_{2i-1}} \right) \xi_{2i}\, \xi_{2i-1} + \frac{1}{b_{2m+1}}\, \xi_{2m+1}^2 = 0.$$

Digitized by Google

Les équations de ces surfaces peuvent encore s'écrire respectivement en coordonnées tangentielles et en coordonnées ponctuelles

$$S = \sum_1^m \frac{\xi_{2i}\,\xi_{2i-1}}{b_{2i} + b_{2i-1}} + \frac{\xi_{2m+1}^2}{4b_{2m+1}} = 0,$$

ou bien

$$\Sigma = \sum_1^m \frac{b_{2i}\,b_{2i-1}}{b_{2i} + b_{2i-1}}\, x_{2i}\, x_{2i-1} + \frac{b_{2m+1}}{4}\, x_{2m+1}^2 = 0.$$

Nous voyons par là que les deux espaces S et Σ sont coupés, par exemple, par l'espace à m dimensions E_m, dont les équations sont

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \ldots x_{2k+1} = 0, \ \ldots \ x_{2m-1} = 0,$$

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_4 = 0, \ldots \quad \xi_{2k} = 0, \ldots \quad \xi_{2m} = 0,$$

suivant un espace double à $m - 1$ dimensions E_{m-1}.

On peut trouver 2^m espaces semblables à E_m : tous les espaces E_{m-1} sont situés dans l'espace à $n - 1$ dimensions α_{2m+1}, représenté par

$$x_{2m+1} = 0,$$

ou bien par

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \ldots \xi_{2m} = 0.$$

Les 2^m espaces E_m passent par le sommet A_{2m+1}, représenté par

$$\xi_{2m+1} = 0,$$

ou bien par

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots \ x_{2m} = 0$$

14. Il peut arriver que les équations (9) et (11) soient indéterminées; dans ce cas, on a symboliquement les conditions

$$\frac{a_1}{a_1'} = \frac{a_2}{a_2'} = \ldots \frac{a_i}{a_i'} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}'},$$

on a donc, en expression effective,

$$a_{ik} = a_{ki},$$

i et k prenant toutes les valeurs comprises entre 1 et $n + 1$.

Digitized by Google

La forme f devient, d'autre part, symétrique et l'on a symboliquement

$$f = a_x a_y = 0.$$

Dans ce système, à tout point considéré comme point X ou comme point Y, il correspond un même espace à $n - 1$ dimensions. Nous pouvons, en conséquence, considérer la corrélation entre les deux espaces superposés comme formant un seul système, dans lequel à tout point il correspond un espace à $n - 1$ dimensions, et à tout espace à $n - 1$ dimensions un point.

Il est visible que, dans le cas qui nous occupe, les deux espaces $S = 0$ et $\Sigma = 0$ sont identiques.

Les coordonnées d'un espace plan à $n - 1$ dimensions étant liées aux coordonnées du point correspondant par les relations

$$\rho\, \xi_i = a_x a_i,$$

il s'ensuit immédiatement que point et espace correspondant sont pôle et polaire, au sens propre du mot, par rapport à l'espace des éléments unis.

Nous appellerons, en conséquence, *système polaire*, la correspondance que nous étudions.

THÉORÈME. — *Quand, dans une homographie, entre deux espaces superposés il existe un polyèdre de* $n + 1$ *sommets, tel qu'à tout sommet considéré comme point* X *ou comme point* Y *il corresponde la face opposée du polyèdre, l'homographie est polaire.*

Prenons, en effet, le polyèdre en question comme polyèdre de référence ; le sommet A_i a pour coordonnées

$$x_1^{(i)} = 0, \quad x_2^{(i)} = 0, \ \ldots \ x_{i-1}^{(i)} = 0, \quad x_i^{(i)} \gtrless 0, \quad x_{i+1}^{(i)} = 0, \ \ldots \ x_{n+1}^{(i)} = 0,$$

ou

$$y_1^{(i)} = 0, \quad y_2^{(i)} = 0, \ \ldots \ y_{i-1}^{(i)} = 0, \quad y_i^{(i)} \gtrless 0, \quad y_{i+1}^{(i)} = 0, \ \ldots \ y_{n+1}^{(i)} = 0;$$

la face correspondante aura pour coordonnées

$$\xi_1^{(i)} = 0, \quad \xi_2^{(i)} = 0, \ \ldots \ \xi_{i-1}^{(i)} = 0, \quad \xi_i^{(i)} \gtrless 0, \quad \xi_{i+1}^{(i)} = 0, \ \ldots \ \xi_{n+1}^{(i)} = 0,$$

ou

$$\eta_1^{(i)} = 0, \quad \eta_2^{(i)} = 0, \ \ldots \ \eta_{i-1}^{(i)} = 0, \quad \eta_i^{(i)} \gtrless 0, \quad \eta_{i+1}^{(i)} = 0, \ \ldots \ \eta_{n+1}^{(i)} = 0$$

Digitized by Google

Les équations

$$\rho \xi_i = a_i a'_y \qquad \text{et} \qquad \rho \eta_i = a_x a'_i \quad (i = 1.2.3 \ldots n+1)$$

devant être vérifiées par ces systèmes de coordonnées, nous aurons les conditions

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = 0, \ldots a_{ii} \gtrless 0, \quad a_{i+1} = 0, \ldots a_{n+1} = 0,$$

$$a_{i1} = 0, \quad a_{i2} = 0, \ldots a_{ii} \gtrless 0, \quad a_{i+1i} = 0, \ldots a_{in+1} = 0.$$

Faisons varier i de 1 à $n+1$ et introduisons les diverses conditions qui en résultent dans la forme d'homographie; elle deviendra

$$f = \sum_1^{n+1} a_{ii} x_i y_i = 0.$$

Puisque les deux systèmes de coordonnées sont rapportés à un même polyèdre de référence, il suit de cette équation qu'à tout point de l'espace considéré comme point X ou comme point Y, il correspond le même espace à $n-1$ dimensions; l'homographie est donc polaire.

15. *Un système polaire est complètement déterminé par un polyèdre polaire à* $n+1$ *faces et par un pôle et son espace correspondant.*

Nous avons vu, en effet, qu'une homographie entre deux espaces superposés ou non, est complètement déterminée par $n+2$ couples d'éléments correspondants; dans le cas qui nous occupe, cette homographie possède un polyèdre polaire; donc, d'après le théorème précédent, l'homographie est elle-même polaire.

16. Il peut encore arriver que les deux espaces $S = 0$ et $\Sigma = 0$ soient complètement indéterminés; pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait les conditions

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0, \quad a_{kk} = 0,$$

i et k prenant toutes les valeurs comprises entre 1 et $n+1$.

L'équation d'homographie prend alors la forme

$$f = \sum_{ik} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0.$$

Digitized by Google

Les coordonnées ξ_i de l'espace à $n-1$ dimensions E_{n-1} correspondant à un point Y de coordonnées y_k $(k = 1 . 2 . 3 \ldots n+1)$, sont reliées à ces coordonnées par les relations

$$\begin{aligned}
\rho\xi_1 &= -0 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \cdots + a_{1n+1}y_{n+1},\\
\rho\xi_2 &= -a_{12}y_1 + 0 + a_{23}y_3 + \cdots + a_{2n+1}y_{n+1},\\
\rho\xi_3 &= -a_{12}y_1 - a_{23}y_2 + 0 + \cdots + a_{3n+1}y_{n+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\rho\xi_{n+1} &= -a_{1n+1}y_1 - a_{2n+1}y_2 - \cdots + 0;
\end{aligned}$$

et les coordonnées η_i de l'espace à $n-1$ dimensions E'_{n-1}, correspondant à un point X de coordonnées x_k $(k = 1 . 2 . 3 \ldots n+1)$, sont reliées à ces coordonnées par les relations

$$\begin{aligned}
\rho'\eta_1 &= +0_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n+1}y_{n+1},\\
\rho'\eta_2 &= a_{12}x_1 + 0 - a_{23}x_3 \cdots - a_{2n+1}y_{n+1},\\
\rho'\eta_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + 0 \cdots - a_{3n+1}y_{n+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\rho'\eta_{n+1} &= a_{1n+1}x_1 + a_{2n+1}x_2 + a_{3n+1}x_3 \cdots + 0.
\end{aligned}$$

Donc, quel que soit le point considéré, il lui correspond un même espace à $n-1$ dimensions, selon que l'on passe de la première figure à la seconde, ou inversement. De plus, nous tirons des équations précédentes les relations

$$\begin{aligned}
(E_{n-1} . Y) &= (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \cdots + \xi_{n+1}y_{n+1}) = 0,\\
(E'_{n-1} X) &= (\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_{n+1}x_{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons, par conséquent, que l'espace à $n-1$ dimensions, correspondant à un point donné, passe par ce point. Nous pouvons encore considérer cette homographie particulière comme définissant un système unique, dans lequel à tout point il correspond un espace à $n-1$ dimensions passant par ce point, et à tout espace à $n-1$ dimensions il correspond un point situé dans cet espace.

Digitized by Google

Nous appellerons ce système, *système polaire involutif.*

Le discriminant de la forme d'homographie est, dans ce cas particulier, un déterminant symétrique gauche. Nous distinguerons, par conséquent, pour la suite deux cas selon que n est un nombre impair ou pair.

17. Si n est impair, le déterminant Δ, qui est d'ordre pair, est un carré; nous supposerons d'abord ce carré différent de zéro.

Si à un point $X^{(1)}$ il correspond un espace $E^{(1)}_{n-1}$, et à un second point $X^{(2)}$ un espace $E^{(2)}_{n-1}$, à tout point X de la droite $(X^{(1)}\,X^{(2)})$ il correspond un espace E_{n-1} passant par $(E^{(1)}_{n-1}\,E^{(2)}_{n-1})$, vice versa et réciproquement.

La droite $(X^{(1)}\,X^{(2)})$ et l'espace à $n-2$ dimensions $(E^{(1)}_{n-1}\,E^{(2)}_{n-2})$ seront appelés espaces conjugués.

THÉORÈME. — *Si une droite rencontre son espace conjugué, elle y est contenue tout entière.*

En effet, soit X le point de rencontre de la droite $(X^{(1)}, X^{(2)})$ et de son espace conjugué $(E^{(1)}_{n-1}\,E^{(2)}_{n-1})$; on a, en notation abrégée, la condition

$$X = X^{(1)} + \lambda X^{(2)},$$

et les conditions

$$(X^{(1)}E^{(1)}_{n-1}) = 0, \quad (X^{(2)}E^{(2)}_{n-1}) = 0,$$

$$(X\,E^{(1)}_{n-1}) = 0, \quad (X\,E^{(2)}_{n-1}) = 0;$$

or, si E_{n-1} est l'espace correspondant de X, on a, en notation abrégée,

$$E_{n-1} = E^{(1)}_{n-1} + \lambda E^{(2)}_{n-1}.$$

Par conséquent

$$(X\,E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(1)}_1 E^{(1)}_{n-1}) + \lambda_1 E^{(1)}_{n-1}\,X^{(2)}) = \lambda(E^{(1)}_{n-1}\,X^{(2)}) = 0,$$

et

$$(X\,E^{(2)}_{n-1}) = (X^{(1)}\,E^{(2)}_{n-1}) + \lambda(X^{(2)}E^{(2)}_{n-1}) = (X^{(1)}\,E^{(2)}_{n-1}) = 0;$$

ces deux égalités démontrent le théorème énoncé.

Digitized by Google

18. En général, à k points $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$, dont la jonction forme un espace à $k-1$ dimensions E_{k-1}, il correspond k espaces plans à $n-1$ dimensions $E^{(1)}_{n-1}, E^{(2)}_{n-1}, \ldots E^{(k)}_{n-1}$, dont l'intersection est un espace à $n-k$ dimensions E_{n-k}. Ces deux espaces correspondants E_{k-1} et E_{n-k} sont conjugués, en ce sens qu'à tout espace à φ dimensions, situé ou passant par l'un, il correspond un espace à $n-\varphi-1$ dimensions passant ou situé dans l'autre.

Supposons que deux espaces conjugués E_{k-1} et E_{n-k} aient en commun un espace à $k-2$ dimensions E_{k-2}; il est d'abord évident que cet espace E_{k-2} coïncide avec son espace correspondant.

D'autre part, si nous considérons cet espace E_{k-2} comme étant la jonction des $k-1$ points $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k-1)}$, nous aurons les conditions

$$(X^{(1)}E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(1)}E^{(2)}_{n-1}) = (X^{(1)}E^{(3)}_{n-1}) = \cdots = (X^{(1)}E^{(k-1)}_{n-1}) = 0,$$

$$(X^{(2)}E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(2)}E^{(2)}_{n-1}) = (X^{(2)}E^{(3)}_{n-1}) = \cdots = (X^{(2)}E^{(k-1)}_{n-1}) = 0,$$

. . . . . .

$$(X^{(k-1)}E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(k-1)}E^{(2)}_{n-1}) = (X^{(k-1)}E^{(3)}_{n-1}) = \cdots = (X^{(k-1)}E^{(k-1)}_{n-1}) = 0.$$

L'espace E_{n-k} contient E_{k-2}; on a donc aussi

$$(X^{(1)}E^{(k)}_{n-1}) = (X^{(2)}E^{(k)}_{n-1}) = \cdots = (X^{(k-1)}E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(k)}E^{(k)}_{n-1}) = 0,$$

et, comme conséquence,

$$(X^{(k)}E^{(1)}_{n-1}) = (X^{(k)}E^{(2)}_{n-1}) = \cdots = (X^{(k)}E^{(k-1)}_{n-1}) = (X^{(k)}E^{(k)}_{n-1}) = 0;$$

en interprétant ce résultat, nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Deux espaces conjugués à k — 1 *et à* n — k *dimensions, qui ont en commun un espace à* k — 2 *dimensions, coïncident.*

On démontrerait de la même manière que, si l'espace E_{k-1} rencontre son espace conjugué E_{n-k} en un espace à $k-h$ dimensions, E_{k-h}, tous les espaces à $k-h+1$ dimensions, passant par E_{k-h} et situés dans E_{k-1}, coïncident avec leurs espaces conjugués, et que les espaces à $n-k+h-2$ dimensions passant par E_{n-k} et situés dans l'espace à $n-k+h-1$ dimensions, conjugué de E_{k-h}, passent par leurs espaces conjugués.

Digitized by Google

On peut démontrer aisément cette suite de théorèmes :

Les espaces à k *dimensions d'un faisceau dont l'axe est un espace à* k — 1 *dimensions qui se correspond, et qui sont situés dans l'espace conjugué à cet axe, se correspondent* (*).

Les espaces à k *dimensions, qui se correspondent et qui appartiennent à un faisceau dont l'espace axial à* k — 1 *dimensions se correspond, sont situés dans l'espace conjugué à cet axe.*

Les espaces à k + i *dimensions, qui se correspondent et passent par un espace à* k *dimensions qui se correspond, sont situés dans l'espace conjugué à cet espace à* k *dimensions.*

Tous les espaces à k + i *dimensions, passant par un espace à* k *dimensions qui coïncide avec son espace conjugué, et qui sont situés dans cet espace conjugué, se correspondent.*

La jonction de deux espaces qui se correspondent, situés dans deux espaces conjugués qui n'ont aucun élément en commun, est un espace qui se correspond.

Tout espace à i + h + 1 *dimensions, qui rencontre deux espaces conjugués, n'ayant aucun élément en commun, suivant un espace à* i *et un espace à* h *dimensions qui se correspondent, se correspond* (**).

19. En particulier, *toute droite qui rencontre deux espaces conjugués quelconques se correspond, puisque les deux points d'intersection de la droite avec ces deux espaces sont situés dans leurs espaces correspondants.*

On déduit de là, immédiatement, qu'une corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à n dimensions, n étant impair, est déterminée par $n - 1$ couples de droites et d'espaces à $n - 2$ dimensions conjugués.

Soient

$$E_1^{(1)},\ E_{n-2}^{(1)};\qquad E_1^{(2)},\ E_{n-2}^{(2)};\quad \ldots\quad E_1^{(n-1)},\ E_{n-2}^{(n-1)}$$

ces $n - 1$ couples; il s'agit de résoudre les problèmes suivants :

(*) Nous appellerons désormais *espaces qui se correspondent*, deux espaces *conjugués* qui passent ou sont situés l'un dans l'autre.

(**) M. Bordiga a énoncé déjà quelques-uns de ces théorèmes, et il les a pris comme les fondements de la théorie des complexes linéaires dans un espace quelconque (*Atti del Istituto Veneto*, 1885-1886).

Digitized by Google

1° *Étant donné un espace à* n — 1 *dimensions* E_{n-1}, *trouver le pôle de cet espace ;*

2° *Étant donné un point* E_0, *trouver l'espace polaire de ce point.*

1° L'espace E_{n-1} rencontre le couple $E_1^{(i)}$, $E_{n-2}^{(i)}$ (i étant compris entre 1 et $n-1$) respectivement en un point $E_0^{(i)}$ et en un espace à $n-3$ dimensions $E_{n-3}^{(i)}$; soit $H_{n-2}^{(i)}$ l'espace à $n-2$ dimensions qui unit ce point et cet espace. $H_{n-2}^{(i)}$ a pour correspondant une droite située dans cet espace; en effet, au point $E_0^{(i)}$ il correspond un espace à $n-1$ dimensions $E_{n-1}^{(i)}$ passant par $E_0^{(i)}$ et par $E_{n-3}^{(i)}$. A l'espace $E_{n-3}^{(i)}$ il correspond un espace à deux dimensions $E_2^{(i)}$, passant par $E_1^{(i)}$ et donc par $E_0^{(i)}$. Il suit de là que l'espace $H_{n-3}^{(i)}$, ayant en commun avec sa droite correspondante le point $E_0^{(i)}$, la contient tout entière. De plus, puisque cette droite passe par le pôle de E_{n-1}, il en est de même de $H_{n-2}^{(i)}$; par suite, les $n-1$ espaces $H_{n-2}^{(i)}$ ($i = 1.2 \ldots n-1$) étant situés dans E_{n-1} se couperont en un point qui sera le pôle de cet espace E_{n-1};

2° On se donne le point E_0 dont il s'agit de déterminer l'espace polaire.

En faisant un raisonnement analogue au précédent, on verrait facilement que l'espace à $n-2$ dimensions qui unit les $n-1$ droites d'intersection des espaces à deux et à $n-1$ dimensions $(E_0E_1^{(i)})$ et $(E_0E_{n-2}^{(i)})$ ($i = 1.2.3 \ldots n-1$) est l'espace cherché.

20. Nous avons supposé jusqu'à présent que le discriminant Δ de la forme d'involution était différent de zéro (bien entendu dans le cas de n impair); supposons maintenant qu'il est nul. D'après un théorème dû à M. Le Paige (*), les mineurs d'ordre n du déterminant Δ sont proportionnels à la racine carrée de ce déterminant; ils sont donc nuls également.

Le système des $n+1$ équations linéaires

$$\frac{df}{dy_i} = 0, \quad i = 1.2.3 \ldots n+1,$$

se réduit dès lors à un système de $n-1$ équations. Ces équations représentent une droite que nous appellerons *droite singulière* de la corrélation.

(*) *Sur les déterminants hémisymétriques d'ordre pair* (Société royale des sciences de Bohême, mars 1880).

Digitized by Google

Prenons sur cette droite deux points quelconques de coordonnées y_i' et z_i'.

A un point quelconque X de coordonnées x_i de l'espace, il correspond toujours un espace à $n-1$ dimensions, déterminé par les équations

$$\rho\xi_i = \frac{df}{dy_i}, \quad i = 1.2.3 \ldots n+1. \tag{12}$$

Multiplions ces équations respectivement par y_i' et z_i' et faisons la somme, nous obtiendrons les deux relations

$$\rho\sum_1^{n+1} \xi_i y_i' = 0,$$

$$\rho\sum_1^{n+1} \xi_i z_i' = 0.$$

Nous en déduisons les conclusions suivantes :

1° A un point quelconque X de l'espace, il correspond un espace à $n-1$ dimensions passant par la droite singulière de la corrélation ;

2° A un point quelconque de la droite singulière, il correspond tous les espaces à $n-1$ dimensions qui passent par la droite singulière.

A un espace à $n-1$ dimensions E_{n-1} de coordonnées ξ_i, il correspond un point X dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant les équations (12) par rapport aux x_i.

Or, le déterminant des coefficients des inconnues étant nul, ainsi que ses mineurs, il s'ensuit qu'il existe deux relations linéaires distinctes entre les coefficients des inconnues. Les coefficients de ces relations linéaires sont, par exemple, proportionnels aux coordonnées y_i' et z_i'. Pour que les équations (12) soient compatibles, il faut qu'entre les seconds membres de ces équations il existe les deux mêmes relations linéaires. On doit donc avoir

ou bien

$$\rho = 0,$$

ou bien

$$\sum_1^{n+1} \xi_i y_i' = 0,$$

$$\sum_1^{n+1} \xi_i z_i' = 0.$$

Si $\rho = 0$, l'espace E_{n-1} est indéterminé et le point correspondant est indéterminé sur la droite singulière.

Digitized by Google

Si la seconde condition est remplie, l'espace E_{n-1} passe par la droite singulière et les équations (12) sont résolubles par rapport aux x_i par des formules analogues à

$$x_i = A + Bx_n + Cx_{n+1}.$$

Le point X se trouve donc indéterminé dans un espace à deux dimensions : cet espace passe nécessairement par la droite singulière.

Un espace à $n - 1$ dimensions qui ne passerait pas par la droite singulière ne pourrait avoir de pôle. Si E_{n-1} est l'espace correspondant d'un point X, tous les points du plan qui unit le point X à la droite singulière ont le même espace polaire; remarquons encore que les droites qui rencontrent la droite singulière, et tous les espaces à deux dimensions passant par cette droite, sont situés dans leurs espaces correspondants; de plus, ces droites et ces plans sont les seuls qui puissent jouir de cette propriété.

21. Plus généralement, supposons que le discriminant Δ, ainsi que ses mineurs d'ordre $n - k$, k étant un nombre impair, soient nuls : dans ce cas, les mineurs d'ordre $n - k - 1$ sont nuls également (*). Les $n + 1$ équations (12) se réduisent à $n - k - 2$ d'entre elles, et elles représenteront, par conséquent, un espace à $k + 2$ dimensions.

En faisant un raisonnement semblable à celui qui a été indiqué précédemment, nous arriverons aux conclusions suivantes :

1° A un point quelconque de l'espace, il correspond un espace à $n - 1$ dimensions passant par le point et l'espace singulier;

2° A un point de l'espace singulier, il correspond tous les espaces à $n - 1$ dimensions du faisceau dont l'axe est l'espace singulier;

3° A un espace à $n - 1$ dimensions passant par l'espace singulier, il correspond une $k + 3^{\text{uple}}$ infinité de pôles, situés dans l'espace à $k + 3$ dimensions, passant par l'espace singulier et situé dans l'espace à $n - 1$ dimensions donné.

Si E_{n-1} est l'espace correspondant d'un point X, tous les points de l'espace à $k + 3$ dimensions qui unit le point X à l'espace singulier ont le même

(*) Fr. Deruyts, *Sur une propriété des déterminants symétriques gauches* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 2e série, t. XVII, 1890).

Digitized by Google

espace E_{n-1}, pour espace correspondant. Tous les espaces à i dimensions ($i = 1, 2, 3, \ldots k+3$) qui rencontrent l'espace singulier en i points sont situés dans leurs espaces correspondants. De plus, ce sont les seuls espaces à ces nombres de dimensions, qui puissent jouir de cette propriété.

Les espaces à $n-1$ dimensions passant par l'espace singulier E_{k+2} forment une $(n-k-3)^{uple}$ infinité linéaire; les espaces à $k+3$ dimensions passant par E_{k+2} forment également une $(n-k-3)^{uple}$ infinité linéaire. Nous pouvons donc considérer les plans à $n-1$ dimensions et les plans à $k+3$ dimensions passant par l'espace singulier, comme étant des plans à $n-k-4$ dimensions et des points d'un espace à $n-k-3$ dimensions. Ces plans et ces points peuvent s'obtenir, par exemple, en coupant les espaces E_{n-1} et E_{k+3} de E_{k+2} par un espace à $n-k-3$ dimensions ne rencontrant pas E_{k+2}. Si dans cet espace on construit la corrélation involutive non dégénérescente, et si l'on joint tous les éléments correspondants à l'espace singulier E_{k+2}, on obtiendra tous les éléments correspondants de la corrélation dégénérescente de l'espace à n dimensions.

D'apres ce qui précède, nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Toute corrélation polaire involutive k *fois dégénérescente entre les éléments d'un espace à* n *dimensions* (n *et* k *étant des nombres impairs*) *est la projection d'une corrélation polaire non dégénérescente entre les éléments d'un espace à* n — k — 3 *dimensions.*

22. Recherchons la forme qui, égalée à zéro, représentera une corrélation polaire involutive quand on prend comme polyèdre de référence un polyèdre à $n+1$ faces dont les sommets sont les pôles de faces adjacentes.

Nous supposerons que le sommet A_i de ce nouveau polyèdre, dont les coordonnées sont

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots \ x_{i-1} = 0, \quad x_i \gtrless 0, \quad x_{i+1} = 0, \ \ldots \ x_{n+1} = 0,$$

a pour espace polaire la face α_{n-i+2}, dont les coordonnées sont

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \ \ldots \ \xi_{n-i+1} = 0, \quad \xi_{n-i+2} \gtrless 0, \quad \xi_{n-i+3} = 0, \ \ldots \ \xi_{n+1} = 0,$$

et que le sommet A_{n-i+2}, dont les coordonnées sont

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots \ x_{n-i+1} = 0, \quad x_{n-i+2} \gtrless 0, \quad x_{n-i+3} = 0, \ \ldots \ x_{n+1} = 0,$$

Digitized by Google

a pour espace polaire la face α_i, dont les coordonnées sont

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \ldots \quad \xi_{i-1} = 0, \quad \xi_i \gtrless 0, \quad \xi_{i+1} = 0 \quad \ldots \quad \xi_{n+1} = 0.$$

Il est évident que dans ces conditions l'équation de la corrélation pourra s'écrire :

$$f = \sum_1^{\frac{n+1}{2}} (\quad 1)^{i-1} a_i (x_i y_{n-i+2} - x_{n-i+2} y_i) = 0;$$

c'est la forme canonique de la corrélation polaire involutive dans un espace à un nombre impair n de dimensions.

Si la corrélation est k fois dégénérescente, k étant un nombre impair, nous pouvons supposer que son espace singulier est situé sur le nouveau polyèdre de référence; dans cette hypothèse, l'équation de la corrélation pourra s'écrire

$$f = \sum_1^{\frac{n-k}{2}-2} (-1)^{i-1} a_i (x_i y_{n-i+2} - y_i x_{n-i+2}) = 0.$$

23. Supposons maintenant que le nombre n soit pair : le discriminant de la forme d'involution, étant un déterminant symétrique gauche d'ordre impair, est identiquement nul. Les $n + 1$ équations

$$\frac{df}{dy_i} = 0, \quad (i = 1.2.3 \ldots n + 1)$$

se réduisent à n d'entre elles; leur ensemble représente donc un point (X) que nous appellerons, comme précédemment, *point singulier*.

Par des raisonnements analogues à ceux que nous avons déjà maintes fois établis, on arrive aux conclusions suivantes :

1° A un point quelconque de l'espace, il correspond un espace à $n - 1$ dimensions, bien déterminé, passant par le point (X);

2° A ce point (X), il correspond un espace indéterminé de la gerbe (X);

3° A un espace à $n - 1$ dimensions passant par le point (X), il correspond les points d'une droite passant par (X) et situé dans cet espace à $n - 1$ dimensions;

4° Un espace à $n - 1$ dimensions qui ne passerait pas par le point (X) ne pourrait avoir de pôle.

Digitized by Google

En résumé, on peut énoncer la conséquence suivante :

L'étude d'une corrélation polaire involutive, dans un espace à un nombre pair n *de dimensions, revient à l'étude d'une corrélation polaire involutive dans un espace à* n — 1 *dimensions.*

En d'autres termes, toute corrélation polaire involutive, entre les éléments d'un espace à un nombre pair n de dimensions, est la projection d'un centre fixe d'une corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à $n - 1$ dimensions.

Si les mineurs d'ordre $n - k$ du discriminant de $f = 0$ (n et k étant pairs) sont nuls, d'après un théorème que nous avons démontré (*), la corrélation possédera un espace singulier à $2k + 2$ dimensions et la corrélation se réduira à la projection d'un espace à $2k + 2$ dimensions des éléments d'une corrélation non dégénérescente entre les éléments d'un espace à $n - 2k - 3$ dimensions.

Il y a donc une différence bien essentielle, au point de vue de la corrélation polaire involutive, entre les espaces à un nombre pair et impair de dimensions : la corrélation non dégénérescente ne peut exister dans un espace à un nombre pair de dimensions; de plus, si elle est dégénérescente, son espace singulier est toujours à un nombre pair de dimensions, tandis que l'espace singulier d'une corrélation dégénérescente dans un espace à un nombre impair de dimensions est également à un nombre impair de dimensions.

Cette distinction ressortira encore mieux du théorème suivant que nous démontrerons pour terminer notre travail :

24. *Pôles et espaces polaires d'une corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à un nombre impair* n *de dimensions sont pôles et espaces polaires par rapport à une courbe normale de l'espace considéré.*

Considérons dans l'espace en question un premier polyèdre de référence tel que l'équation de la corrélation, soit sous sa forme canonique,

$$f = \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} a_i (x_i y_{n-i+2} - y_i x_{n-i+2}) = 0,$$

(*) Voir notre travail *Sur une propriété des déterminants symétriques gauches*, l. c., p. 36.

Digitized by Google

et considérons un second polyèdre de référence tel que les nouvelles coordonnées X_i soient reliées aux anciennes x_i par les relations

$$X_i = x^i \sqrt{\frac{a_i}{C_{n,i-1}}}, \quad X_{n-i+2} = x_{n-i+2} \sqrt{\frac{a_i}{C_{n,n-i+1}}},$$

i variant de 1 à $\frac{n+1}{2}$.

Dans ce second système de référence, considérons la courbe unicursale d'ordre n dont les équations normales sont

$$\left.\begin{aligned} \rho X_1 &= \lambda^n, \\ \rho X_2 &= \lambda^{n-1} \\ &\cdots\cdots \\ \rho X_{n+1} &= 1, \end{aligned}\right\},$$

ρ étant un facteur de proportionalité et λ un paramètre arbitraire.

On sait que d'un point X, dont les coordonnées sont X_i, on peut mener à cette courbe normale n espaces osculateurs à $n-1$ dimensions; les paramètres des points de contact sont les racines de l'équation

$$X_1 - C_{n,1}.\lambda\, X_2 + C_{n,2}.X_3.\lambda^2 \cdots + (-1)^{i-1} C_{n,i-1} X_i \lambda^{i-1} \cdots - \lambda^n X_{n+1} = 0.$$

Les n points de contact sont situés dans un espace à $n-1$ dimensions dont l'équation est, en représentant par Y_i les coordonnées d'un point quelconque de cet espace,

$$\sum_1^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} C_{n,i-1} (X_i Y_{n-i+2} - X_{n-i+2} Y_i) = 0 \ (^*)$$

Cet espace est l'*espace polaire* du point X; il passe par le point X, puisque son équation est identiquement vérifiée quand on fait

$$X_i = Y_i \qquad (i = 1.2.3 \ldots n+1).$$

Cet espace polaire aura pour équation, dans le premier système de référence,

$$\sum_1^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} a_i (x_i y_{n-i+2} - y_i x_{n-i+2}) = 0;$$

c'est ce qui démontre le théorème que nous avions annoncé.

(*) Voir à ce sujet notre *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, 2e série, t. XVII, 1891).

Digitized by Google

SUR

L'APPLICATION DES FONCTIONS SPHÉRIQUES

AUX NOMBRES DE SEGNER;

PAR

M. F. CASPARY.

(EXTRAITS D'UNE LETTRE A M. CATALAN.)

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 10 mai 1892.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

L'APPLICATION DES FONCTIONS SPHÉRIQUES

AUX NOMBRES DE SEGNER.

... L'étude des importants Mémoires que vous avez bien voulu m'offrir, m'a fait trouver une liaison étroite entre les fonctions sphériques et les nombres de Segner. Cette liaison permet d'établir aisément les relations qui ont lieu pour les nombres de Segner, problème que vous-même avez examiné, Monsieur, à plusieurs reprises, avec tant de succès. Comme les relations qui découlent de ladite liaison sont extrêmement nombreuses, je me borne à vous communiquer les plus simples, après vous avoir expliqué, succinctement, la marche que j'ai suivie.

1. — Conformément à la notation que vous avez introduite, je désigne par *nombres de Segner* les nombres $F(n)$ qui expriment de combien de manières un polygone convexe, de $n + 2$ côtés ($n = 1, 2, 3, \ldots$), se partage en triangles, au moyen de ses diagonales. Pour ces nombres, l'illustre Euler a établi l'expression

$$(I_a) \quad \ldots \quad F(n) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \ldots (4n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1)},$$

qui se transforme aussi dans les deux suivantes :

$$(I_b) \quad \ldots \quad \begin{cases} F(n) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1)} \cdot 2^n, \\ F(n) = \dfrac{(n+2)(n+3) \ldots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}. \end{cases}$$

Digitized by Google

De plus, si l'on pose

$$\lambda_k = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

les nombres $F(n)$ prennent les formes

$$(I_e) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} F(n) = \dfrac{(2n)_{n-1}}{n}, \\ F(n) = \dfrac{(2n)_n}{n+1}, \\ F(n) = (2n)_n - (2n)_{n-1}. \end{cases}$$

Par les recherches dues à Euler, à Binet et tout particulièrement à vous, Monsieur, on sait que les nombres $F(n)$ se présentent aussi comme les coefficients numériques des puissances de la variable, si l'on développe en séries quelques fonctions. D'après une simple remarque, que j'ai faite, toutes ces fonctions sont des cas particuliers des fonctions sphériques; dès lors, j'ai été conduit à la liaison entre celles-ci et les nombres $F(n)$.

Si l'on désigne par $P_n(x)$ les fonctions sphériques de première espèce, définies par la série

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha P_1(x) + \alpha^2 P_2(x) + \cdots \alpha^n P_n(x) + \cdots,$$

cette liaison est établie par les formules suivantes :

$$(\mathfrak{P}) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \left[\dfrac{P_n(x)}{x^n}\right]_{x=\infty} = \dfrac{n+1}{2^n} F(n), \\ P_{2n}(o) = (-1)^n \dfrac{n+1}{4^n} F(n), \\ P'_{2n+1}(o) = (-1)^n \dfrac{(2n+1)(n+1)}{4^n} F(n). \end{cases}$$

De même, les nombres $F(n)$ sont liés avec les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(x)$, définies par l'intégrale

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(u)\,du}{x-u},$$

Digitized by Google

au moyen des égalités

$$(\mathfrak{Q}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left[x^{n+1}Q_n(x)\right]_{x=\infty} & = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)(2n+1)} \dfrac{1}{F(n)}, \\ Q_{2n+1}(o) & = (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} \dfrac{1}{F(n)}, \\ Q'_{2n}(o) & = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}}{n+1} \dfrac{1}{F(n)}, \\ Q_{2n}(o) & = Q_0(o)\, P_{2n}(o), \\ Q'_{2n+1}(o) & = Q_0(o)\, P'_{2n+1}(o). \end{array} \right.$$

Enfin, si l'on définit les fonctions $R_n(x)$ par l'égalité

$$R_n(x) = Q_n(x) - Q_0(x) P_n(x),$$

on obtient

$$(\mathfrak{R}) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{2n+1}(o) = Q_{2n+1}(o), \\ \dfrac{1}{2} R'_{2n}(o) = (-1)^n \left\{ \dfrac{4^n}{(n+1) F(n)} - \dfrac{(n+1) F(n)}{4^n} \right\}. \end{array} \right.$$

Les égalités $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{R})$, dont les seconds membres peuvent être transformés aussi au moyen des deux formules équivalentes :

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n+2}{2} F(n+1) & = (2n+1) F(n), \\ \dfrac{n+1}{2} F(n) & = (2n-1) F(n-1), \end{array} \right.$$

mettent en évidence *que toutes les relations, entre les fonctions sphériques, se transforment en relations entre les nombres de Segner.*

Voici, Monsieur, quelques conséquences de cette féconde remarque.

2. — Dans votre beau travail, intitulé : *Sur les fonctions* X_n, *de Legendre, Troisième Mémoire,* vous avez établi (pp. 7 et 8) les deux formules (C) et (D), qui prennent aisément la forme

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r n_r \frac{P_r(x)}{x^r} = \left\{ \begin{array}{l} o \ (n \ impair), \\ \dfrac{(x^2-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n x^n} \, n_{\frac{1}{2}n} \ (n \ pair). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Par conséquent, si l'on pose $x = \infty$, on a, au moyen de la première expression $\mathfrak{P}$ et de l'égalité $n_{\frac{1}{2}n} = \frac{n+2}{2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}n\right)$, la relation

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n_r (r+1)\mathrm{F}(r)}{2^r} = \begin{cases} 0 \ (n \ impair), \\ \dfrac{n+2}{2^{n+1}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}n\right) \ (n \ pair), \end{cases}$$

où $\mathrm{F}(o) = 1$.

Les fonctions $\mathrm{P}_n(x)$, que je désigne dès lors plus simplement par P_n, sont liées par la condition

$$(r+1)\mathrm{P}_{r+1} - (2r+1)x\mathrm{P}_r + r\mathrm{P}_{r-1} = o,$$

à laquelle on peut aussi donner la forme

$$\frac{r}{r+1}(x\mathrm{P}_r - \mathrm{P}_{r-1}) = \mathrm{P}_{r+1} - x\mathrm{P}_r.$$

On en déduit, immédiatement,

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{r+1}(x\mathrm{P}_r - \mathrm{P}_{r-1})x^{n-r-1} = \mathrm{P}_n - x^n;$$

d'où, en divisant par x^n et en posant $x = \infty$, on obtient, au moyen de la première des égalités $(\mathfrak{P})$,

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r\mathrm{F}(r)}{2^r} = \frac{n+1}{2^n}\mathrm{F}(n).$$

La formule précédente, qui lie les trois fonctions P_{r+1}, P_r, P_{r-1}, ne change pas, si l'on remplace les fonctions P_{r+1} par les fonctions $\mathrm{Q}_{r+1}(x)$ ... Par conséquent, si l'on désigne les fonctions $\mathrm{Q}_{r+1}(x)$ ... plus simplement par Q_{r+1} ..., on a aussi

$$\frac{r+1}{r}(\mathrm{Q}_{r+1} - x\mathrm{Q}_r) = x\mathrm{Q}_r - \mathrm{Q}_{r-1};$$

donc

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r}(\mathrm{Q}_{r+1} - x\mathrm{Q}_r)x^r = x^n\mathrm{Q}_{n-1} - x\mathrm{Q}_0,$$

Digitized by Google

d'où résulte, au moyen de la première des formules $(\mathfrak{Q})$:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{2^r}{r(2r+1)} \cdot \frac{1}{F(r)} = \frac{2^n}{n(n+1)} \frac{1}{F(n)}.$$

Pour établir d'autres relations entre les nombres de Segner, je fais usage des séries qui expriment les fonctions sphériques par leurs dérivées, et *vice versa*. Ainsi, on tire des séries

$$P_{2n} - 1 = \frac{x^2-1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{4r+3}{(r+1)(2r+1)} P'_{2r+1},$$

$$Q_{2n+1} - Q_1 = \frac{x^2-1}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{4r+1}{r(2r+1)} Q'_{2r},$$

au moyen des expressions $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{Q})$, les relations

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad 1 - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{4r+3}{4^r} F(r) = (-1)^n \frac{n+1}{4^n} F(n),$$

$$(5) \quad \ldots \quad \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{4^{r-1}(4r+1)}{r(r+1)(2r+1)} \cdot \frac{1}{F(r)} = (-1)^n \frac{4^n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{F(n+1)}.$$

De même, on déduit, des séries

$$P'_{2n+1} = \sum_{r=0}^{n} (4r+1) P_{2r},$$

$$Q'_{2n+2} - Q'_0 = \sum_{r=0}^{n} (4r+3) Q_{2r+1},$$

les relations

$$(6) \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(r+1)(4r+1)}{4^r} F(r) = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{2n+1}} F(n+1),$$

$$(7) \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{4^r(4r+3)}{(r+1)(2r+1)} \cdot \frac{1}{F(r)} = 1 + (-1)^n \frac{4^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{1}{F(n+1)}.$$

D'après la formule célèbre de M. Christoffel, on a

$$(III) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\frac{1}{2} R_n = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{2n-4\nu-1}{(2\nu+1)(n-\nu)} P_{n-2\nu-1},$$

Digitized by Google

où R_n est égale à $R_n(x)$, et où $N = \frac{1}{2}n$ ou $= \frac{1}{2}(n-1)$, suivant que n est pair ou impair. Si l'on remplace, dans cette formule, n par $2n+1$, et si l'on pose $n - \nu = r$ et $x = 0$, on obtient, au moyen de la première expression $(\mathcal{R})$ et de la seconde expression $(\mathcal{Q})$,

$$(8)\quad \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(r+1)(4r+1)}{4^r(2n-2r+1)(n+r+1)}F(r)=(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{F(n+1)}.$$

De même, on tire, de la formule de Christoffel, si l'on y remplace n par $2n$ et si l'on différentie, la relation

$$-\frac{1}{2}R'_{2n}=\sum_{r=1}^{n}\frac{4r-1}{(n+r)(2n-2r+1)}P'_{2r-1},$$

d'où résulte, au moyen de la seconde expression $(\mathcal{R})$,

$$(9)\quad \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\frac{r(r+1)(4r-1)}{2^{2r-1}(n+r)(2n-2r+1)}F(r)=\frac{4^n}{(n+1)F(n)}-\frac{(n+1)F(n)}{4^n}.$$

3. — Dans votre important Mémoire : *Sur les polynômes de Legendre, d'Hermite et de Polignac,* vous avez tiré, de la formule de M. Christoffel, la relation suivante (*l. c.*, p. 7) :

$$(IV)\quad \sum_{r=0}^{n}\frac{P_rP_{n-r}}{r+1}=\frac{2n+1}{n+1}P_n+\frac{2n-3}{3n}P_{n-2}+\cdots$$

En divisant par x^n et en posant $x=\infty$, on en déduit

$$(10')\quad \sum_{r=0}^{n}(n-r+1)F(r)F(n-r)=(2n+1)F(n)$$

ou

$$(10)\quad \sum_{r=1}^{n-1}(n-r+1)F(r)F(n-r)=(n-1)F(n).$$

Si l'on change, dans cette formule, r en $n-r$, on a aussi

$$(11)\quad \sum_{r=1}^{n-1}(r+1)F(r)F(n-r)=(n-1)F(n).$$

Digitized by Google

Des relations (10) et (11) on obtient encore, par addition,

$$\sum_{r=1}^{n-1} F(r)F(n-r) = \frac{2(n-1)}{n+2} F(n);$$

ou, en changeant n en $n-1$, et en ajoutant les deux termes qui correspondent à $r = o$ et à $r = n-1$,

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{n-1} F(r)F(n-r-1) = F(n),$$

relation qui est précisément celle de Segner.

La formule (III) montre que le second membre de la formule (IV) est égal à $-\frac{1}{2}R_{n+1}$; donc, en changeant n en $2n$,

$$(V) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{2n} \frac{P_r P_{2n-r}}{r+1} = -\frac{1}{2} R_{2n+1}.$$

Si l'on pose, dans cette égalité, $x = o$, les fonctions P_r dont l'indice est impair s'évanouissent; par conséquent elle se transforme en

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{P_{2r}(o) P_{2n-2r}(o)}{2r+1} = -\frac{1}{2} R_{2n+1}(o),$$

d'où résulte

$$(13) \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n} \frac{(r+1)(n-r+1)}{2r+1} F(r)F(n-r) = \frac{2^{4n+1}}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{F(n+1)}.$$

Si l'on change, dans la formule (V), $2n+1$ en $2n$, on trouve, par différentiation,

$$\sum_{r=0}^{2n-1} \frac{P_r P'_{2n-r-1} + P_{2n-r-1} P'_r}{r+1} = -\frac{1}{2} R'_{2n},$$

ou, pour $x = o$,

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{P_{2r}(o) P'_{2n-2r-1}(o)}{2r+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{P_{2n-2r}(o) P'_{2r-1}(o)}{2r} = -\frac{1}{2} R'_{2n}(o);$$

donc

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(r+1)(n-r)(n-r+1)}{2r+1} F(r)F(n-r) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} (r+1)(n-r+1)F(r)F(n-r) \right\} = -\frac{1}{2} R'_{2n}(o).$$

Digitized by Google

Pour trouver la valeur de la seconde somme, et dès lors aussi de la première, je fais usage de votre formule (F) (*Troisième Mémoire*, p. 9)

$$\sum_{r=0}^{n} P_r P_{n-r} = \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n-r)_r (2x)^{n-2r},$$

où N est égal à $\frac{1}{2}n$ ou à $\frac{1}{2}(n-1)$, suivant que n est pair ou impair. Si l'on change, dans cette formule, n en $2n$, on en conclut, pour $x = o$,

$$\sum_{r=0}^{n} P_{2r}(o) P_{2n-2r}(o) = (-1)^n,$$

ou

$$(14). \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n} (r+1)(n-r+1) F(r) F(n-r) = 4^n.$$

En substituant la valeur de cette somme dans l'expression de $-\frac{1}{2} R'_{2n}(o)$, on obtient, après quelques simples calculs,

$$(15) \quad \ldots \quad 1 + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(r+1)(n-r)(n-r+1)}{2r+1} F(r) F(n-r) = \frac{4^n}{n+1} \frac{1}{F(n)}.$$

La relation (14) donne encore naissance à une autre relation très symétrique.

Au moyen de l'égalité (10), on tire, de la relation (14),

$$\sum_{r=1}^{n-1} r(n-r+1) F(r) F(n-r) = 4^n - (3n+1) F(n);$$

en changeant n en $n-r$, on obtient, par addition,

$$(16) \quad \ldots \quad \sum_{r=1}^{n-1} r(n-r) F(r) F(n-r) = 4^n - (n+1) F(n+1).$$

Permettez-moi, Monsieur, de vous faire remarquer encore que les relations (10), (10*) et (14), dont les deux premières se déduisent aussi de votre formule (A) du *Troisième Mémoire* (p. 6), se transforment, au moyen de la seconde expression (I_c), respectivement, dans la relation (L) de votre

Digitized by Google

Note sur les fonctions X_n *de Legendre* et dans les relations (42), page 99, et (30), page 95, de votre Mémoire, inséré au tome IV du *Journal de Liouville*.

De même, la relation (13) peut être transformée dans une autre, découverte par vous; voici la transformation, qui n'est pas tout à fait évidente, comme les autres.

D'après la relation (II), on a

$$(n-r+1)\,F(n-r)=2(2n-2r-1)\,F(n-r-1);$$

par conséquent, la relation (13) prend la forme

$$2n\sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{2r+1}F(r)\,F(n-r-1)-\sum_{r=0}^{n-1}(r+1)F(r)\,F(n-r-1)$$

$$=\frac{2^{4n}}{(n+1)(n+2)\,F(n+1)}-\frac{(n+1)}{2(2n+1)}F(n).$$

Or, la deuxième somme devient, au moyen de la relation (11), égale à $(2n-1)\,F(n-1)$; donc

$$(13^*).\quad \sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{2r+1}F(r)\,F(n-r-1)=\frac{4^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)\,F(n)}+\frac{2n-1}{2n+1}\cdot F(n-1).$$

Vous voyez, Monsieur, que cette relation déduite de (13) est précisément votre relation (16) de la Note *Sur les nombres de Segner*, parce que votre nombre T_{n+1} est égal à $F(n-1)$.

On peut arriver aux relations (10), (12) et (14) aussi d'une autre manière qui fournit, d'ailleurs, les deux relations entre les $F(n)$, établies par Binet, une troisième découverte par vous, et enfin une quatrième, non encore donnée.

En effet, si l'on pose, dans l'expression qui définit les fonctions $P_n(x)$, savoir

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\alpha^n,$$

$x=0$ et $\alpha^2=-4u$, on obtient la formule connue

$$(VI).\quad \ldots\ldots\quad \frac{1}{\sqrt{1-4u}}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)F(r)u^r,$$

Digitized by Google

d'où l'on tire, en intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = n$, la formule

$$(\text{VII}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \sqrt{1 - 4u} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} F(r) u^{r+1},$$

découverte par Euler et Binet.

En multipliant les deux formules (VI) et (VII) et en égalant, dans les deux membres, les coefficients de u^{n+1}, on obtient la relation (10*); de même, en élevant ces formules au carré et en égalant, dans la première, les coefficients de u^n et, dans la seconde, les coefficients de u^{n+1}, on est conduit respectivement aux relations (14) et (12).

De plus, si l'on pose, dans la formule (VI), $u = v(1 - v)$, on a

$$\frac{1}{1 - 2v} = \sum_{r=0}^{\infty} (r + 1) F(r) v^r (1 - v)^r,$$

d'où résulte, en égalant les coefficients de v^n,

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n - r + 1)(n - r)_r F(n - r) = 2^n.$$

Enfin, si l'on opère d'une façon analogue sur la formule (VII), on trouve

$$\frac{1}{1 - v} = \sum_{r=0}^{\infty} F(r) v^r (1 - v)^r,$$

et, par conséquent, en égalant les coefficients de v^n,

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n - r)_r F(n - r) = 1.$$

Si l'on combine cette relation avec celle qui en provient par le changement de n en $n - 1$, on obtient, au moyen de l'identité,

$$m_r + m_{r-1} = (m + 1)_r,$$

la relation suivante, dans laquelle n doit être > 1,

$$(19_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n - r)_r F(n - r - 1) = 0,$$

Digitized by Google

et d'une façon analogue, on en déduit, pour $n > 3$,

$$(19_2). \quad \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n-r)_r F(n-r-2) = 0.$$

La même manière de procéder conduit, de proche en proche, à de nouvelles relations qui peuvent être résumées ainsi :

$$(19). \quad \sum_{r=0}^{N} (-1)^r (n-r)_r F(n-r-s) = 0, \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots N).$$

Les relations (18) et (19_1) sont dues à Binet [*Journal de Liouville*, t. IV, p. 86, formules (7) et (8)], et la relation (19_2) a été découverte par vous, Monsieur, et déduite de considérations très ingénieuses, appartenant à la géométrie [*l. c.*, p. 94, formule (A)].

Les deux relations (18) et (19) conduisent encore à quelques conséquences curieuses. Par exemple, si l'on détermine la valeur du premier membre de (19) pour $s = N + 1, \ldots n - 1$, on a un système de n équations linéaires pour $F(n)$, $F(n-1) \ldots F(1)$ et, par conséquent, leurs expressions au moyen de déterminants. Mais pour ne pas abuser de votre indulgence, je ne m'y arrête pas, et je vais terminer ma lettre, en vous communiquant encore quelques relations très simples, entre les carrés des nombres de Segner.

4. — Les deux relations, tout à fait analogues l'une à l'autre, entre les fonctions P_{m+1}, P_m, P_{m-1}; Q_{m+1}, Q_m, Q_{m-1}, entraînent immédiatement la relation

$$P_{m+1}Q_{m-1} - P_{m-1}Q_{m+1} = 2x\frac{2m+1}{m(m+1)},$$

qui prend aussi les deux formes

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = 2x\frac{2m+1}{m(m+1)Q_{m+1}Q_{m-1}},$$

$$\frac{Q_{m-1}}{P_{m-1}} - \frac{Q_{m+1}}{P_{m+1}} = 2x\frac{2m+1}{m(m+1)P_{m-1}P_{m+1}}.$$

Si l'on y remplace m, successivement, par $m - 1$, $m - 2$, ... et si l'on

Digitized by Google

ajoute les formules qui en proviennent ainsi, on déduit, de la première relation pour $m = 2n$, et de la seconde pour $m = 2n - 1$, les deux suites

$$\frac{1}{x}\left(\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_1}{Q_1}\right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{4r+1}{r(2r+1)Q_{2r+1}Q_{2r-1}},$$

$$\frac{P_{2n}Q_0 - Q_{2n}}{xP_{2n}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{4r-1}{r(2r-1)P_{2r}P_{2r-2}}.$$

Comme les premiers membres, pour $x = 0$, deviennent respectivement égaux à

$$\frac{P'_{2n+1}(0)}{Q_{2n+1}(0)} - \frac{P'_1(0)}{Q_1(0)}$$

et à

$$\frac{R'_{2n}(0)}{P_{2n}(0)},$$

on obtient, après quelques simples calculs,

$$(20) \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n} (4r+1)\left[\frac{(r+1)F(r)}{4^r}\right]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)F(n+1)}{2^{2n+1}}\right]^2,$$

$$(21) \quad \ldots \quad 1 + \sum_{r=1}^{n} (4r-1)\left[\frac{4^{r-1}}{r(2r-1)F(r-1)}\right]^2 = \left[\frac{4^n}{(n+1)F(n)}\right]^2.$$

D'une façon tout à fait analogue on tire, de la relation

$$P'_{m-1}Q'_{m+1} - P'_{m+1}Q'_{m-1} = \frac{2(2m+1)}{x^2-1}x,$$

les deux suites

$$\frac{P'_{2n}}{Q'_{2n}} - \frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{2x}{1-x^2}\sum_{r=2}^{n} \frac{4r-1}{Q'_{2r}Q'_{2r-2}}$$

$$\frac{Q'_{2n+1}}{P'_{2n+1}} - \frac{Q'_1}{P'_1} = \frac{2x}{x^2-1}\sum_{r=1}^{n} \frac{4r+1}{P'_{2r+1}P'_{2r-1}},$$

qui fournissent, pour $x = 0$, les relations

$$(22) \quad \ldots \quad \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)(2r+1)(4r+3)\left[\frac{F(r)}{4^r}\right]^2 = n(2n+1)\left[\frac{(n+1)F(n)}{2^{2n-1}}\right]^2,$$

$$(23) \quad \ldots \quad 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{4r+3}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{4^r}{(2r+1)F(r)}\right]^2 = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\left[\frac{4^n}{F(n)}\right]^2.$$

Digitized by Google

ADDITION. (*Septembre 1892.*)

Dans les égalités $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{R})$, les nombres de Segner sont exprimés par les fonctions sphériques et leurs premières dérivées; de la même manière ces nombres s'expriment par les dérivées supérieures des fonctions sphériques et par des intégrales définies, convenablement choisies. Ces expressions sont extrêmement simples et entraînent de nombreuses et nouvelles relations entre les nombres de Segner. Réciproquement, elles m'ont conduit, au moyen de vos importantes découvertes et de celles qui sont dues à M. Hermite, à simplifier quelques développements qui se présentent dans la théorie des fonctions sphériques, et à d'autres résultats dont je demande la permission de vous soumettre, prochainement, quelques-uns.

Digitized by Google

Digitized by Google

MONOGRAPHIE

DU

GENRE GALEOPSIS

PAR

JOHN BRIQUET

DOCTEUR ÈS SCIENCES NATURELLES, PRIVAT-DOCENT A L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE,
SOUS-CONSERVATEUR DE L'HERBIER DELESSERT.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 9 janvier 1892.)

TOME LII.

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

Il nous semble inutile de revenir ici sur les principes qui nous guident dans nos recherches d'histoire naturelle comparée, appliquées à la classification des plantes; nous les avons exposés en détail dans un ouvrage récent [1], auquel nous nous bornons à renvoyer le lecteur.

Nous avons été amené à faire une étude un peu approfondie d'un genre de Labiées, parce que l'anatomie et la morphologie comparées des différentes composantes de ce grand groupe ne peuvent faire de progrès réels, selon nous, que si l'on connaît bien l'origine et la signification des divers systèmes histologiques dont on poursuit les variations. Cette base anatomique et morphologique a fait défaut jusqu'ici.

Le travail de Kirchhoff [2], pour ne pas parler de celui de Mirbel [3], est trop ancien et contient trop d'erreurs pour permettre une orientation même générale.

L'excellente étude de M. Born [4] ne remplit pas notre desideratum, car elle ne s'occupe que d'anatomie comparée et n'aborde qu'incidemment les questions d'histogénie et d'histologie spéciales. Nous avons donc entrepris

[1] Briquet, *Les Labiées des Alpes maritimes*, 1re partie, pp. I-XVIII (dans Émile Burnat, *Matériaux pour servir à l'histoire de la flore des Alpes maritimes*). — Georg, éditeur, Genève et Bâle, 1891.

[2] A. Kirchhoff, *De Labiatarum organis vegetativis*. Bonn, 1861.

[3] Mirbel, *Mémoire sur l'anatomie et la physiologie des plantes de la famille des Labiées* (Ann. du Mus. d'hist. nat., t. XV, 1810, pp. 213-262).

[4] A. Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc. Berlin, 1886.

Digitized by Google

de nous donner à nous-même la base désirée pour nos études ultérieures, en faisant une ou deux monographies de genre détaillées. Ces monographies nous permettront, nous l'espérons du moins, de comprendre à fond la structure et la physiologie spéciales des Labiées; après quoi, nous pourrons entamer d'une manière fructueuse le travail de comparaison.

Notre but a été, non seulement de bien connaître les tissus en tant que formant des systèmes à fonctions physiologiques déterminées, mais de rechercher les homologies qui permettent de rapporter à des unités morphologiques des éléments rendus différents par l'adaptation à des fonctions variées. Nous avons voulu connaître aussi la genèse de plusieurs tissus qui était encore obscure pour nous. Enfin, pour éviter en anatomie comparée les erreurs qui proviennent de ce que l'on rapproche les mêmes organes à des stades différents de développement, il était nécessaire d'avoir poursuivi une fois les variations de structure des différents membres avec leur âge.

Pour ce qui est de l'appareil floral, nos études sur les Labiées des Alpes maritimes et la rédaction d'un article général sur la famille pour les « Natürliche Pflanzenfamilien » de MM. Engler et Prantl nous ont convaincu que les données que l'on possède à son sujet sont, sauf pour quelques groupes, assez superficielles. Il importait donc de commencer à édifier solidement la morphologie comparée de cet appareil qui est décidément beaucoup moins connu qu'on ne le pense généralement.

Le choix du genre *Galeopsis* nous a été suggéré par la structure remarquable de l'appareil végétatif chez quelques espèces, ainsi que par la conformation et l'évolution si curieuses des organes floraux.

Quelque spéciales qu'aient été nos recherches, nous croyons que cette monographie — dont l'achèvement a nécessité des mois d'un travail acharné et presque incessant — ne sera pas sans intérêt au point de vue de la botanique générale. Ainsi, les résultats que nous avons acquis sur les homologies du péricambium radical et des formations squelettaires extra-

Digitized by Google

libériennes des organes aériens, sont importants pour l'anatomie générale des Phanérogames, où cette question est encore très discutée. D'autre part, notre chapitre sur la physiologie des renflements moteurs peut passer pour une petite contribution à l'étude des courbures géo- et héliotropiques. Nous avons du reste cherché à faciliter l'orientation du lecteur dans la quantité des détails inhérents aux monographies, en faisant précéder notre travail d'une table des matières un peu détaillée.

Enfin, nous rappelons que ce livre ayant été achevé en octobre 1891, nous n'avons pas pu profiter pour sa rédaction des travaux publiés depuis lors, et qui, de près ou de loin, ont trait aux matières qui y sont étudiées. Nous avons cependant, lorsque cela était indispensable, ajouté sous forme de notes les renseignements désirables à cet égard.

* * *

Le mémoire que nous avons l'honneur de présenter à l'Académie, et dont nous avons publié un petit résumé comme thèse [1], avait été remis à la Faculté des sciences de l'Université de Genève pour obtenir le doctorat en sciences naturelles. Nous terminions donc nos études par la publication de ce résumé; aussi éprouvons-nous le besoin d'exprimer ici notre reconnaissance envers tous nos maitres, ainsi qu'envers les nombreux botanistes qui ont mis des matériaux à notre disposition pour ce travail [2].

[1] Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis, présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève pour obtenir le grade de docteur ès sciences naturelles.* Genève, 1891.

[2] Ce sont MM. Arvet-Touvet (Gières), Autran (Genève), Ayasse (Genève), Barbey (Valeyres), Barla (Nice), Beyer (Berlin), Burnat (Nant près Vevey), Callier (Breslau), Chenevard (Genève), Crépin (Bruxelles), A. de Candolle (Genève), Engler (Berlin), Gibelli (Turin), Gillot (Autun), Haussknecht (Weimar), Hariot (Paris), Henriquez (Coïmbra), Jäggi (Zürich), Käser (Zürich), Müller Arg. (Genève), Penzig (Gènes), Perrier de la Bâthie (Albertville).

Digitized by Google

Nous mentionnerons tout spécialement, à Genève, M. le Dr Müller, ancien professeur à l'Université, dont nous avons jadis pu suivre les savantes leçons de systématique, et M. Alph. de Candolle qui, avec une amabilité sans bornes, nous a toujours accordé libre accès à sa belle bibliothèque et à ses herbiers classiques.

M. le professeur Schwendener, directeur de l'Institut botanique de l'Université de Berlin, ainsi que M. le Dr Westermaier, alors premier assistant de cet établissement, ont consenti à diriger nos premiers pas dans l'étude de la structure intime et de la vie des végétaux. Nous n'oublierons jamais la patience et la bonté inépuisables dont ils ont usé à notre égard.

Depuis que nous poursuivons activement à Genève nos études sur les Labiées, le travail nous a été souvent facilité par l'obligeance avec laquelle M. le professeur Thury, directeur du laboratoire d'anatomie et de physiologie végétales de l'Université, a mis à notre disposition ses excellents instruments, et par M. le professeur Chodat auquel nous devons des réactifs ainsi que plusieurs des liquides plasmolyseurs titrés dont nous avons fait usage dans nos recherches sur les renflements moteurs.

Genève, octobre 1891.
Laboratoire d'anatomie et de physiologie végétales
de l'Université.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Structure et biologie des appareils végétatif et floral.

Pages.

INTRODUCTION 1-IV

HISTORIQUE 1

Étude de la germination, de la racine et de l'hypocotyle 14

CHAP. I. — *Germination et apparence extérieure de la racine* 14

Description de la germination, p. 14. — Apparence de la plantule après la chute du péricarpe, p. 15. — Résumé de l'évolution de la plantule, p. 15. — Apparence extérieure des racines, p. 15.

CHAP. II. — *Structure primaire de la racine.* 16

Structure du système libéro-ligneux dans la racine terminale, p. 15. — Structure du système libéro-ligneux dans les racines latérales, p. 17. — Péricambium et endoderme, p. 17. — Écorce et assise pilifère, p. 18.

CHAP. III. — *Histogénie de la racine.* 18

Dermocalyptrogène, son fonctionnement, p. 18. — Développement et structure de la coiffe, p. 18. — Massif central, impossibilité de distinguer un plérome et un périblème en tant qu'histogènes spéciaux, p. 20. — Distribution de l'amidon au point végétatif, p. 21. — Formation des îlots et des couronnes de procambium, p. 22.

CHAP. IV. — *Structure secondaire de la racine.* 23

Formation des arcs générateurs intralibériens et extraligneux, p. 23. — Structure de la racine après la formation d'un anneau cambial continu, p. 23. — Principales réactions des tissus à ce stade de développement, p. 24. — Structure de la racine à la fin de la période de végétation, p. 25. — Principales réactions des tissus à ce stade de développement, p. 26.

Digitized by Google

Pages.

CHAP. V. — *Passage primaire de la racine à la tige, ou structure primaire de l'hypocotyle* 27

Changement de derme, p. 27. — Structure interne de l'hypocotyle au niveau du changement de derme, p. 27. — Cloisonnement du tissu conjonctif situé entre la lame vasculaire et les deux masses libériennes, p. 28. — Fractionnement de la lame vasculaire en deux masses et du liber en quatre îlots, p. 28. — Formation de quatre masses ligneuses, torsion de chaque masse de 135° autour des trachées initiales, p. 29. — Différences que présentent les observations de l'auteur avec celles antérieures de M. Gérard, p. 30.

CHAP. VI. — *Passage secondaire de la racine à la tige, ou structure secondaire de l'hypocotyle* 30

Apparition de la moelle dans le cylindre ligneux central de l'hypocotyle, p. 31. Fractionnement du péricambium, p. 31. — Figures de transition offertes par la moelle, entre son apparition et sa forme caulinaire, p. 31. — Formation de huit faisceaux libéro-ligneux, p. 33. — Structure de la région nodale comparée à celle de l'hypocotyle, p. 33. — Comparaison du passage primaire et du passage secondaire de la racine à la tige, p. 33.

Étude de la tige 34

CHAP. VII. — *Apparence extérieure de la tige* 34

Développement des bourgeons cotylédonaires, p. 34. — Taille de la tige, p. 34. — Indument et coloration de la tige, p. 35. — Dimorphisme des rameaux caulinaires; observations sur l'opinion de Wydler à ce sujet, p. 35. — Rameaux sériés des *Tetrahit*, p. 36.

CHAP. VIII. — *Structure et histogénie de la jeune tige dans le sous-genre* TETRAHIT. 36

Structure de l'entrenœud épicotylé, p. 36. — Principales réactions des tissus à ce niveau, p. 37. — Sortie des faisceaux épicotylés dans le nœud épicotylé, p. 38. — Structure du deuxième entrenœud épicotylé, p. 38. — Structure des troisième, quatrième et cinquième entrenœuds épicotylés, p. 38. — Structure de la tige sous le point végétatif, p. 38. — Genèse et structure des poils sétacés, p. 40. — Course des faisceaux libéro-ligneux et discussion des opinions de Nägeli et Kirchhoff à ce sujet, p. 42.

CHAP. IX — *Structure et histogénie de la jeune tige dans le sous-genre* LADANUM. 45

Structure de l'entrenœud épicotylé, p. 45. — Origine péricyclique des arcs interfasciculaires, p. 46. — Variations de structure dans les nœuds et entrenœuds supérieurs, p. 46.

Digitized by Google

Pages.

CHAP. X. — *Structure des entrenœuds dans la tige adulte du sous-genre* TETRAHIT. 47

Étude de l'entrenœud *n* situé immédiatement au-dessous des derniers verticillastres fleuris, p. 47. — Étude des entrenœuds (*n* — 1... 3), p. 48. — Étude des entrenœuds (*n* — 6...7), p. 50. — Étude de l'entrenœud épicotylé, p. 51. — Principales réactions des tissus étudiés, p. 52. — Structure intime des éléments constitutifs du liber, p. 52. — Étude des éléments extralibériens et intraphloeotermiques, p. 54. — Structure intime des éléments constitutifs du bois, p. 55.

CHAP. XI. — *Structure de la tige adulte dans le sous-genre* LADANUM 57

Structure de l'entrenœud *n* situé immédiatement au-dessous des derniers verticillastres fleuris, p. 57. — Variations de structure dans les entrenœuds sous-jacents, p. 58. — Structure de la région nodale, p. 58. — Brides collenchymateuses reliant les bases des pétioles dans les nœuds; opinions de Mirbel et Kirchhoff à leur sujet, p. 58. — Variations de structure dans les différentes formes du sous-genre *Ladanum*, p. 59. — Singulière distribution du tissu assimilateur dans l'écorce du sous-genre *Ladanum*, p. 60.

CHAP. XII. — *Structure et développement des renflements moteurs* 60

Apparence extérieure des renflements moteurs, p. 60. — Structure de l'épiderme, p. 62. — Structure du collenchyme angulaire, p. 62. — Structure du collenchyme cortical proprement dit, p. 63. — Structure de la région phloeotermique, p. 65. — Structure du collenchyme péricyclique, p. 65. — Structure du liber, p. 66. — Structure du bois, p. 67. — Structure et fonctions du parenchyme intervasculaire et intraxylaire; examen des opinions de MM. Raimann et Dennert à son sujet, p. 69. — Structure de la moelle, p. 71. — Distribution topographique générale du système libéroligneux, p. 71. — Passage de la structure du renflement à la structure internodale, p. 71. — Passage de la structure du renflement à la structure nodale, p. 71. — Genèse des renflements moteurs, p. 71. — Principales réactions des tissus du renflement, p. 72.

CHAP. XIII. — *Physiologie des renflements moteurs* 73

Fonctions générales géotropiques et héliotropiques des renflements moteurs, p. 73. — Preuves expérimentales de ces fonctions, p. 73. — La courbure des renflements s'opère par un allongement sur le côté qui devient convexe, p. 74. — La croissance du côté convexe s'opère dans le collenchyme, p. 75. — La turgescence, condition mécanique de la croissance, p. 76. — Absence de turgescence dans le collenchyme, p. 77. — La force P qui produit la croissance du collenchyme cortical réside dans la moelle turgescente, p. 77. — Évaluation approximative en atmosphères de la force P par la méthode plasmolytique, p. 78. — Le coefficient endosmotique est à peu près le

Digitized by Google

Pages.

même dans tous les éléments médullaires, p. 80. — Sous l'action des forces excitatrices, la résistance diminue sur le côté qui devient convexe et celui-ci s'allonge, p. 81. — Conditions mécaniques dans lesquelles la courbure s'opère, p 81. — Changements physiques qui se produisent dans les membranes pendant qu'elles s'allongent, p. 81. — Structure intime et mécanisme de la croissance des membranes, p. 82. — Effets physiques sur les membranes résultant de la suspension de la force P, p. 87. — Vérification expérimentale des théories précédentes par la méthode des renflements gradués, p. 89. — Vérification expérimentale des théories précédentes par la méthode des angles d'érection, p. 89. — Marche générale des expériences avec ces deux méthodes, p. 90. — Application de la méthode des renflements gradués, p. 91. — Application de la méthode des angles d'érection, p. 92. — Objections faites aux expériences précédentes par M. Noll; théorie de cet auteur sur les effets de la suspension de la force P, et observations sur cette théorie, p. 93. — Contradiction entre la façon de voir de M. Noll et celle de l'auteur, p. 95. — Vérification des expériences rectificatives faites par M. Noll, p. 95. — Résolution des objections de M. Noll et observations critiques sur sa théorie, p. 97. — Observations sur quelques points ultérieurs du mécanisme de la croissance, p. 99. — Ce qu'il faut penser de quelques autres explications des mouvements tropiques (théorie des pressions hydrostatiques inégales, théorie de M. Wortmann), p. 101. — Résultats négatifs de l'auteur en ce qui concerne les causes immédiates des variations dans le coefficient de résistance sur le côté convexe, p. 101. — Relations générales entre la structure des renflements et leurs fonctions motrices, et utilité de ces fonctions pour la plante, p. 102. — Opinion de MM. Kohl et C. Müller sur les fonctions du collenchyme, p. 103. — Expériences contraires à l'opinion de ces deux auteurs, p. 104. — Fonctions secondaires de la moelle du renflement, p. 105.

Étude de la feuille 108

CHAP. XIV. — *Apparence extérieure de la feuille* 108

Forme générale des feuilles, p. 108. — Indument des feuilles, p. 108. — Serrature foliaire, p. 108. — Nervation des feuilles, p. 108.

CHAP. XV. — *Structure des cotylédons* 109

Structure de l'épiderme et du mésophylle, p. 109. — Structure des nervures, p. 110.

CHAP. XVI. — *Structure du pétiole* 110

Course des faisceaux dans le pétiole, p. 111. — Structure des éléments d'origine épidermique et corticale, p. 111. — Structure des faisceaux des cornes, p. 112. — Structure des faisceaux médians, p. 112. — Variations de structure du pétiole avec l'âge, p. 113.

Digitized by Google

Pages.

CHAP. XVII. — *Histogénie et structure de la feuille* 113

Passage de la feuille par les stades mamelonnaires et écailleux, p. 113. — Structure de la feuille au stade écailleux, p. 114. - Structure de la feuille dans un jeune bourgeon, p. 114. — Structure de la feuille adulte, p. 115. — Variations de structure avec le milieu, p. 117. — Structure du trichome foliaire, p. 117. — Dispositions variables des éléments épidermiques, p. 117. — Disposition et structure intime des stomates, p. 117. — Épithème foliaire et stomates aquifères, p. 120.

CHAP. XVIII. — *Tératologie de la feuille* 120

Analyse d'une chorise apicale de la feuille chez le *G. dubia*, p. 120. — Interprétation de cette monstruosité, p. 121.

Étude de l'appareil floral 121

CHAP. XIX. — *Tectonique de l'appareil floral* 121

Position des fleurs sur les axes, p. 121. — Tectonique des verticillastres, p. 122. — Bractéoles florales, p. 122. — Schéma général de la disposition des organes appendiculaires sur les axes, p. 122. — Organogénie générale de la fleur, p. 123. — Diagramme floral du genre *Galeopsis*, p. 124.

CHAP. XX. — *Structure du calice* 125

Forme extérieure du calice, p. 125. — Nervation du calice, p. 125. — Structure de l'épiderme calicinal, p. 126. — Structure des nervures calicinales, p. 127. — Structure du limbe, p. 128. — Principales réactions des tissus calicinaux, p. 128. — Structure des dents calicinales dans leur partie basilaire, p. 128. — Structure des dents calicinales dans leur partie aristée, p. 129.

CHAP. XXI. — *Structure de la corolle* 129

Morphologie du tube, p. 129. — Morphologie de la gorge, p. 130. — Morphologie du labre, p. 131. — Morphologie du labiole, p. 131. — Course des faisceaux libéro-ligneux dans la corolle des *Ladanum*, p. 132. — Course des faisceaux libéro-ligneux dans la corolle des *Tetrahit*, p. 134. — Structure histologique de la corolle, p. 134.

CHAP. XXII. — *Structure de l'androcée* 135

Structure histologique des étamines, p. 135. — Morphologie du filet et du connectif, p. 135. — Structure des loges anthériennes, p. 135. — Morphologie du pollen, p. 136. — Organogénie de l'androcée jusqu'à la première courbure des filets, p. 137. — Torsion apicale des filets, p. 138. — Causes de cette torsion, p 140. — Deuxième courbure des filets, p. 140. — Examen critique des idées de Schnizlein sur les courbures et les torsions dans l'androcée des *Galeopsis*, p. 141. — Réfutation expérimentale de la théorie de Peyritsch sur la zygomorphie, p. 142.

Digitized by Google

Pages.

CHAP. XXIII. — *Structure du gynécée* 142

Morphologie et histologie du style, p. 142 — Morphologie des ovaires, des nucules et du nectaire, p. 143. — Évolution, morphologie et histologie de l'ovule, p. 144. — Histologie du torus, p. 146. — Anatomie grossière d'un nucule, p. 147. — Histologie des cotylédons de l'albumen, p. 148. — Histologie de l'épicarpe, p. 149. — Histologie du leptocarpe, p. 151. — Histologie et fonctions du sclérocarpe, p. 152. — Histologie et fonctions de l'endocarpe, p. 154. — Histogénie du péricarpe, p. 155.

CHAP. XXIV. — *Biologie de la fleur* 156

Autopollination et pollination croisée, p. 156. — Fonctions de la tache labiolaire ou nectarosème, p. 157. — Fonctions des apophyses labiolaires, de la gorge et du tube corollaires, p. 157. — Mécanisme de la chute du pollen; fonctions des utricules, opercules et poils vecteurs des anthères, p. 157. — Examen de quelques dispositions accessoires jouant un rôle dans les relations entre les fleurs et les insectes, p. 158. — Observations sur quelques points obscurs dans la biologie florale des *Galeopsis* (cleistogamie, gynodioecie), p. 160.

CHAP. XXV. — *Tératologie de l'appareil floral* 161

Considérations générales sur les faits tératologiques observés, p. 161. — Étude analytique détaillée de vingt-sept monstruosités particulièrement intéressantes, p. 163.

CHAP. XXVI. — *Conclusions* 186

Possibilité d'établir des systèmes histologiques basés sur la structure et la fonction, p. 187. — Arguments pour et contre l'emploi de cette méthode, p. 187. — Synthèse de la morphologie et de la physiologie telle que la comprend l'auteur, p. 188. — Revue générale des régions morphologiques dans l'appareil végétatif des *Galeopsis*, p. 189. — Épiderme des organes aériens; régions homologues dans la racine, p. 189. — Écorce; régions homologues dans les trois membres, p. 189. — Cylindre central; régions homologues; discussion détaillée de la théorie du péricycle, p. 189. — Exposé des systèmes tectoniques et fonctionnels qui constituent les appareils végétatif et floral des *Galeopsis*, p. 193. — Système dermique, p. 193. — Système absorpteur, p. 194. — Système assimilateur, p. 194. — Système conducteur, p. 194. — Système aérifère, p. 195. — Système squelettaire, p. 196. — Système dynamique des renflements moteurs, 197. — Système excrétoire, p. 197. — Système oxalifère, p. 197. — Système histogénique, p. 197. — Système sexuel, p. 198. — Système embryogénique, p. 198. - Système conjonctif, p. 198.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

Systématique.

Pages.

CHAP. XXVII. — *Bibliographie systématique du genre* GALEOPSIS 199

CHAP. XXVIII. — *Collections mises en œuvre pour l'étude de la systématique du genre* GALEOPSIS 219

CHAP. XXIX. — *Systématique synthétique* 222

Justification et relations respectives des deux sous-genres *Ladanum* et *Tetrahit*, p. 223. — Parenté et phylogénie probable du genre *Galeopsis*, p. 223. — Espèces et subdivisions d'espèces; valeur systématique des formes, leur constance, leurs propriétés physiologiques, p. 225. — Justification systématique du *G. Reuteri*, p. 228. — Subdivision du *G. Ladanum* en deux sous-espèces *angustifolia* et *intermedia*, p. 228. — Étude détaillée des relations systématiques et de la distribution géographique des composantes du subsp. *angustifolia*, p. 228. — Conclusions de cette étude, justifiant la réunion des subsp. *angustifolia* et *intermedia* en un seul groupe spécifique, p. 230. — Distribution géographique et constitution systématique du subsp. *intermedia*, p. 231. — Constitution systématique et distribution géographique du *G. dubia*, p. 232. — Hybrides entre les *G. Ladanum* et *dubia*, p. 232. — Constitution systématique et aire du *G. pyrenaïca*, p. 232. — Constitution systématique et aire du *G. pubescens*, p. 233. — Hybrides entre les *G. pubescens* et *Tetrahit*, p. 233. — Constitution systématique du *G. speciosa*; aire actuelle et aire ancienne de cette espèce et de ses subdivisions, p. 233. — Subdivision du *G. Tetrahit* en deux sous-espèces, p. 236. — Étude détaillée des relations systématiques et de la distribution géographique des différentes composantes du subsp. *genuina*, p. 236. — Aire géographique et valeur systématique du subsp. *bifida*, p. 237. — Examen des idées de Griesselich sur les différenciations homologues dans les sous-genres *Ladanum* et *Tetrahit*; variations parallèles dans les différentes espèces, p. 237.

CHAP. XXX. — *Systématique analytique*. 240

Classification, nomenclature, synonymie, descriptions et aires géographiques détaillées des différentes composantes du genre *Galeopsis*.

Digitized by Google

Pages.

CHAP. XXXI. — *Tabulae synopticae ad species varietatesques determinandas.* . . 305

CHAP. XXXII. — *Galeopses exsiccatae nobis notae ad monographiam nostram determinatae.* 309

CHAP XXXIII. — *Index nominum in cap. « Systématique analytique » titulato provenientium* 316

ERRATA 321

Digitized by Google

MONOGRAPHIE

DU

GENRE GALEOPSIS.

PREMIÈRE PARTIE.

Structure et biologie des appareils végétatif et floral.

HISTORIQUE.

La présence de gonflements caractéristiques sous les articulations de la tige chez certains *Galeopsis* est un fait si saillant, qu'il a été remarqué depuis fort longtemps. Sans en rechercher la signification, les anciens auteurs en ont souvent fait mention. Linné s'en servit comme caractère distinctif dans ses descriptions, mais sans entrer dans aucun détail au sujet de ces organes [1]; il en a été de même pour tous les classificateurs qui vinrent après lui.

En 1840, A. de Saint-Hilaire [2] signale le fait qu'à la fin de l'été, le *G. Ladanum* n'a plus que des feuilles inclinées vers le sol, ce qui, pour lui,

[1] Linné, *Species plantarum*, éd. 1 (1753), p. 579.
[2] A. de Saint-Hilaire, *Morphologie végétale* (1840), p. 180.

Digitized by Google

est dû à la sécheresse, car un peu d'eau suffit pour rendre à ces feuilles leur position horizontale. Cette observation, sans portée du reste, est exacte.

L'année suivante, Vaucher [1] observe que les *Galeopsis* fleurissent jusque dans l'arrière-saison, et que c'est le *G. Ladanum* qui disparaît le premier. Le *G. Tetrahit* pousse de ses nœuds inférieurs des racines qui servent à fixer plus solidement la plante sur le sol. Toutes les parties du *G. Ladanum* seraient recouvertes de glandes blanchâtres, que l'on aperçoit à peine chez le *G. Tetrahit;* il est probable que Vaucher a pris là des poils pour des glandes, car ces dernières n'existent jamais en pareille abondance. Enfin, d'après Vaucher, *les nœuds renflés du* G. Tetrahit *seraient destinés à faciliter la flexion de la tige et des rameaux en différents sens.*

En 1856, Thilo Irmisch [2] signale chez les *Galeopsis* la présence de cotylédons obcordés ou munis de deux denticules à la base. Il remarque le développement nul ou très précaire des bourgeons axillaires des cotylédons. Irmisch donne quelques indications sur l'hypocotyle du *G. Tetrahit;* il ressemblerait beaucoup plus à l'épicotyle que ce n'est, en général, le cas chez les autres Labiées; sa coupe transversale est carrée et contient quatre faisceaux libéro-ligneux isolés; plus bas, ces quatre faisceaux se rapprochent et l'hypocotyle s'arrondit.

En 1861, Wydler étudie avec soin la morphologie externe de l'appareil végétatif des *Galeopsis* du groupe *Tetrahit* [3]. L'hypocotyle est glabre, tandis que les axes épicotylés sont hérissés. Les feuilles caulinaires produisent à leur aisselle 2-3 rameaux sériés, dont le développement est basipétal. Suivant Wydler, il y aurait une différence marquée dans le développement des feuilles et des rameaux d'un même nœud, les organes étant plus favorisés sur un des côtés du plan de symétrie du nœud que sur l'autre, ce qui permet de distinguer un bourgeon α d'un bourgeon β. Nous verrons que ce phénomène n'a aucune espèce de constance. Wydler répète les observations de Vaucher concernant la formation de racines adventives; il constate leur

1 Vaucher, *Histoire physiologique des plantes d'Europe,* t. III (1841), pp. 649-650.

2 Thilo Irmisch, *Beiträge zur vergleichenden Morphologie der Pflanzen,* 2me mémoire (*Labiatae*), p. 76. Halle, 1856.

3 Wydler, *Kleinere Beiträge zur Kenntniss einheimischer Gewächse. Labiatae.* (Berner Mittheilungen, 1861, pp. 150-303.)

Digitized by Google

disposition en touffes ou en quatre séries plus ou moins distinctes. Wydler signale le fait que *la moelle reste fraîche dans les gonflements de la tige du G. Tetrahit.* Il considère ces gonflements comme des articulations renflées, situés au-dessous du point d'insertion des feuilles. Cette interprétation morphologique est erronée, car elle confond des renflements avec des nœuds; l'anatomie tout entière de cette région de la tige est en contradiction avec cette théorie; ce que Vaucher a dit de ces gonflements est beaucoup plus exact.

La même année, Kirchhoff [1] nous donne les premiers renseignements sur la structure histologique des *Galeopsis*. Dans la tige du *G. Tetrahit,* il ne se développe pendant longtemps que des trachées, plus tard seulement des vaisseaux scalariformes, et enfin des vaisseaux ponctués. Nous ferons remarquer que nous n'avons encore vu de vaisseaux scalariformes, dans le sens ordinaire de ce mot, « Treppengefässe », chez aucune Labiée; il y a probablement eu là dans la mémoire de l'auteur quelque confusion avec l'anatomie d'autres plantes, des fougères par exemple. Kirchhoff donne ensuite une description vague et en grande partie inexacte du passage de la tige à la racine. Dans le *G. Tetrahit,* la tige passe à la racine sans interposition d'un rhizome; la moelle et les trachées ne disparaissent pas d'un seul coup, mais s'éteignent insensiblement dans la racine. Les trachées traversent peut être même toute la racine, quoique réduites au nombre de 4; ces 4 trachées seraient la dernière indication des 4 faisceaux angulaires de la tige. Kirchhoff croit avoir vu, à l'extrémité de quelques racines, d'étroites cellules spiralées très contractées, et il considère comme très probable que ces cellules sont en communication avec les vaisseaux de la tige. Malgré cela, il pense qu'en général le cylindre ligneux, qui à lui seul constitue presque le corps de la racine, ne contient que des vaisseaux ponctués. Kirchhoff signale des stomates sur les deux faces de la feuille chez les *G. ochroleuca* (*dubia*) et *Tetrahit.* Il remarque que, sur la feuille du premier, les poils sont 1-2 cellulaires, tandis que sur la tige ils sont 2-3 cellulaires. Chez le *G. ochroleuca* (*dubia*), on trouverait des glandes purpurines, rendues concaves par une dépression à leur surface supérieure, portées par un « stylus » tri- ou quadricellulaire.

[1] A. Kirchhoff, *De Labiatarum organis vegetativis commentarium anatomico-morphologicum.* Bonn, 1861.

Digitized by Google

L'auteur croit que ce sont ces glandes qui sécrètent les huiles éthérées des Labiées. Il voit une preuve de son dire dans le *G. Tetrahit*, qui n'a pas d'odeur aromatique et se trouve par conséquent être dépourvu de glandes. Il est exact qu'en général la fonction de la production des huiles est dévolue au système glanduleux, et que ces huiles sont aromatiques; mais il y a de nombreuses exceptions. C'est ainsi qu'un examen attentif du *G. Tetrahit*, surtout pendant le jeune âge, y fait découvrir une quantité de glandes [1]. — Enfin, les feuilles des *Galeopsis* servent à Kirchhoff à donner une explication originale des causes directes de la transformation des feuilles en bractées et en bractéoles. C'est vers le milieu de la tige, dit-il, à égale distance des feuilles initiales et des bractéoles, que les organes appendiculaires prennent la forme la plus élégante. C'est là que le pétiole atteint son maximum de longueur, que le réseau des nervures est le plus gracieux, que la serrature marginale est la plus robuste. C'est pourquoi la plante, ayant atteint à ce point-là cette période moyenne de sa vie, dans laquelle toutes ses forces sont employées à édifier l'appareil végétatif, commence à réduire progressivement ses feuilles pour utiliser autrement ses matériaux. Toutefois, la métamorphose régressive de ces feuilles s'opère de façon qu'elles imitent le plus possible les sépales. Et, en effet, la taille du limbe, le nombre des nervures et des dents diminuent; le pétiole, ou plutôt sa partie vaginale, s'élargit; il en résulte finalement une « forma triangularis, cujus duo latera aequalia, tertium impar pedunculo insidet ». C'est de cette façon que le passage de la forme des feuilles à celle des sépales paraît s'opérer, car les cinq dents du calice ne diffèrent que peu ou point des bractées, tandis que l'on peut comparer le tube du calice à des bractées qui seraient connées ensemble à la base.

Dans ses études sur les organes de sécrétion, Martinet [2] a signalé des glandes quadricellulaires à pédicelle court chez le *G. Ladanum;* chez le *G. pyrenaïca,* le nombre des cellules formant la glande, portée sur un long pédicelle, atteint seize.

[1] On trouve dans certains cas, chez les Labiées, des gouttelettes d'huile éthérée dans le parenchyme assimilateur palissadique des feuilles, par exemple chez le *Mentha viridis,* ainsi que l'a déjà indiqué M. Arthur Meyer.

[2] Martinet, *Organes de sécrétion des végétaux,* p. 63, fig. 81, et p. 69, fig. 149. (Ann. sc. nat., 5me série, t. XIV, 1872.)

Digitized by Google

En 1875, Delbrouck [1] décrit la structure et la genèse des poils sétacés de la tige du groupe *Tetrahit*. Ces poils peuvent atteindre 2 millimètres de longueur, et se composent de 3-4 cellules. Ils débutent par le cloisonnement tangentiel d'une papille épidermique primitive. Puis, tandis que la cellule fille supérieure continue à subir des divisions transversales et forme le poil, la cellule fille inférieure subit une série de cloisonnements verticaux, portant successivement le nombre des cellules dérivées à 2 et 5; après quoi les divisions se font sans règle déterminée. Ces cellules se voûtent et finissent par entourer la base du poil qui paraît enfoncé dans un coussinet en entonnoir. Quoique l'auteur range ces poils parmi ses « Dermatogenstacheln », on trouve, suivant lui, quelquefois des divisions tangentielles dans l'assise corticale hypodermique, observation que nous pouvons confirmer et qui déprécie singulièrement l'appellation donnée à ces poils par Delbrouck. L'auteur dit enfin que les *G. ochroleuca* (*dubia*) et *Ladanum* ont des poils construits sur le même modèle « ganz nach demselben Typus » que ceux du *G. Tetrahit*. Mais ces espèces étant dépourvues de poils sétacés à coussinet en entonnoir, il est probable que cette indication erronée provient de l'examen de plantes mal déterminées. (*G. speciosa* pour *G. dubia*, *G. pubescens* au lieu de *G. Ladanum?*)

L'année 1880 nous amène d'importantes observations sur le fonctionnement des renflements moteurs, dues à M. Hugo de Vries [2]. Après avoir constaté que les flexions géotropiques s'exécutaient dans la région du renflement, qui joue ainsi le rôle de charnière, le savant physiologiste recherche directement la part qui revient à la croissance et celle qui revient à la turgescence dans le mouvement d'érection, d'après sa méthode plasmolytique. Nous reviendrons plus tard sur les procédés de l'auteur; mentionnons seulement que la lecture de l'angle d'érection à l'état plasmolysé s'opérait au bout

[1] Delbrouck, *Die Pflanzenstacheln*, pp. 30-31 (dans Hanstein's botanische Abhandlungen aus dem Gebiete der Morphologie und Physiologie, t. II, 4tes Heft, 1875).

[2] H. de Vries, *Ueber die Aufrichtung gelagerten Getreides* (dans H. Thiel's Landwirthschaftliche Jahrbücher, t. IX, 1880, pp. 498-499). — Nous n'avons pas pu nous procurer cet ouvrage, mais M. le professeur de Vries a eu l'obligeance de nous faire un extrait manuscrit de ses expériences relatives aux *Galeopsis*. Nous profitons de l'occasion pour lui adresser à ce sujet nos vifs remerciements.

Digitized by Google

d'un séjour de vingt-cinq heures dans une solution de chlorure de sodium à 20 %. Si l'on appelle T l'angle d'érection à l'état turgescent, P l'angle d'érection à l'état plasmolysé, et que l'on cherche leur rapport, on trouvera que T > P d'une manière constante, ainsi que cela ressort des chiffres suivants, résultant de trois expériences :

N° de l'exemplaire.	T	P	Différence.
I.	47°	42°	5°
II.	34°	30°	4°
III.	42°	37°	5°

D'où l'auteur conclut que la *turgescence aussi bien que la croissance participe aux flexions géotropiques des renflements moteurs* (Gelenkpolster).

Dès l'année suivante, M. Rützon reprend l'étude des renflements moteurs des *Galeopsis*, cette fois-ci surtout au point de vue histologique [1]. M. Rützon décrit à grands traits la distribution topographique des éléments histologiques dans un entre-nœud *n* et dans un renflement moteur du *G. Tetrahit*. Il fait ressortir l'absence de fibres libériennes et l'énorme développement du collenchyme dans le renflement, et rattache avec raison cette particularité aux fonctions d'érection des renflements qui exigent un squelette périphérique flexible et susceptible d'allongement. L'auteur signale des méats aérifères dans le collenchyme cortical, mais il ne décrit pas en détail le collenchyme extralibérien et ne fait pas mention des stéréides isolées qu'il contient. Il insiste aussi, au point de vue mécanique, sur la présence d'une quantité d'eau dans les tissus, et surtout dans la moelle : cette eau diminuerait la solidité du renflement. L'auteur remarque encore que les courbures accentuées des tiges se produisent, chez le *G. Tetrahit*, sur les renflements, tandis que, chez les plantes dépourvues de ces organes, les tiges se relèvent et se recourbent sur toute leur longueur. On se demande pourquoi, à la suite d'observations aussi concluantes et qui sont exactes, M. Rützon présente, à la fin de son travail, la fonction d'érection géotropique des renflements comme une simple présomption.

Pendant que M. Rützon décrivait les renflements moteurs du *G. Tetrahit*,

[1] Sophus Rützon, *Om Axeknuder* (Botanisk Tidskrift, t. XII, pp. 248-264, avec quatre planches, 1881). Nous nous en tenons pour ce travail au résumé français qui l'accompagne.

Digitized by Google

M. Gérard [1] étudiait le passage de la racine à la tige chez le *G. Ladanum*. La racine possède une lame vasculaire bipolaire, dont les vaisseaux se touchent au centre. Dès le changement d'épiderme, *les trachées primitives seraient repoussées vers l'intérieur*. Puis, la couche protectrice perd ses stigmates et acquiert des granules amylacés; *le péricambium disparaitrait en face des faisceaux libériens*. Les faisceaux vasculaires s'isolent, le conjonctif pénètre dans leurs éléments et les disjoint. Plus haut, les faisceaux libériens se coupent en deux masses qui vont se superposer aux faisceaux vasculaires. Les faisceaux gardent leur orientation sécantielle jusqu'au haut de l'hypocotyle. Cette description est si différente de nos observations sur plusieurs points essentiels (projection subite des trachées initiales vers le centre dès le changement d'épiderme, disparition du péricambium en face des faisceaux libériens), que nous nous demandons si, sous le nom de *G. Ladanum*, M. Gérard n'a pas étudié quelque plantule appartenant à un groupe différent [2]. M. Gérard s'élève contre l'idée courante, que le cambium dans la tigelle se forme aux dépens du péricambium; pour lui, il prend naissance dans les assises sous-jacentes, et le péricambium perd dans la tige (ou l'hypocotyle) la faculté de produire du cambium. M. Gérard croit ce fait général et estime qu'il est nécessaire de reprendre à nouveau l'étude de la genèse du cambium de la tige hors des faisceaux procambiaux. M. Morot a combattu depuis lors cette manière de voir, en donnant des exemples positifs à l'appui de la théorie combattue par M. Gérard [3]. Nous reviendrons plus tard sur ce débat.

En 1883, M. Volkens [4] signale l'émission de l'eau liquide par les dents

[1] R. Gérard, *Passage de la racine à la tige.* (Ann. sc. nat., 6me série, t. XI, 1881, pp. 380-382.)

[2] On ne saurait assez insister sur les erreurs multiples qui peuvent provenir de l'étude de plantules dont on ne connait pas l'origine d'une façon absolument certaine. Nous avons pris la précaution de laisser pousser quelques exemplaires de nos plantules, afin de les déterminer. Il s'est trouvé, entre autres, qu'un magnifique semis de *Galeopsis sulfurea* nous a donné de beaux pieds d'*Elsholzia cristata* (!). Il est presque impossible, d'ailleurs, d'éviter absolument des confusions de ce genre dans un jardin botanique.

[3] Morot, *Recherches sur le péricycle.* (Ann. sc. nat., 6me série, t. XX, pp. 266-267, 1885.)

[4] Volkens, *Über Wasserausscheidung in liquider Form aus den Blättern höherer Pflanzen.* (Jahrbuch des königl. bot. Gartens zu Berlin, t. II, 1883, p. 204.)

Digitized by Google

des feuilles chez les *G. Tetrahit* et *pubescens*. Chez le *G. pubescens*, la structure de l'extrémité des dents est comme chez le *Glechoma hederacca*, c'est-à-dire qu'au sommet de la dent on trouve un bourrelet clair, dans lequel aboutissent trois nervures. Ce bourrelet possède environ dix stomates aquifères, à contours arrondis, plus petits que les stomates aérifères. Les nervures sont accompagnées, à leurs extrémités, d'un parenchyme incolore.

M. Vesque [1] a incidemment attiré l'attention sur quelques particularités des *Galeopsis*. Les poils à la page inférieure des feuilles du *G. Tetrahit* se réduisent à une large cellule basilaire, surmontée d'une cellule conique beaucoup plus longue. Dans certaines formes du *G. Tetrahit*, les feuilles sont très minces, et le mésophylle ne compte que trois assises de cellules montrant à peine une faible différenciation de palissades : il s'agit là sans doute du *G. pubescens*.

Dans un mémoire sur l'indument des Labiées, Scrophularinées et Solanées, M. Hoch [2] a donné quelques détails sur les poils des *G. Tetrahit, bifida* et *ochroleuca* (*dubia*). L'auteur insiste sur la forme variable des trichomes dans le tube de la corolle; à part cela, ses observations sont très superficielles : M. Hoch n'a pas même vu le coussinet pluricellulaire qui entoure la base des poils sétacés des *Tetrahit*.

Dans son *Anatomie comparée des Labiées et des Scrophularinées*, M. Born dit bien avoir étudié la tige des *Galeopsis* [3], mais il ne donne aucun détail sur sa structure.

En 1888, M. Schmidt [4] a donné une description de l'appareil indumentaire des *G. ochroleuca* (*dubia*), *pyrenaïca, bifida* et *Tetrahit*. Cette description ne contient rien de nouveau; elle n'entre dans aucun détail sur la genèse des éléments, ne tient compte d'aucun travail antérieur, et offre beaucoup

[1] Vesque, *Caractères des principales familles gamopétales tirés de l'anatomie comparée de la feuille*. (Ann. sc. nat., 7me série, t. I, 1885.)

[2] Hoch, *Vergleichende Untersuchungen über die Behaarung der Labiaten, Scrophularineen und Solaneen*, pp. 21-22. Freiburg, 1886.

[3] Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., p. 34. Berlin, 1886.

[4] C. Schmidt, *Vergleichende Untersuchungen über die Behaarung der Labiaten und Borragineen*, pp. 30-32. Rybnik, 1888.

Digitized by Google

moins d'intérêt que celle de M. Delbrouck. De même que ce dernier auteur, M. Schmidt n'a pas vu les perles cuticulaires des poils sétacés du groupe *Tetrahit*. Il ne donne pas d'explication sur la signification du coussinet en entonnoir de ces poils et se borne à constater cette formation sous le nom de « Zellgürtel ».

Enfin, tout récemment, M. Schimper [1] a signalé une particularité physiologique chez le *G. ochroleuca* (*dubia*), particularité sur laquelle nous avons négligé de faire des observations. Tandis que le chlorure de sodium agit d'ordinaire activement sur les tissus des feuilles, en augmentant l'épaisseur du mésophylle et spécialement de la zone palissadique, les pieds de notre *Galeopsis* accuseraient, au contraire, sur les plages maritimes, une diminution dans l'épaisseur de leurs feuilles.

*
* *

De même que les renflements moteurs, les apophyses corollaires et la disposition des loges anthériennes des *Galeopsis* ont, dès longtemps, attiré l'attention des systématistes qui s'en sont servis pour caractériser le genre, sans que jamais ils aient étudié ces organes d'un peu près. En effet, depuis les débuts de la botanique systématique jusque dans les flores parues cette année même, on décrit les anthères des *Galeopsis* comme s'ouvrant par une fente transversale. Cette anomalie serait extraordinaire dans une famille aussi homogène que les Labiées; elle ne repose, comme nous le verrons, que sur une observation superficielle.

Sprengel est le premier qui ait examiné la fleur des *Galeopsis* au point de vue fonctionnel [2]. Pour lui, le nectaire est formé par le torrus, qui est blanc, tandis que les ovaires sont verts. Le réservoir du nectar est formé par la partie lisse la plus inférieure du tube de la corolle, qui est protégée par des poils érigés. Enfin, la tache jaune placée sur le lobe moyen du lobe corollaire constitue un appareil d'attrait (*Saftmal*) pour les insectes. Sprengel

[1] Schimper, *Die indo-malayische Strandflora*, p. 21. Iena, 1891. (Botanische Mittheilungen aus den Tropen, III.)

[2] Sprengel, *Das entdeckte Geheimniss der Natur*, p. 307. Berlin, 1793.

Digitized by Google

est arrivé à ces judicieuses propositions après l'étude des *G. Tetrahit* et *cannabina* (*speciosa*).

En 1810, Mirbel remarque [1] que dans le *G. Ladanum*, la position des 4 étamines alternant avec les 4 lobes inférieurs de la corolle est obscure. Cette observation provient probablement d'une analyse imparfaite, car la position de ces organes est toujours régulière et dépourvue d'ambiguïté. — Ici, Mirbel fait une remarque d'une importance capitale, dont aucun auteur subséquent n'a tenu compte : *Les loges anthériennes sont placées l'une au-dessus de l'autre, mais au lieu d'être attachées verticalement, elles le sont horizontalement.* — La conséquence de ce fait, c'est que les anthères s'ouvrent par une fente *longitudinale*, qui n'a l'apparence d'être *transversale* que grâce à la position *horizontale* des loges. Mirbel ne s'explique pas sur la cause de cette position singulière des loges; il en donne une bonne figure (pl. XVIII, fig. 1 et 2).

En 1814, Schultes signale la présence de fleurs terminales pélorisées, « präsentiertellerförmig », chez le *G. Tetrahit* [2].

En 1827, A.-P. de Candolle décrit chez certains pieds de *Galeopsis* une fleur terminale complexe, qui serait un produit de synanthie [3]. Nous reviendrons plus tard sur cette indication.

H. de Mohl, dans ses recherches sur le pollen [4], a aussi examiné celui du *G. Tetrahit*, qu'il décrit comme étant ellipsoïde avec trois plis longitudinaux.

Vaucher reprend, en 1841, l'étude de la fleur des *Galeopsis* [5]. Il désigne les deux branches du style comme « stigmatifères ». Il insiste sur la présence des deux apophyses corollaires qui sont dues, selon lui, au mode d'accroissement et d'estivation de la corolle. Les nucules seraient recouvertes d'un enduit « tuberculo-résineux » (!) qui les préserverait de l'humidité. L'esti-

[1] Mirbel, *Mémoire sur l'anatomie et la physiologie des plantes de la famille des Labiées.* (Ann. du Mus. d'hist. nat., t. XV, 1810, pp. 231 et 236.)

[2] Schultes, *Oesterreich's Flora*, t. II, p. 153 (1814).

[3] A. P. de Candolle, *Organographie végétale*, t. I, p. 529 (1827).

[4] 1834, traduit dans les *Ann. des sc. nat.*, 2me série, t. III, p. 319, sous le titre : *Sur la structure et les formes des grains de pollen*, par le Dr H. de Mohl.

[5] Vaucher, *Histoire physiologique des plantes d'Europe*, t. III, pp. 647-649 (1841).

Digitized by Google

vation est quinconciale, le style et les étamines sont recourbés en avant pendant la préfloraison; le style est également enroulé en spirale à sa base, il est fixé entre les étamines à la hauteur de la libération de ces dernières, d'une façon immobile. Puis vient une bonne description des loges anthériennes, qui seraient *d'abord disposées parallèlement l'une à côté de l'autre, puis verticalement l'une au-dessus de l'autre.* On le voit, Vaucher donne implicitement, dans ces quelques mots, l'explication (torsion) du phénomène indiqué par Mirbel; il s'en tient malheureusement là, et, après ces dernières bonnes observations, il se lance dans un exposé plein d'inexactitudes. Dans le *G. Tetrahit,* les anthères seraient glauques, tandis qu'elles seraient brunâtres dans le *G. Ladanum;* le connectif, qui serait un « renflement peut-être glanduleux », ne lui a pas paru chargé de « granules sphériques et blanchâtres ». Les branches du stigmate se recourberaient pour recevoir les « émanations du pollen ». Le nectaire se prolonge postérieurement en forme de lame, et donne une « humeur miellée » qui remplit la fossette nectarifère placée au fond du tube de la corolle et est protégée par des poils. Les calices des *Galeopsis* n'auraient pas de nervures (!!). Ayant trouvé une fleur terminale à pélorisation tétramère, Vaucher la considère sans aucune explication comme le type premier dont dérive la fleur des *Galeopsis.*

La même année, Fincke signale aussi une pélorie terminale chez le *G. Tetrahit* [1].

En 1846, de Mélicocq décrit une fleur de *G. Ladanum,* observée dans le Pas-de-Calais [2], qui offrait une singulière monstruosité, probablement pélorique (?). La fleur en question avait un labre identique au labiole, portant comme lui des taches jaunes. La corolle était presque régulière.

En 1850, Schnizlein donne enfin une description exacte des phénomènes qui se passent dans l'androcée avant l'anthèse, et qui avaient été esquissés par Mirbel et Vaucher [3]. Schnizlein s'élève d'abord contre l'emploi du mot *valvule* pour désigner le couvercle velu des sacs anthériens; il fait observer

[1] Fincke, *Uebersicht der Arb. und Veränd. der schles. Gesellsch. im Jahre 1841,* p. 49. — Cité d'après Peyritsch, *Ueber Pelorien bei Labiaten,* I, pp. 15-18. (Sitzungsber. der k. k. Akad. der Wiss. in Wien, t. LX, 1869.)

[2] De Mélicocq, *Monstruosités végétales.* (Ann. sc. nat., 3me série, t. V, 1846, p. 64.)

[3] Schnizlein, *Morphologische Miscellen.* (Bot. Zeitung, t. VIII, 1850, pp. 749-751.)

Digitized by Google

avec raison que ce terme s'applique déjà à une formation différente (valvules anthériennes des Laurinées, Berbéridées, etc.). La position primitive des anthères est verticale, les deux loges étant droites et parallèles. Puis, les filets se courbent en avant. La courbure achevée, ils prennent de la consistance; seule, la partie apicale reste différenciée et tendre. C'est sur cette partie tendre que s'effectue une torsion de 90°, au moyen de laquelle les loges, d'abord verticales, prennent une position horizontale. On trouverait des faits analogues, suivant Schnizlein, chez les *Betonica* et les *Stachys*. D'après notre expérience, il n'en est rien, et le genre *Galeopsis* tranche nettement sur ses voisins par cette singulière évolution. Nous ne comprenons pas comment il se fait que les indications de Mirbel, Vaucher et Schnizlein aient pu passer aussi complètement inaperçues que cela a été le cas jusqu'ici, aucun auteur ne s'étant douté du véritable état des choses. Il est regrettable que Schnizlein n'ait pas séparé la courbure de la torsion dans sa description : c'est là un point sur lequel nous reviendrons. Le travail de l'auteur allemand est accompagné de bonnes figures (fig. 10, 11, 12, 13, etc.).

Metsch en 1852 [1], Weck en 1854 [2] et Buchenau en 1857 [3] signalent de nouveau des pélories terminales tétra- et pentamères dans le genre *Galeopsis* (*G. Ladanum*, *G. speciosa*, etc.).

Dans ses recherches sur l'amidon, Nägeli [4] n'attribue point d'amidon aux graines du *G. Tetrahit*; elles contiendraient, en revanche, beaucoup d'huile accompagnée de protoplasma.

En 1869, Severin Axell [5] démontre expérimentalement que le *G. speciosa* se reproduit tout seul, d'une façon normale, quand on défend son accès aux insectes.

H. Müller, dans ses études sur les rapports des fleurs et des insectes, a

[1] Metsch, *Darstellung einiger selteneren, besonders in der Grafschaft Henneberg einheimischen Pflanzenarten.* (Bot. Zeitg., t. X, 1852, p. 282.)

[2] Weck, *Beiträge zur Pflanzenpathologie.* (Verhandl. des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westphalen's, t. XI, 1854, pp. 351-357.)

[3] Buchenau, *Einige Blüthenabnormitäten.* (Flora, t. XL, 1857, p. 291.)

[4] Nägeli, *Die Stärkekörner*, pp. 553-554 (dans Nägeli und Cramer's Pflanzenphysiologische Untersuchungen, t. II. Zürich, 1858).

[5] Severin Axell, *Om anordnigarna för fanerogama växternas befruktning.* Stockholm, 1869.

Digitized by Google

examiné avec soin la fleur des *Galeopsis* [1]. Il reprend les détails esquissés par Sprengel et Vaucher, mais n'ajoute pas grand'chose aux connaissances acquises. Les apophyses corollaires servent, suivant Müller, à diriger la tête de l'insecte qui cherche à faire pénétrer sa trompe dans le tube de la corolle. Müller ne dit rien des fonctions des différentes parties de l'anthère (poils vecteurs, opercules, utricules, etc.). L'autopollination constatée par Axell s'opère par la flexion du style en avant et le passage de ce dernier entre les étamines; en exécutant ce mouvement, il couvre sa surface de pollen. Müller a étudié les *G. Tetrahit, versicolor* (*speciosa*) et *ochroleuca* (*dubia*). Les insectes visiteurs sont surtout des Apides et des Syrphides (Diptères).

Étudiant des formes hybrides entre les *G. Ladanum* et *dubia*, Godron fut amené à examiner la biologie florale de cette dernière espèce [2]. Pendant la journée les fleurs sont visitées par les bourdons et au crépuscule par le *Macroglossa stellatarum* L. La branche antérieure du style, plus longue que l'autre, se courbe en avant et paraît seule recevoir le pollen; elle est admirablement disposée pour être frottée par la partie supérieure de la tête des insectes qui s'introduisent dans la fleur.

En 1881 [3] et 1882 [4], H. Müller a donné de nouveaux détails sur les insectes visiteurs des *Galeopsis*, desquels il ressort que ces plantes, au moins dans leurs formes grandiflores, sont presque exclusivement et partout recherchées par des Apides (*Bombus*); seul, dans les Alpes, le *G. Ladanum* est visité par des formes très différentes d'Apides, de Rhopalocères (Lépidoptères) et de Sphingides (Lépidoptères).

Dans ses recherches sur l'hybridité et la gynodioecie des Menthes [5], M. Moewes a cru pouvoir indiquer chez le *G. Tetrahit* des transitions vers le gynodimorphisme. La fleur femelle est de moitié plus petite que la fleur

[1] H. Müller, *Die Befruchtung der Blumen durch Insekten*, pp. 313-315. Leipzig, 1873.

[2] Godron, *Notice sur les explorations botaniques faites en Lorraine*, p. 79. (Mémoires de l'Académie de Stanislas, 1874.)

[3] H. Müller, *Weitere Beobachtungen über Befruchtung der Blumen durch Insekten.* (Verhandl. des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westphalen's, t. XXIX, 1882.)

[4] Ibidem, *Alpenblumen, ihre Befruchtung durch Insekten*, etc. Leipzig, 1881, p. 312.

[5] F. Moewes, *Ueber Bastarde von Mentha arvensis und Mentha aquatica, sowie die sexuellen Eigenschaften hybrider und gynodiöcischer Pflangen*, p. 19. Leipzig, 1883.

Digitized by Google

hermaphrodite, les étamines sont très raccourcies et à anthères rudimentaires, le labre corollaire est très petit. M. Moewes aurait trouvé sur un pied portant 29 fleurs : 22 hermaphrodites, 1 femelle et 5 de transition.

Dans le travail déjà cité de M. Hoch [1], nous trouvons une description des différentes catégories de poils que l'on rencontre dans le tube corollaire des *Galeopsis :* ce sont des papilles ou des poils uni- pluricellulaires vermiformes, qui ont une cellule basilaire plus grosse que les autres dans le *G. ochroleuca* (*dubia*). Les organes génitaux seraient glabres (!).

M. Schmidt [2] a brièvement décrit, en 1888, les poils vecteurs des opercules anthériens : ce sont des poils unicellulaires, cylindriques, coniques, couverts de verrues. En réalité, comme nous le verrons, ce ne sont là qu'en partie des verrues (perles cuticulaires), mais surtout des plissements de la cuticule.

En 1890, enfin, M. Meigen a signalé à nouveau deux cas de pélorie chez le *G. Tetrahit* [3].

Étude de la germination, de la racine et de l'hypocotyle.

CHAPITRE I.

GERMINATION ET APPARENCE EXTÉRIEURE DE LA RACINE.

Tous les *Galeopsis* germent de la même manière. Si l'on place, par exemple, une nucule du *G. pyrenaïca* dans une terre tamisée et humide, et qu'on la maintient à une température constante d'environ 15° C., on obtiendra, au bout de peu de jours, une germination rapide. La radicule de

[1] Hoch, *Vergleichende Untersuchungen über die Behaarung der Labiaten, Scrophularineen und Solaneen*, pp. 21-22. Freiburg, 1886.

[2] C. Schmidt, *Vergleichende Untersuchungen über die Behaarung der Labiaten und Borragineen*, pp. 30-32. Rybnik, 1888.

[3] F. Meigen, *Ueber zwei Pelorien von Galeopsis Tetrahit* L. (Deutsche bot. Monatsschrift VIII, 1890, p. 158.)

Digitized by Google

l'embryon est tournée vers le hile apparent, — vers le bas, par conséquent; — elle s'allonge donc en faisant sauter le péricarpe à la base de la nucule. On voit d'abord pointer au dehors un corps conique et blanchâtre, qui, dès le début, se montre accompagné de poils hyalins : c'est la racine naissante. Elle s'allonge rapidement par accroissement intercalaire, atteint la longueur de la nucule, puis la dépasse, en s'enfonçant perpendiculairement dans le sol. Ce n'est qu'au bout d'un certain temps, et alors que la racine est déjà assez longue, que l'hypocotyle commence à se développer; on le reconnaît à son calibre plus considérable que celui de la racine, dont il est séparé par un très léger renflement. Tant que l'hypocotyle est sous terre, il reste blanc; seule sa partie supérieure est jaunâtre. Son accroissement est deux fois plus lent que celui de la racine; peu à peu cependant, il pointe à la surface du sol, coiffé du péricarpe qui le tient étroitement pincé entre ses deux lèvres. Il commence alors à verdir et les cotylédons à se développer. Ces derniers ont beaucoup de peine à se débarrasser du péricarpe, que l'on voit quelquefois encore accroché à un cotylédon, alors que l'épicotyle est en plein développement.

Au moment où le péricarpe est tombé des cotylédons et où ceux-ci ont atteint leur forme définitive, la plantule a, en général, l'apparence suivante : L'hypocotyle est d'un rose brun. Les cotylédons sont d'un beau vert; ils sont pétiolulés, arrondis au sommet, auriculés et munis à la base, à droite et à gauche du pétiole, d'un petit denticule; ils mesurent alors environ 4×3 millimètres de surface et ne gagnent que peu en dimensions dans la suite. Du collet au bout de la racine, il y a à ce moment une longueur de 4 centimètres; c'est le quintuple ou le sextuple de la longueur de l'hypocotyle. Sous le sommet de la racine, on distingue une courte région pilifère, à poils petits.

On voit que l'évolution de la plantule des *Galeopsis* commence par être hypogée, les cotylédons fonctionnant alors comme magasins de réserve, pour devenir ensuite épigée, les cotylédons prenant les fonctions assimilatrices de la feuille aérienne. Ce processus est commun à l'immense majorité des Labiées.

Plus tard, la racine produit des radicelles insérées en files longitudinales,

Digitized by Google

au nombre de 2-5, sans qu'il y ait dans cette disposition une constance absolue. Avec le temps, la multiplication de nombreuses radicelles de tous ordres donne lieu à la formation d'un système complexe de racines, dans lequel on reconnait toujours aisément l'axe primaire à sa taille.

Les racines des *Galeopsis* sont annuelles.

CHAPITRE II.

STRUCTURE PRIMAIRE DE LA RACINE.

Dans la racine terminale, qui pendant l'état primaire est toujours très grêle, la symétrie du système libéro-ligneux est diarche. Nous avons donc au centre de la racine, sur une coupe transversale, une lame vasculaire bipolaire. Les trachées initiales sont petites et placées à chaque pôle au nombre de 1-3 ; les vaisseaux centripètes sont primitivement disposés sur un seul rang et se touchent au centre presque toujours. Il est assez rare de voir la lame scindée en deux en son milieu par la paroi mitoyenne de deux cellules du parenchyme fondamental. A droite et à gauche de la lame vasculaire se trouvent deux groupes libériens, séparés du ligneux par une ou deux assises de tissu conjonctif (fig. 1).

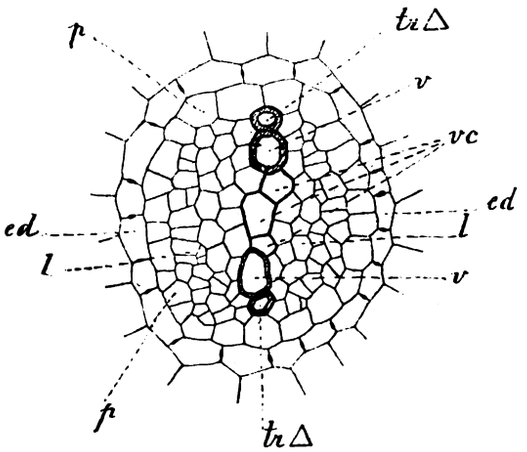


FIG. 1.
Section transversale du cylindre central dans une jeune racine terminale du *G. Tetrahit*. — *ed*, endoderme ; *p*, péricambium ; *l*, liber ; *tr* Δ, trachées initiales ; *vc*, lame vasculaire en voie de sclérification.

Digitized by Google

Dans les racines latérales, par contre — qui, pendant leur structure primaire, ont un calibre plus fort que la racine terminale — une symétrie d'un ordre supérieur est fréquente, les racines pentarches ou hexarches étant les plus communes. Dans ce cas (fig. 2), le parenchyme fondamental

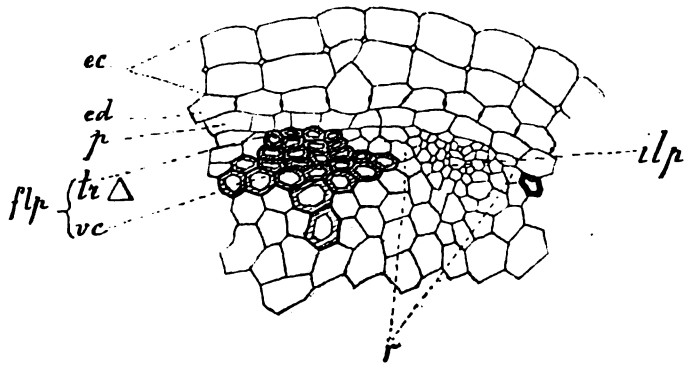


FIG. 2.

Section transversale d'une racine latérale primaire à la limite du cylindre central, chez le *G. Tetrahit*. — *ec*, parenchyme cortical; *ed*, endoderme; *p*, péricambium; *flp*, faisceau ligneux primaire comprenant des trachées initiales *tr* Δ et un groupe vasculaire centripète *vc*; *r*, rayon médullaire; *ilp*, îlot libérien primaire.

prend un développement médullaire, et les groupes ligneux et libériens ne font qu'en occuper la périphérie. Les faisceaux ligneux offrent dans leur plus grande largeur, sur une section transversale, 3-7 vaisseaux; les derniers vaisseaux centripètes sont sur un seul rang, le calibre de leurs lumens équivaut au double, au triple ou au quadruple de celui des initiaux; ces derniers sont, au contraire, le plus souvent au nombre de 2-4, les uns à côté des autres. Les faisceaux ligneux sont séparés des faisceaux libériens par une ou deux assises de parenchyme incolore, qui représentent des rayons médullaires. Les cellules de ces rayons médullaires sont sensiblement plus petites que celles du parenchyme central, mais plus grosses que les tubes criblés des faisceaux libériens. Ceux-ci, avec du cambiforme et des cellules compagnes, forment des cordons plus grêles que les faisceaux ligneux. Les faisceaux ligneux et libériens s'appuient contre un péricambium bien caractérisé et continu; nous n'avons jamais constaté de cas dans lequel les vaisseaux initiaux des faisceaux ligneux s'appuyassent directement contre l'endoderme. L'endoderme offre des membranes dépourvues de toute espèce d'épaississement, mais subérisées, au moins en grande partie, et montre sur

Digitized by Google

ses parois radiales les plissements caractéristiques qui produisent les points de Caspary.

En dehors de l'endoderme, l'écorce se continue sous forme de gros éléments polyédriques, plus petits dans le voisinage de l'endoderme et de l'assise pilifère. Les poils absorbants unicellulaires de l'assise pilifère sont d'une longueur assez variable avec la nature et l'âge des échantillons; leur structure n'offre absolument rien de spécial.

CHAPITRE III.

HISTOGÉNIE DE LA RACINE.

Si l'on poursuit les trois manchons (assise pilifère, écorce, cylindre central) jusqu'à l'extrémité des racines, on pourra encore les reconnaître au point végétatif, mais plus ou moins différenciés (fig. 3).

La région périphérique est toujours la plus aisée à distinguer. En effet, en suivant l'assise pilifère sur une bonne coupe longitudinale médiane, on la voit, sous le sommet, se diviser en plusieurs couches qui sont emboîtées les unes dans les autres et entourent le sommet de la racine. La rangée extérieure primitive, maintenant devenue le plus interne des arcs emboîtés, est formée d'éléments de plus en plus minces à mesure qu'on se rapproche du sommet. C'est elle qui est le siège d'une division active, qui produit d'une part l'assise pilifère, d'autre part la coiffe; on peut donc, d'une manière justifiée, l'appeler un dermocalyptrogène [1]. Normalement, pour produire la coiffe, une cellule du dermocalyptrogène se divise par une première cloison tangentielle; l'élément externe appartiendra à la coiffe, l'élément interne appartient à l'assise génératrice. Puis, tandis que cette dernière recommence à former des cloisons tangentielles, puis radiales, l'élément externe est

[1] Eriksson, *Ueber das Urmeristem der Dicotylen*. (Pringsheim's Jahrbücher, t. XI, 1878.) — Ce terme a surtout de la valeur au point de vue des homologies, le dermocalyptrogène étant l'équivalent du protoderme des organes aériens. Mais au point de vue histologique et physiologique, l'assise pilifère étant loin d'être identique avec l'épiderme, la dénomination peut être critiquée.

Digitized by Google

refoulé au dehors et ne subit guère qu'un faible cloisonnement vertical. Mais il se manifeste souvent dans ce processus des irrégularités notables, qui ont pour effet de déranger l'ordre géométrique dans lequel sont emboîtés les cônes cellulaires de la coiffe. Dans la coupe que nous figurons, par exemple (fig. 3), on constatera que la troisième assise de droite se divise en *a*, un peu au-dessous du sommet, par une cloison oblique pour donner à partir de là deux couches au lieu d'une. D'autres petites irrégularités du même genre, que nous avons constatées, nous font croire que la division des cellules dans le dermocalyptrogène ne suit pas une loi absolument fixe.

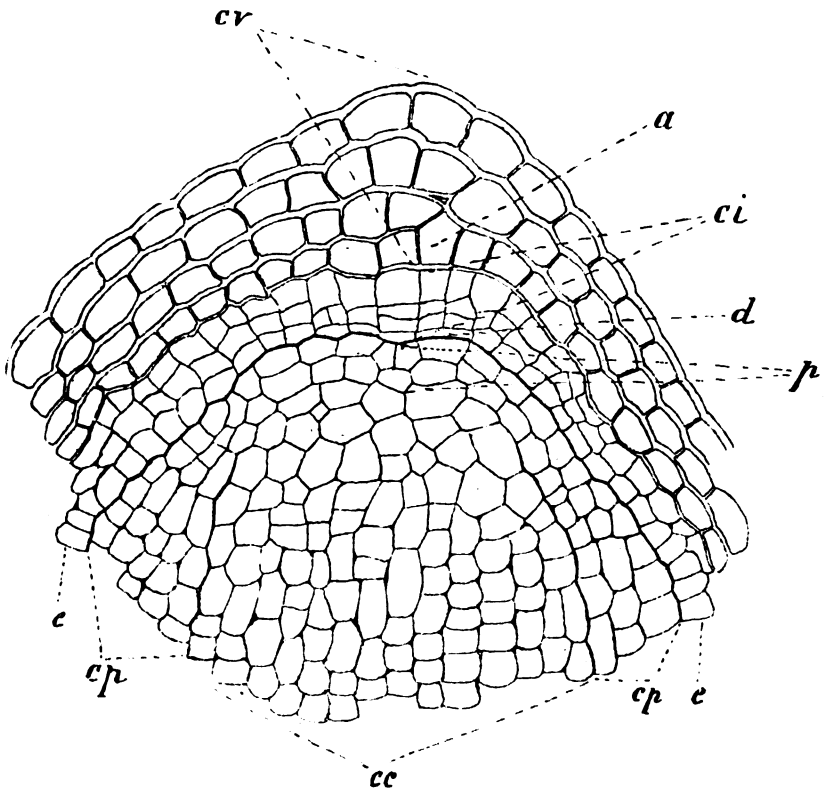


FIG. 3.

Section longitudinale du point végétatif d'une racine chez le *G. Tetrahit*. — *d*, dermocalyptrogène; *ct*, assises calyptrales initiales; *vc*, assises calyptrales âgées; *e*, assise pilifère; *p*, histogène du cylindre central et de l'écorce; *cp*, parenchyme cortical; *cc*, cylindre central.

Au fur et à mesure donc que de nouvelles couches se produisent à l'intérieur de la coiffe, celles qui existaient déjà sont repoussées à l'extérieur. En

Digitized by Google

même temps que s'accomplit ce travail, la structure des cellules s'altère sensiblement. Leur lumen devient d'abord plus considérable; il se produit ensuite un épaississement inégal des parois. Les parois radiales ne s'épaississent que très peu, tandis que les parois tangentielles atteignent une épaisseur notable. On distingue dans ces parois une stratification plus ou moins nette; elles sont formées par de la cellulose ordinaire, se colorant lentement par le chloroiodure de zinc; elles ne montrent pas trace de cutinisation et se dissolvent rapidement dans l'acide sulfurique; en outre, elles ont un éclat blanc et ne se laissent pas facilement étirer. Toutes ces propriétés rappellent beaucoup celles du collenchyme; c'est évidemment à cette transformation des cellules calyptrales que la coiffe doit ses qualités protectrices. Au bout d'un certain temps, la première assise de la coiffe, usée à l'extrémité, se détériore et tombe.

Le plasma des cellules calyptrales est très granuleux; il possède, outre un noyau et des granules de matières protéiques, diverses substances en suspension; il contient surtout de l'amidon en grande abondance, sous la forme de grains figurés ordinaires. Lorsqu'on traite les éléments par la teinture d'iode, on voit les grains trancher nettement par leur coloration violette sur les amas de substances protéiques (colorées en jaune), puis finalement prendre une teinte brune foncée, qui donne à la coiffe entière, examinée à un faible grossissement, une coloration noire.

La présence de cette quantité d'amidon dans une coiffe destinée sans cesse à disparaître peut paraître énigmatique. Nous croyons cependant qu'elle a une signification au point de vue de l'édification de la coiffe. En effet, l'assise extérieure, dans les cas que nous avons examinés, ne décelait que très peu d'amidon, tandis que l'abondance de celui-ci allait en augmentant vers le centre à partir de l'assise immédiatement sous-jacente. Il semble rationnel, dans ces conditions, d'admettre qu'au moins une partie de cet amidon est employée à l'épaississement des parois des cônes calyptraux, l'amidon se trouvant épuisé, ou presque épuisé, dans l'assise la plus extérieure où l'épaississement est achevé.

Il ne nous paraît pas possible de distinguer, au point végétatif, un périblème et un plérome en tant qu'histogènes distincts. Ce n'est qu'au-dessous

Digitized by Google

du point végétatif que l'on peut distinguer les deux régions indiquées; et si l'on poursuit jusque dans le point végétatif la ligne de séparation de l'écorce et du cylindre central, ce qui peut fort bien se faire, on suivra une ligne très brisée, qui ne délimite pas deux régions tranchées, comme devraient l'être deux histogènes particuliers. On reconnaît là simplement un méristème compacte, commun à l'écorce et au cylindre central.

Nous n'entendons cependant pas préjuger par là la question controversée de l'existence d'une ou plusieurs cellules terminales [1]. Il n'est pas impossible que des éléments de ce genre fonctionnent à des stades très peu avancés, pour se résoudre plus tard dans le méristème homogène que nous avons constaté.

Dans les racines que nous avons examinées, l'écorce était très riche en amidon, tandis que le cylindre central n'en contenait presque pas; chose singulière, le point végétatif, traité par la teinture d'iode, nous a montré cette zone à amidon se continuant dans les deux assises cellulaires externes du sommet, de telle sorte que, même au sommet, on pouvait distinguer une zone corticale et un cordon central, par l'absence ou la faible quantité de l'amidon dans ce dernier. Mais nous avons eu des cas dans lesquels la distribution était beaucoup moins nette, la présence même de l'amidon en quan-

[1] Voyez à ce sujet : Schwendener, *Ueber das Scheitelwachstum der Phanerogamenwurzeln*, pp. 10 et suivantes (Sitzungsber. der k. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1882); Haberlandt, *Ueber Scheitelzellwachstum bei den Phanerogamen* (Mittheil.. des naturwiss. Ver. für Steiermark, 1881); Idem, *Physiologische Pflanzenanatomie*, pp. 60-62. — M. Eriksson, *l. c.*, admet chez les Labiées l'existence d'un plérome et d'un périblème en tant qu'histogènes spéciaux. Tout en différant d'avec M. Eriksson, sur quelques points secondaires, M. Flahault admet, lui aussi, l'existence de plusieurs histogènes spéciaux : une assise mère de l'assise pilifère et de la coiffe, un périblème, une assise de péricambium et un plérome. Voy. Flahault, *Recherches sur l'accroissement terminal de la racine chez les phanérogames*, p. 99. (Ann. sc. nat., 6e sér., t. VI, 1878.) — Outre les indications plus anciennes, nous trouvons, parmi les plantes récemment décrites comme appartenant à ce type, l'*Urtica dioïca* étudié par M. Gravis. Il ne semble cependant pas, d'après les figures de cet auteur (surtout fig. 4, tab. XXII), que les éléments du périblème soient faciles à distinguer de ceux du plérome : Gravis, *Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'*Urtica dioïca (Bruxelles, 1885), pp. 204-208. — M. Hovelacque a trouvé dans une famille voisine de la nôtre, les Rhinanthacées, un type tout différent, dans lequel il n'existe d'histogène spécial pour aucun tissu : Hovelacque, *Recherches sur l'appareil végétatif des Bignoniacées, Rhinanthacées, Orobanchées et Utriculariées* (Paris, 1888), p. 491.

Digitized by Google

tité un peu considérable n'étant même pas absolument constante; il s'en faut de beaucoup du reste que l'on puisse rattacher cette distribution de l'amidon à la présence de deux histogènes différents.

Sur des sections transversales, faites au-dessous du point végétatif, on reconnaît très bien l'assise pilifère, encore dépourvue de poils, à l'allongement radial assez considérable de ses éléments. La distribution du procambium est un peu différente, suivant que l'on a affaire à une racine diarche ou polyarche. Dans le premier cas, on reconnaît un seul îlot procambial central et deux latéraux. Dans le second cas, on distingue un îlot médullaire central à gros éléments, d'une couronne procambiale périphérique à petits éléments, d'où sortiront les faisceaux libériens et ligneux, ainsi que les rayons médullaires (fig. 4).

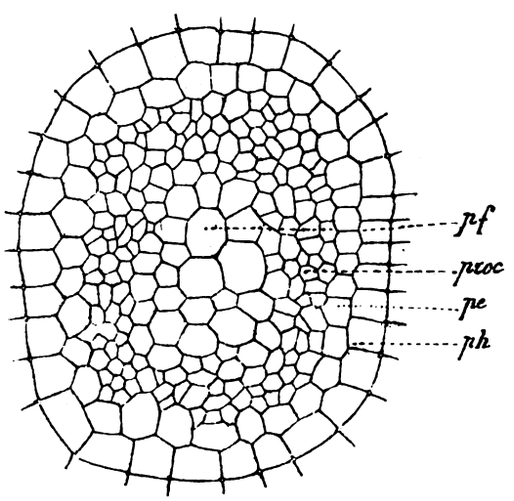


FIG. 4.

Section transversale du cylindre central opérée au-dessous du point végétatif d'une racine latérale du *G. Tetrahit*. — *pf*, parenchyme fondamental médullaire; *proc*, couronne procambiale; *pe*, péricambium; *ph*, assise préendodermique (phloeotermique).

On ne peut distinguer l'endoderme, car ses parois ne sont point encore subérisées et ses cloisons radiales n'offrent pas non plus de plissements. Le péricambium se reconnaît déjà à la grande dimension de ses éléments et au fait que ses parois radiales alternent avec celles du jeune endoderme.

Au point végétatif même, on peut constater que toute limite entre les

Digitized by Google

régions situées en dedans de l'assise pilifère a disparu, ce qui confirme notre assertion antérieure concernant l'absence d'un périblème et d'un plérome distincts.

CHAPITRE IV.

STRUCTURE SECONDAIRE DE LA RACINE.

L'accroissement secondaire commence de très bonne heure; il suffit d'un espace de quelques millimètres pour être transporté de la structure primaire en pleine structure secondaire.

Il se forme tout d'abord des arcs générateurs intralibériens aux dépens du parenchyme fondamental et un méristème extraligneux aux dépens du péricambium. Les arcs intralibériens rejoignent rapidement le méristème extraligneux, pour constituer un cylindre cambial.

Arrivée à ce degré de développement, une racine principale nous offre la structure suivante. Au centre de la racine se trouve un cylindre ligneux plein. On peut très bien reconnaître en son milieu la lame vasculaire primaire (fig. 5). Elle frappe ordinairement par la couleur brune de ses élé-

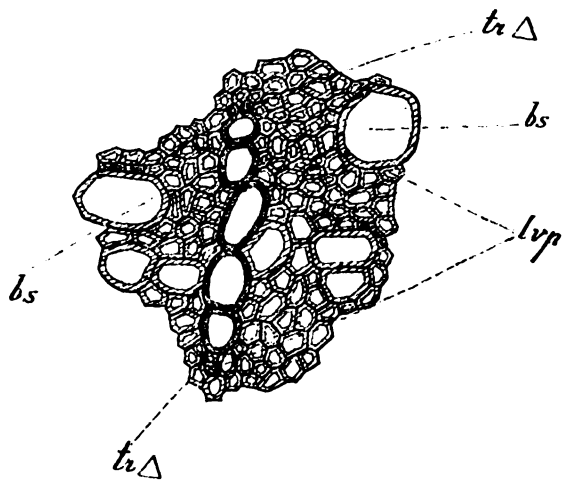


FIG. 5.
Section transversale dans la partie centrale d'une racine terminale secondaire chez le *G. Ladanum* — *tr* Δ, trachées initiales; *lvp*, lame vasculaire primitive; *bs*, bois secondaire.

Digitized by Google

ments, tandis que les nouveaux tissus qui l'entourent sont construits avec des matériaux beaucoup plus blancs. Ces derniers tissus se composent de gros vaisseaux ponctués, atteignant un calibre considérable et distribués sans ordre dans un massif sclérifié. Le cylindre central est entouré par un manchon libérien. A la périphérie, les éléments du péricambium n'ont pas encore subi d'écrasement. Entourant le tout, se trouve l'endoderme. L'assise pilifère est entièrement exfoliée; les assises corticales extérieures commencent à en faire autant. Ce qui reste de l'écorce peut se répartir en deux zones : l'une, centrifuge, offre des éléments irréguliers, polyédriques, nombreux ; l'autre, centripète, se compose de cellules cubiques ayant, sur une coupe transversale, la forme de rectangles allongés tangentiellement. Tandis que dans la zone centrifuge, à la suite de divisions radiales répétées, les éléments alternent ou ne sont point disposés suivant des relations fixes, les uns par rapport aux autres, les parois radiales et tangentielles des éléments de la zone centrifuge sont exactement placées sur le prolongement les unes des autres, et laissent entre elles, sur les angles, un méat aérifère, à section transversale rectangulaire.

Traitée par l'acide sulfurique, l'écorce centripète se dissout presque instantanément, tandis que l'endoderme résiste. La subérisation de ce dernier n'est pas toujours égale sur toutes les parois; les parois tangentielles sont plus légèrement subérisées que les parois radiales. Ces dernières résistent en tout cas à l'action de l'acide sulfurique, tandis que les premières sont parfois réduites à une pellicule extrêmement mince. On ne constate pas de cellules de passage spéciales (*Durchgangszellen*) qui persistent à l'état non subérisé. L'action de l'acide sulfurique sur les autres éléments, à cette période, offre également de l'intérêt. Le liber se colore en rose très clair et le cylindre ligneux en vert. Dans ce dernier, la couleur ne se manifeste que par degrés, commençant par les vaisseaux pour gagner ensuite le massif de sclérenchyme. A mesure que les parois se désagrègent, leurs couches internes prennent une teinte violette, qui tourne au brun, puis au noir et persiste. Les couches les plus internes des parois des éléments ligneux sont plus ou moins subérisées et restent alors, formant un élégant réseau qui résiste longtemps à l'acide sulfurique même concentré.

Digitized by Google

Étudions maintenant, pour compléter l'histoire de la racine, la structure de ce membre vers la fin de la période de végétation (octobre). On distinguera, sur une coupe transversale, à l'extérieur une zone périphérique corticale détériorée, dont les cellules irrégulièrement déjetées ont subi une transformation chimique dans leurs membranes, comme nous le verrons tout à l'heure. Les assises rapprochées de l'endoderme sont mieux conservées et montrent encore plus ou moins la superposition radiale des éléments corticaux, primitivement si régulière. L'endoderme est malaisé à distinguer, si ce n'est par la résistance de ses parois à l'action de l'acide sulfurique. Le péricambium ne se distingue plus du liber que difficilement ou par places, car les éléments criblés et parenchymateux de ce dernier ont augmenté de calibre. Du reste, le péricambium et le liber, pris comme dans un étau entre l'endoderme et l'écorce d'un côté, le bois grossissant en diamètre de l'autre, se trouvent étirés tangentiellement et aplatis radialement, de façon à être très déformés. Le bois forme un cylindre plein, compact et homogène, dans lequel on aperçoit des rayons médullaires unisériés, de tous ordres, séparés par 2-4 rangées d'autres éléments. La masse du bois est formée par des éléments sclérenchymateux, ça et là interrompus par de gros vaisseaux. Au centre, on reconnaît un îlot formé par la lame vasculaire primitive.

Les vaisseaux secondaires sont des tubes lignifiés, portant de grosses ponctuations doubles. Ces ponctuations ont un contour extérieur arrondi ou légèrement ellipsoïde, tandis que le contour interne est allongé en fente. Cette fente n'est autre chose qu'un vestibule assez profond qui permet d'entrer dans la chambre interne de la ponctuation. Les ponctuations sont plus ou moins dirigées suivant une spire ascendante à gauche, mais formant avec la normale des parois un angle très faible. Les éléments sclérenchymateux qui les séparent sont des stéréides typiques, pas très longues, avec des ponctuations en fente simple, souvent en X lors de la superposition de deux éléments, dirigées suivant une spire ascendante à gauche et formant avec la normale un angle de 75° environ. Ça et là, mais peu fréquents, et dans le voisinage de la lame vasculaire primitive, on constate des éléments parenchymateux sclérifiés, à ponctuations presque simples ou un peu élargies en trompette à l'intérieur. Au centre, la lame vasculaire contient de véritables trachées, à spirules déroulables. Les trachées initiales ont des

Digitized by Google

spirules minces et à tours de spire éloignés; celles du centre ont un calibre plus fort, leurs spirules sont plus épaisses et les tours de spire en sont plus rapprochés.

Les différences chimiques des tissus de la racine adulte, telles qu'elles ressortent de l'action d'une solution alcoolique de phloroglucine traitée par l'acide chlorhydrique, de la coralline sodée, etc., n'offrent rien de spécial. Mentionnons cependant que, au stade que nous venons de décrire, l'acide sulfurique fait simplement pâlir le liber avant de le dissoudre, noircit l'écorce et colore le cylindre ligneux en vert, puis en brun foncé.

L'action de la teinture alcoolique de curcuma est faible. Elle fonce les contours des éléments libériens et colore en jaune plus ou moins intense le cylindre ligneux.

L'hématoxyline agit au contraire d'une façon fort intéressante. Elle réagit en jaune foncé sur le cylindre ligneux et colore en bleu le liber, l'endoderme et les assises périphériques.

L'action du réactif genevois est également fort instructive [1]. Le pouvoir absorbant des membranes pour ce réactif étant très considérable, il convient de prendre les précautions suivantes dans son emploi, si l'on désire éviter des résultats discordants : décolorer la coupe à l'eau de javelle, la laver à grande eau, l'immerger pendant une demi à deux minutes dans le réactif genevois et la laver une seconde fois à grande eau. Dans ces conditions nous avons obtenu les résultats suivants. Les assises les plus extérieures prennent une belle coloration jaune (subérisation et lignification partielles); l'endoderme prend une teinte brune légèrement rosée (subérisation); les assises corticales centripètes, le péricambium et le liber prennent une belle coloration rose (cellulose). Toutes les parties périphériques du bois se colorent en jaune-orange intense (lignification complète). A mesure que l'on se rapproche du centre, cette couleur jaune passe au vermillon pour tous les éléments situés

[1] Le *réactif genevois*, ainsi nommé par M. Chodat, est une solution légèrement alcoolique de rouge-Congo, maintenue ammoniacale, et additionnée d'une solution de chrysoïdine à 2 %. C'est un bon auxiliaire des réactifs généraux de la lignine, et qui est surtout utile dans l'étude des tissus mécaniques. — Voyez Chodat, *Un procédé de double coloration pour les tissus végétaux*. (Archives des sciences phys. et nat. de Genève, 3e sér., t. XXV, 1891, pp. 465-467.)

Digitized by Google

entre les vaisseaux (lignification ancienne), tandis que ceux-ci gardent leur teinte orange. Ce n'est que dans la région centrale, comprenant la lame vasculaire bipolaire primitive (dans les racines terminales), que la coloration jaune reprend le dessus.

CHAPITRE V.

PASSAGE PRIMAIRE DE LA RACINE A LA TIGE, OU STRUCTURE PRIMAIRE DE L'HYPOCOTYLE.

Connaissant la structure primaire de la racine, nous allons voir comment s'opère le raccordement de cette dernière avec la tige.

Pour nous rapprocher, autant que les matériaux à notre disposition nous le permettaient, de l'objet étudié par M. Gérard, nous avons choisi des plantules de *G. pyrenaïca*, espèce qui n'a été distinguée du *G. Ladanum* qu'en 1848 et qui a la même structure anatomique que lui.

Le premier changement que nous voyons s'opérer en remontant l'axe de la tige est celui qui, selon M. Van Tieghem [1], caractérise le collet, c'est le changement de derme. Si l'on prend une plantule dans laquelle la différenciation des tissus s'est déjà opérée depuis un certain temps, ce changement est fort remarquable. A une assise de cellules détériorée par la destruction des poils, succède assez brusquement, en remontant un gradin, un épiderme parfaitement lisse, à parois extérieures plus épaissies que les parois radiales et recouvertes d'une cuticule.

Étudions la structure interne à ce niveau, comme point de départ. Les cellules épidermiques ont subi une série de cloisonnements radiaux et ont une forme rectangulaire, allongée dans le sens du rayon; leurs parois internes sont collenchymateuses. L'assise corticale hypodermique s'est aussi cloisonnée radialement; ses éléments ont donc la même forme que ceux de l'épiderme, ils sont collenchymateux extérieurement. Entre cette assise hypodermique et l'endoderme, on trouve environ cinq assises de cellules corticales incolores de

[1] Van Tieghem, *Traité de botanique*, éd. 2, t. I, p. 781.

Digitized by Google

section quadrangulaire, à lacunes aérifères angulaires carrées, à parois radiales et tangentielles régulièrement disposées sur le prolongement les unes des autres. L'endoderme a des éléments de section irrégulièrement hexagonale et allongée tangentiellement, contenant des grains d'amidon; ses parois ne sont pas subérisées. Le péricambium est très net; ses éléments sont plus gros que les éléments libériens, ils sont irrégulièrement polygonaux. Sur un certain nombre de points, ils ont subi un fractionnement intense dont on peut facilement suivre les phases. Il commence d'abord par une première cloison tangentielle. Chaque cellule fille se divise ensuite radialement une ou plusieurs fois, après quoi les divisions ultérieures, quand elles ont lieu, ne s'opèrent pas suivant une loi déterminée. Le liber, à éléments plutôt petits, forme deux arcs allongés qui vont à la rencontre l'un de l'autre à l'extrémité de la lame vasculaire bipolaire. Cette lame a la forme d'un fuseau, large à l'équateur, en pointe aux deux extrémités. Ces deux extrémités sont occupées par les trachées initiales. A mesure que l'on se rapproche de l'équateur, les vaisseaux gagnent en calibre. Ils se composent essentiellement de trachées. Quelques-uns de ces éléments se touchent; les autres, ceux du centre surtout, sont séparés par un parenchyme ligneux à parois tendres, contenant des chloroleucites amylogènes. C'est le stade 1.

A mesure que l'on remonte dans l'hypocotyle, le type de structure que nous venons de décrire subit diverses modifications.

D'abord, la lame vasculaire bipolaire augmente d'épaisseur dans la région équatoriale. Ensuite, il se produit dans la zone de tissu conjonctif qui sépare la lame vasculaire du liber, à droite et à gauche, une série de cloisonnements tangentiels qui ont pour effet de séparer très nettement les trois régions (une région libérienne, une région ligneuse et une région libérienne) du cylindre central par des bandes claires. C'est le stade 2.

Un peu plus haut, la lame vasculaire est fractionnée par le milieu en deux ilots, séparés par une assise de tissu conjonctif à gros éléments polygonaux; c'est là le commencement de la moelle. En même temps, les bandes libériennes se divisent aussi en deux ilots, également séparés par une zone de tissu conjonctif, zone qui comprend plusieurs assises et dont les éléments ont un calibre plus faible que ceux du conjonctif qui a fractionné la lame vascu-

Digitized by Google

laire. La coupe transversale des deux faisceaux ligneux a donc, en gros, la forme de deux triangles opposés par leur base et dont le sommet est occupé par les vaisseaux initiaux. C'est le stade 3.

Insensiblement, les faisceaux libériens viennent s'appliquer sur les faces extérieures de ces triangles (fig. 6). Cette orientation sécantielle avec quatre

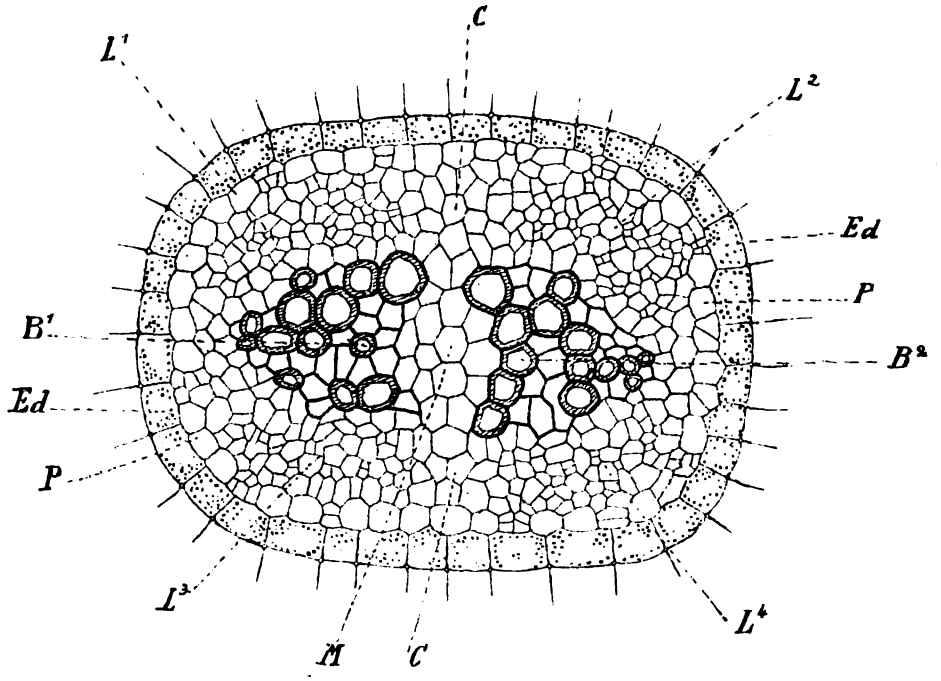


FIG. 6.

Section transversale dans l'hypocotyle primaire du *G. pyrenaïca* au moment où l'orientation sécantielle des éléments fasciculaires est réalisée. — B^1 et B^2, îlots ligneux; L^1, L^2, L^3, L^4, îlots libériens; M, moelle; C, rayons médullaires; P, péricambium accusant des fractionnements locaux; *Ed*, gaine amylifère.

groupes libériens et deux groupes ligneux se continue jusqu'au-dessous des cotylédons. Pour arriver à la formation de quatre groupes ligneux, on voit le tissu conjonctif pénétrer peu à peu dans les deux faisceaux ligneux par la base des triangles, et les scinder en deux bras qui sont refoulés à la périphérie. On arrive de la sorte à obtenir quatre îlots ligneux, réunis deux par deux, en deux points qui sont précisément les points d'insertion des trachées initiales. Dès lors, la structure quaternaire est réalisée. C'est le stade 4.

Digitized by Google

Les choses se passent de la même manière dans les autres espèces, avec cette différence, toutefois, que dans les formes à renflements moteurs (*G. Tetrahit*, etc.), l'hypocotyle prend un développement plus considérable, de telle sorte que la disposition quaternaire des groupes ligneux s'y montre plus rapidement sous les cotylédons et y est plus nette. C'est, du reste, ce qui ressortira suffisamment de l'étude de l'hypocotyle secondaire, que nous opérerons chez le *G. Tetrahit*.

On voit que notre tableau du passage primaire de la tige à la racine est différent de celui qu'en a donné M. Gérard [1]. Les principales différences sont les suivantes :

1° Les trachées primitives ne sont pas repoussées vers l'intérieur dès le changement d'épiderme. Ce sont elles qui jouent le rôle de pivot ou d'axe de torsion; elles restent à peu près en place, tandis que le bois opère autour d'elles un mouvement tournant de 135° environ;

2° Nous n'avons pas remarqué à un moment quelconque la disparition du péricambium en face des faisceaux libériens;

3° La division des faisceaux ligneux a pour conséquence immédiate le refoulement périphérique du bois par le conjonctif central. Il importe donc de distinguer les modes de disposition du bois en trois phases successives : *a*) primitif, *b*) binaire, *c*) quaternaire.

CHAPITRE VI.

PASSAGE SECONDAIRE DE LA RACINE A LA TIGE, OU STRUCTURE SECONDAIRE DE L'HYPOCOTYLE.

Si, par une série de coupes successives, on continue de remonter du côté de la tige, on constatera, ainsi que nous l'avons fait pour l'hypocotyle primaire, que le passage de la racine secondaire à la tige secondaire s'opère insensiblement sur une longueur qui occupe presque tout l'hypocotyle (fig. 7). Cette fois-ci, c'est une plantule de *G. Tetrahit* qui nous servira d'objet

[1] GÉRARD, *Passage de la racine à la tige.* (ANN. SC. NAT., 6me série, t. XI, 1881, *l. c.*)

Digitized by Google

d'étude, mais les mêmes faits se répètent, sauf d'insignifiants détails, dans les autres espèces du genre.

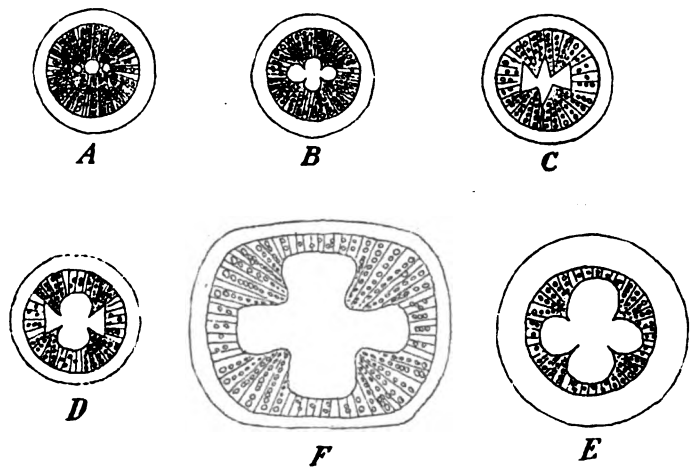


FIG. 7.

Sections transversales d'ensemble du cylindre central de l'hypocotyle secondaire opérées à des niveaux de plus en plus élevés, chez le *G. Tetrahit*. — *A*, stade des trois îlots médullaires; *B*, stade du chapelet médullaire à trois anneaux; *C*, stade de la croix à bras antéro-postérieurs aigus, à bras latéraux biangulaires; *D*, stade de la croix à bras antéro-postérieurs arrondis, à bras latéraux biangulaires; *E*, stade de la croix à bras arrondis; *F*, stade réalisant la structure caulinaire quadrangulaire.

Nous voyons d'abord apparaître au centre du cylindre ligneux secondaire de la racine — dont nous avons déjà décrit en détail la structure — un îlot de parenchyme à parois minces; puis en deux points opposés, à gauche et à droite, deux taches claires, formées par un parenchyme à parois d'abord épaisses, mais qui s'amincissent très vite : c'est le début du conjonctif central de la tige, de la moelle (stade 1).

Cet îlot central s'unit bientôt à droite et à gauche avec les îlots latéraux, pour donner une lame médulaire allongée un peu rétrécie au milieu. En ce point, le liber a pris un assez grand développement; l'endoderme est toujours assez bien caractérisé. Les divisions dans le péricambium sont très avancées. Ce n'est que çà et là que l'on retrouve une grande cellule péricambiale primitive; la plupart du temps, à la suite des divisions tangentielles et radiales que nous avons indiquées au chapitre précédent, il s'est formé une zone de prosenchyme à petits lumens. De temps en temps nous voyons une de ces cellules prosenchymateuses se scléritier : c'est là le commencement

Digitized by Google

du stéréome péricyclique qui se développera plus tard, sans du reste jamais acquérir beaucoup d'importance. Dans les espèces du sous-genre *Ladanum* (*G. pyrenaïca, Ladanum*, etc.), on ne voit jamais de sclérification des éléments prosenchymateux extralibériens (stade 2).

Au lieu d'un seul rétrécissement, un peu indécis, au milieu de la lame médullaire centrale, on ne tarde pas à en distinguer deux rapprochés l'un de l'autre. Chaque rétrécissement est formé par deux coins ligneux opposés, dont les sommets sont occupés par les trachées initiales. Les deux rétrécissements s'éloignent progressivement l'un de l'autre et, en s'écartant, laissent entre eux dans le bois une fente cunéiforme, dans laquelle pénètre la moelle. Cette fente s'élargit peu à peu, s'arrondit à l'extrémité, et nous arrivons à un stade dans lequel une section transversale de l'hypocotyle donne à la moelle la forme d'une croix ; ses deux bras latéraux sont biangulaires au sommet ; ses bras supérieur et inférieur sont arrondis.

A partir de ce moment les bandes interfasciculaires, qui forment les sommets des bras de la croix, diminuent beaucoup d'épaisseur, tandis que le diamètre du manchon libéro-ligneux augmente énormément. La conséquence en est le grand développement de la moelle, dont la forme de section change de nouveau. En effet, les branches latérales de la croix du stade précédent ont émoussé leurs angles, et nous obtenons finalement une croix régulière, dont les quatre bras sont arrondis aux extrémités. Seules les trachées initiales n'ont pas pris part à cette progression vers l'extérieur ; à mesure que les coins ligneux se retiraient vers la périphérie, elles sont restées isolées dans la moelle. Les cellules médullaires qui les séparent les unes des autres ont été étirées par les coins ligneux, de telle sorte que ces derniers sont reliés par des bandes de moelle étirée, lequel emprisonne dans ses mailles de fines trachées initiales dont les spirules se déroulent au moindre dommage. A gauche et à droite de ces bandes, ainsi qu'entre ces bandes, la moelle se compose de gros éléments irrégulièrement polyédriques, qui n'ont point subi d'étirements. Le bois des faisceaux est peu épais, surtout sur les arcs interfasciculaires. A cette hauteur, l'épiderme montre, dans un bon nombre de ses cellules, une matière colorante rose en solution ; il est recouvert d'une fine cuticule et ne montre pas de stomates. Il porte çà et là des

Digitized by Google

poils uni- ou pluricellulaires, à nombreuses perles cuticulaires; ils sont rares et insérés directement sur l'épiderme, sans l'intervention d'un cousinet basilaire. Nous verrons plus loin que cette disposition se retrouve sur la tige des espèces du sous-genre *Ladanum*, mais que dans le sous-genre *Tetrahit* la tige porte des poils sétacés, munis d'un coussinet basilaire en entonnoir. Les assises corticales les plus externes contiennent de la chlorophylle.

Au stade suivant, une des branches de la croix médullaire s'élargit, et, en même temps, la tige tout entière prend une section qui se rapproche du carré. A ce point là — les faisceaux étant rapprochés par paires — deux ou trois rayons vasculaires s'écartent dans chaque paire de faisceaux et tendent à se rapprocher par leurs extrémités, laissant entre eux et le corps des faisceaux délaissés un espace cunéiforme. Cet espace cunéiforme s'allonge et, finalement, le groupe de rayons se trouve séparé du corps du faisceau sympode par plusieurs assises de tissu conjonctif. Nous avons alors, sur une section transversale de l'hypocotyle, huit faisceaux rapprochés par groupes de quatre. Dans chaque groupe, les deux plus extérieurs sont les plus gros : ce sont les faisceaux angulaires. Les deux moyens sont les plus grêles : ce sont les faisceaux sortants qui se rendent aux cotylédons. Ces deux faisceaux sortants se réunissent en un seul en entrant dans le pétiole cotylédonaire.

Dès l'entrée dans la région nodale, on remarque plusieurs changements dans la structure interne. D'abord, les étirements médullaires entre les coins ligneux rapprochés ont disparu. En second lieu, l'épiderme et l'assise corticale hypodermique deviennent plus nettement collenchymateux. Cet épaississement des membranes peut atteindre sur les angles arrondis de l'hypocotyle 2-3 assises de cellules : c'est là la première indication du squelette de collenchyme de la tige.

Si nous comparons le passage primaire de la racine à la tige avec le passage secondaire, nous voyons, en résumé, que l'on ne trouve aucune trace, dans l'hypocotyle secondaire, des modifications décrites dans le système libéro-ligneux primaire avant le fractionnement binaire de la lame vasculaire primitive. Ces traces ont été effacées par le développement des arcs de méristème intralibériens et extraligneux. Le stade 1 de la structure secondaire corres-

Digitized by Google

pond à la formation des deux masses ligneuses, le stade 2 au refoulement périphérique par la moelle des masses ligneuses sectionnées.

Ajoutons, pour terminer, que dans le sous-genre *Tetrahit,* l'hypocotyle prend beaucoup plus les allures d'une tige sous le nœud cotylédonaire que dans le sous-genre *Ladanum.*

Étude de la tige.

CHAPITRE VII.

APPARENCE EXTÉRIEURE DE LA TIGE.

Les bourgeons cotylédonaires prennent peu de développement ou manquent, comme l'avait déjà observé Irmisch [1], ce qui donne à la tige des *Galeopsis* une apparence particulièrement grêle dans leur jeune âge. Plus tard, la tige se ramifie abondamment par les nœuds épicotylés et peut former des touffes très considérables.

Le grand développement de la tige dépend, en première ligne, du milieu ambiant. A cet égard, l'expérience journalière des cultures et l'étude des *Galeopsis* végétant dans des conditions différentes extrêmes nous a donné des exemples de variation remarquables. Certaines formes qui atteignent jusqu'à 1 mètre ou 1 $^1/_2$ mètre de hauteur dans la plaine, diminuent jusqu'à 3 et 4 centimètres de hauteur seulement, lorsqu'elles végètent à de hautes altitudes. Nous reviendrons dans la partie systématique analytique sur ces faits; nous les mentionnons pour faire remarquer qu'il est très difficile de donner un tableau précis de l'apparence extérieure des tiges.

La section des tiges est toujours plus ou moins carrée, sauf dans le *G. Reuteri* qui les a souvent arrondies ou au moins à angles très émoussés.

L'indument, comme nous le verrons, est différent dans les deux sous-genres; sa distribution plus ou moins abondante dépend surtout du milieu. On distingue toujours facilement l'hypocotyle de l'épicotyle à sa

[1] Thilo Irmisch, *Beiträge zur vergleichenden Morphologie der Pflanzen,* 2me mémoire (*Labiatae*), p. 26. Halle, 1856.

Digitized by Google

glabréité; toutefois, nous avons vu au chapitre précédent que cette glabréité était relative.

On ne connaît qu'une seule forme dont l'épicotyle soit semblable à l'hypocotyle au point de vue de la glabréité : c'est le *G. Ladanum* var. *glabra*.

Une apparence particulière est fournie par certaines formes qui ont une surface glauque (*G. speciosa* var. *sulfurea*, typique pour le *G. Reuteri*); cette glaucescence est due à un dépôt de cire.

Comme coloration, on voit fréquemment alterner sur la tige des bandes longitudinales colorées en vert et en rouge (*G. Ladanum*, *G. pyrenaïca*). Cet effet est produit par l'alternance de l'épiderme des faces latérales de la tige, qui contient une matière colorante rouge en solution, avec l'épiderme des bandes de collenchyme angulaires qui n'est pas coloré. Dans les tiges glauques, les tissus couverts de cire ont souvent par eux-mêmes une teinte violacée pâle. Dans le sous-genre *Tetrahit*, les entrenœuds et les nœuds sont souvent colorés en rouge, tandis que les renflements moteurs restent verts; le contraire est moins fréquent.

On constate souvent que les deux branches qui s'écartent d'un nœud ont une valeur inégale, l'une étant plus forte, plus développée et portant des feuilles plus belles que l'autre. Si les rameaux sont florifères, on voit alors le rameau favorisé fleurir avant l'autre. Parfois cette différence existe aussi entre les deux feuilles mères des rameaux.

Wydler [1] a insisté sur cette particularité de développement; il semble, d'après ses autres écrits, qu'il voyait là un fait à l'appui de la spire fondamentale de Schimper et Braun, théorie qui passionnait alors beaucoup de morphologistes.

Pour nous, le phénomène n'a qu'une médiocre importance. La distinction entre un bourgeon α et un bourgeon β ne se laisse pas poursuivre d'une façon régulière le long d'un axe et n'offre pas non plus d'apparition constante dans la paire située au-dessous des feuilles à rameaux axillaires, ou dans les feuilles portant des rameaux sériés accessoires, comme le voulait Wydler. Les causes qui produisent cette inégalité de développement nous sont incon-

[1] Wydler, *Kleinere Beiträge zur Kenntniss einheimischer Gewächse. Labiatae* (*l. c.*, pp. 501-503).

Digitized by Google

nues. Autant que nous avons pu le voir, les bourgeons apparaissent en même temps, et cette différence dans l'ordre de développement ne s'introduit que peu à peu.

Les rameaux sériés sont particuliers au sous-genre *Tetrahit*. Ce sont des bourgeons qui naissent au nombre de 1-3, les uns au-dessous des autres, et dans un ordre basipétal, entre une feuille caulinaire et le bourgeon (rameau) axillaire primitif. De ces rameaux accessoires, le premier seul, plus rarement aussi le second, est florifère.

Nous ne dirons rien maintenant des renflements moteurs, parce que nous consacrerons plus loin deux longs chapitres à ces importants organes qui exigent d'être examinés à part.

CHAPITRE VIII.

STRUCTURE ET HISTOGÉNIE DE LA JEUNE TIGE DANS LE SOUS-GENRE *TETRAHIT*.

Dans l'entrenœud épicotylé du *G. Tetrahit,* nous trouvons une structure très franchement caulinaire, qui peut se résumer de la manière suivante :

Extérieurement, un épiderme à section transversale rectangulaire, à parois externes bombées et couvertes d'une fine cuticule, à parois internes convexes également, à angles collenchymateux ; cet épiderme contient souvent des grains de chlorophylle. Il porte çà et là de nombreux poils sétacés, sur lesquels nous reviendrons, mais pas de stomates. Sous l'épiderme, nous trouvons une assise légèrement collenchymateuse, contenant de la chlorophylle ; puis 4-5 assises contenant peu de chlorophylle, à lumens plus grands, à parois laissant dans les angles des méats aérifères à section rectangulaire, qui sont limités intérieurement par une gaine amylifère. Le liber est limité extérieurement par des assises prosenchymateuses accusant çà et là, sous la forme collenchymateuse étudiée par Haberlandt [1], le début d'une sclérification : c'est un tissu qui est homologue du péricambium, car sa position et son origine sont les mêmes. On voit encore, par places, des élé-

[1] Haberlandt, *Entwicklungsgeschichte des mechanischen Gewebesystems der Pflanzen*, pp. 51 et suiv. Leipzig, 1879.

Digitized by Google

ments parenchymateux à grands lumens, situés directement sous l'endoderme. Quelques-uns permettent de reconnaître les stades de divisions tangentielles d'abord, radiales ensuite, que l'assise parenchymateuse primitive a subies pour donner naissance au prosenchyme initial du stéréome extralibérien. Immédiatement à l'intérieur, on constate les plages grillagées des tubes criblées, les cellules-compagnes, avec du parenchyme et du prosenchyme libériens. Dans la partie ligneuse, le libriforme est encore peu épaissi. Les grands vaisseaux ponctués sont dans le même cas. On trouve dans les rayons médullaires et les ilots de parenchyme ligneux tendre, qui entourent les faisceaux à leur face interne, une grande quantité d'amidon accompagnée de chloroleucites. Nous sommes disposé à croire, avec M. Born [1], que cette chlorophylle, dont la présence est liée à la formation de l'amidon, n'exerce pas ses fonctions assimilatrices, à en juger par sa position topographique; il en serait peut-être de même pour la chlorophylle de l'endoderme (gaine amylifère). On trouve aussi dans la moelle de très petits chloroleucites appliqués contre les parois; si l'on fait plasmolyser cette moelle, on verra que cette chlorophylle, entraînée au centre des cellules par la membrane protoplasmique périphérique, y formera des amas verdâtres d'un certain volume. Les tissus conducteurs sont groupés en quatre faisceaux angulaires. Vis-à-vis d'eux, le collenchyme prend une épaisseur de 5-6 assises. Ses cellules sont vivantes, pleines d'eau, mais ne contiennent que peu de chlorophylle; la forme des éléments est parenchymateuse; les épaississements angulaires sont très réguliers, concaves; les membranes donnent les réactions de la cellulose. Les cordons de collenchyme ont, en section transversale, la forme d'un croissant, et sont séparés de l'endoderme par 2 à 3 assises de parenchyme cortical, dont la rangée la plus interne possède les plus gros éléments. L'acide sulfurique et l'iode colorent rapidement le collenchyme et l'écorce d'une belle couleur bleue; l'endoderme, encore à l'état de gaine amylifère non subérisée, ne prend que peu à peu la coloration bleue. Le liber reste à peu près incolore. Les parties jeunes du faisceau ligneux deviennent bleues, ainsi que les vaisseaux, tandis que le parenchyme

[1] Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., p. 28. Berlin, 1886.

Digitized by Google

reste incolore; les arcs interfasciculaires bleuissent, de même que la moelle. Les poils, recouverts de cutine, ne bleuissent pas, mais l'acide sulfurique les colore en un beau jaune-paille et fait vivement ressortir les perles cuticulaires. Nous reviendrons plus loin sur ces poils.

En remontant le long de l'entrenœud, nous voyons se produire la même division des faisceaux que dans le haut de l'hypocotyle : 4 ou 5 lames vasculaires s'écartent, avec leurs annexes de parenchyme ligneux et de libriforme, en laissant un coin médullaire les séparer peu à peu du faisceau sympode; bientôt ils en sont isolés et se rapprochent l'un de l'autre en biaisant obliquement dans l'écorce. Ils se rendent dans la première paire de feuilles épicotylées; mais cette paire de feuilles étant disposée en croix sur les cotylédons, les faisceaux sortants passent cette fois perpendiculairement au plan de sortie des traces cotylédonaires. On voit aussi, au milieu des arcs interfasciculaires, 1 ou 2 petits faisceaux accessoires; ils ne jouent pas de rôle important dans la course des faisceaux et font partie intégrante des arcs interfasciculaires qu'ils servent à renforcer. Nous reviendrons sur ces faisceaux en résumant la course des cordons libéroligneux à la fin de ce chapitre.

Au delà de ce nœud, nous voyons les faisceaux sympodes se diviser progressivement en deux masses de plus en plus distinctes. Vers le sommet de l'entrenœud, les deux masses sont séparées par 3 à 6 rayons de tissu conjonctif homogène et tendre. Chaque masse compte 3-4 lames vasculaires, séparées entre elles par des rayons médullaires unisériés; lorsqu'il semble que ces rayons sont bi- tri- ou plurisériés, cela provient de séries ligneuses (libriforme) intercalées, destinées à se sclérifier ou à se diviser encore.

Arrivés à cette hauteur, nous constatons que dans le nœud la masse des faisceaux sortants devient beaucoup plus considérable que celle des faisceaux angulaires.

Dans le troisième entrenœud, l'inégalité dans l'étendue occupée par les faisceaux est très marquée. Les quatre faisceaux les plus gros et les mieux développés sont des traces foliaires; les autres sont des faisceaux angulaires. La raison de cette inégalité doit être cherchée dans le fait que les faisceaux angulaires sont en retard d'un entrenœud, dans leur développement, sur les traces foliaires.

Digitized by Google

Dans le quatrième et le cinquième entrenœud, la différenciation des éléments devient de moins en moins marquée.

Enfin, sous le point végétatif, nous trouvons la structure suivante :

La tige a une section rectangulaire allongée. Ses angles sont arrondis. L'épiderme se compose d'éléments tabulaires à parois tendres. L'écorce consiste en éléments polygonaux ou cubiques, un peu chlorophylliens, à teneur en chlorophylle faible, mais augmentant à mesure que l'on se rapproche de la périphérie. Le collenchyme n'est pas encore différencié. L'endoderme n'est pas différencié, même comme gaine amylifère. Dans les quatre angles, séparés de l'épiderme par 3 ou 4 assises de cellules, on reconnaît quatre faisceaux procambiaux. Dans l'écorce, les éléments des deux assises les plus internes ont leurs parois radiales et tangentielles placées exactement sur le prolongement les unes des autres. C'est le cas pour trois de ces assises ou même pour toutes, si la coupe passe assez haut pour qu'il n'y ait pas encore eu de perturbations produites par le cloisonnement radial des assises hypodermiques. Alternant avec l'assise qui formera le futur endoderme, on reconnaît, mais difficilement, une assise parenchymateuse extralibérienne à gros éléments (fig. 8). Nous disons expressément « difficilement », parce que le cloisonnement de cette assise est presque contemporain ou contemporain de

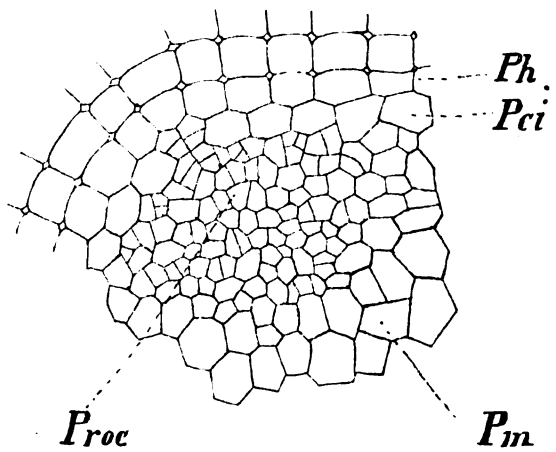


FIG. 8.

Section transversale opérée au-dessous du point végétatif, à la limite de l'écorce et du cylindre central, chez le *G. Tetrahit*. — *Pm*, parenchyme médullaire; *Proc*, îlot procambial d'un faisceau angulaire; *Pr*, assise péricyclique; *Pci*, assise préendodermique (phloeotermique).

Digitized by Google

la transformation du méristème primitif en procambium, et qu'il est alors presque impossible de l'en distinguer. Toutefois, sur des coupes réussies et opérées suffisamment près du point végétatif, on arrive le plus souvent à distinguer cette assise à ceci : c'est que tous ses éléments ne se cloisonnent pas en même temps. Tandis que quelques éléments restent entiers, d'autres offrent une première cloison tangentielle; d'autres, enfin, présentent un cloisonnement tangentiel suivi de recloisonnements radiaux répétés. On reconnaît ici le mode de division de l'assise péricambiale dans l'hypocotyle. Au dedans du procambium, on trouve la moelle (fig. 9).

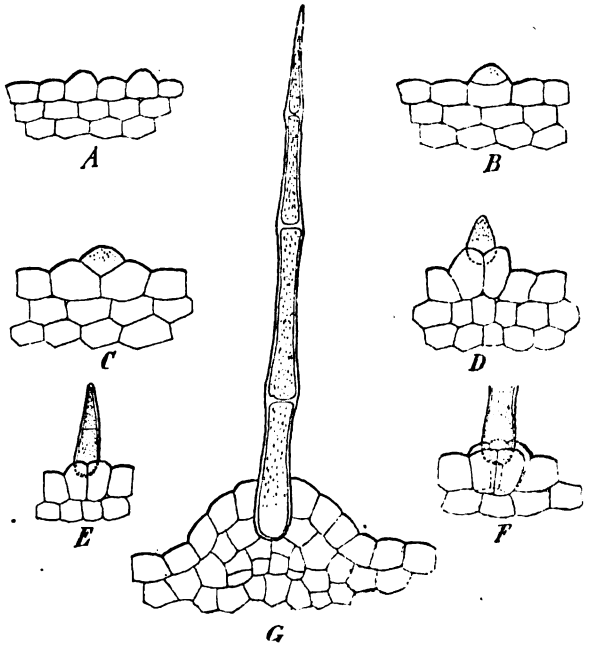


FIG. 9.

Histogénie d'un poil sétacé du *G. Tetrahit*. — A, stade papilleux; B, première cloison tangentielle; C, première cloison verticale du coussinet; D, développement en voûte des deux cellules du coussinet; E, cloisonnement transversal du poil; F, stade du coussinet à cinq cellules; G, poil sétacé adulte.

Poursuivons, pour terminer la jeune tige du groupe *Tetrahit*, la genèse des poils sétacés (fig. 9).

Une cellule épidermique quelconque se voûte d'abord extérieurement en papille. La voûte n'est pas encore très élevée, qu'elle se soustend d'une

Digitized by Google

cloison tangentielle légèrement concave. La cellule supérieure est la cellule mère du poil, l'inférieure est l'initiale du coussinet en entonnoir qui entoure sa base. Pendant que la cellule supérieure continue à se voûter et qu'apparaissent à sa surface les premières perles cuticulaires, la cellule inférieure se divise par une cloison verticale. Dans le quatrième stade ces deux cellules filles commencent à se voûter et à entourer de la sorte la base du poil qui est encore unicellulaire. Au stade 5, la cellule mère du poil se divise tangentiellement et, à partir de ce moment, les divisions se continuent jusqu'à ce que le poil ait atteint sa longueur définitive (2-6 articles cellulaires). Pendant ce temps, les deux cellules du coussinet se divisent en cinq, de telle sorte que deux des nouvelles parois sont perpendiculaires sur un des côtés de la cloison verticale primitive et une sur l'autre côté. Dès lors, chacun de ces éléments peut se diviser, mais sans ordre, et il n'est pas rare de voir des poils sétacés entourés par un coussinet de 10-20 cellules. Les éléments hypodermiques restent longtemps sans participer à la formation du coussinet. Mais quand la tige a atteint un certain âge, ils se cloisonnent tangentiellement une ou deux fois et servent ainsi à surélever le coussinet; ce dernier forme alors une protubérance visible à l'œil nu, creusée en entonnoir au centre, dans lequel entonnoir la cellule basilaire du poil est solidement enfoncée. Les poils soutiennent dans leur jeune âge, et pendant assez longtemps, un plasma fortement granuleux, que l'on peut contracter en boyau par plasmolyse; on reconnaît alors facilement dans le boyau contracté un gros noyau grisâtre. La cuticule est couverte de perles cuticulaires de forme elliptique ou, tout au moins, irrégulièrement allongée. Les membranes extérieures sont très épaisses; les cloisons séparatrices le sont moins et présentent quelques légères ponctuations. Ces poils meurent plus tard, mais leur squelette persiste et constitue une solide arme de défense, qui peut certainement porter dommage à des ennemis de la plante, comme, par exemple, des escargots ou des chenilles. Nous n'avons du reste pas fait d'expériences directes pour établir ce dernier point, et ne présentons notre proposition qu'hypothétiquement, quitte à la reprendre plus tard.

Il nous reste à déduire de notre description de la jeune tige un résumé de

Digitized by Google

la course des faisceaux libéro-ligneux [1] (fig. 10). Au milieu du troisième ou du quatrième entrenœud, à partir de la région terminale, la tige contient huit faisceaux angulaires, soit :

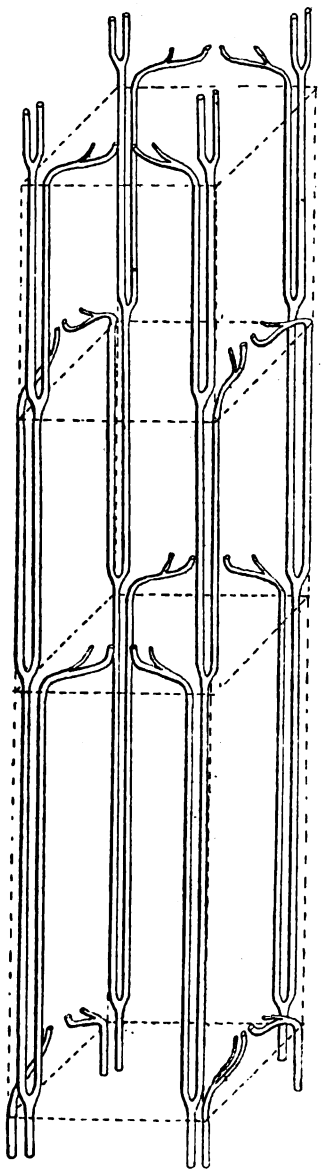


Fig. 10.
Vue schématique de la course des faisceaux libéro-ligneux dans les entrenœuds supérieurs d'une jeune tige de *Galeopsis*.

Quatre traces foliaires rapprochées deux par deux : l*ad*, l*ag*, l*pd*, l*pg* ;

Quatre réparateurs rapprochés deux par deux : R*da*, R*dp*, R*ga*, R*gp*.

Au nœud, la trace l*ad* se rapproche de la trace l*ag* et passe avec elle dans le pétiole de la feuille antérieure, la trace l*pd* se rappoche de la trace l*pg* et passe avec elle dans le pétiole de la feuille postérieure. Il ne reste donc que les quatre faisceaux réparateurs. Chacun de ceux-ci se divise aussitôt en deux pour donner une nouvelle trace foliaire et un faisceau réparateur, ce qui produit de nouveau, comme dans l'entrenœud précédent, huit faisceaux angulaires, savoir :

Quatre traces foliaires rapprochées deux par deux (l*da*, l*dp*, l*ga*, l*gp*) ;

Quatre réparateurs rapprochés deux par deux (R*ad*, R*pg*, R*pd*, R*pg*).

Vers le sommet de la tige cette course s'arrête bientôt dans le méristème primitif ; vers la base, elle se simplifie par la fusion des faisceaux réparateurs avec traces foliaires, fusion qui s'opère de telle sorte que :

l*ad*	se fonde	avec	R*da*
l*ag*	—	—	R*ga*
l*pd*	—	—	R*dp*
l*pg*	—	—	R*gp*

Il nous reste à dire deux mots des faisceaux

[1] Pour la nomenclature des faisceaux, nous avons, en général, suivi les indications si claires données par M. Bertrand. Voy. Bertrand, *Traité de botanique*, p. 116.

Digitized by Google

accessoires latéraux. En coupe transversale, on trouve sur chaque face un ou deux de ces faisceaux : cela dépend du calibre des tiges; mais, jamais dans les entrenœuds les plus supérieurs, ils sont de formation postérieure aux faisceaux angulaires. Parfois, tandis que les faces antérieure et postérieure auront chacune deux faisceaux, les faces gauche et droite n'en auront qu'un seul. Puis, à l'entrenœud suivant, ce seront les faces gauche et droite qui en auront deux, tandis que les faces antérieure et postérieure n'en auront qu'un seul.

Quoi qu'il en soit, et dans tous les cas, ces faisceaux accessoires latéraux sont reliés entre eux et avec les faisceaux angulaires, dans les nœuds, par de robustes arcs interfasciculaires.

Quelle est la signification de ces faisceaux latéraux ? Font-ils partie intégrante du schéma de course du système libéro-ligneux ?

Ces deux questions ont été résolues d'une manière diamétralement opposée par les deux anatomistes qui s'en sont occupés.

Le premier en date est Nägeli [1], qui a décrit chez le *Stachys angustifolia* Bieb., une course des faisceaux libéro-ligneux qui est identique à celle de notre *Galeopsis*. Pour lui, les faisceaux angulaires font seuls partie du réseau libéro-ligneux primitif. Le célèbre botaniste considère les faisceaux latéraux comme le commencement de la vascularisation des arcs interfasciculaires, vascularisation d'abord localisée, mais qui aboutit plus tard à la formation d'un cylindre libéro-ligneux continu.

Kirchhoff, par contre, prétend que Nägeli s'est complètement mépris sur la structure des nœuds [2]. Il étudie le *Lamium maculatum*, qui offre la même course de faisceaux que notre *Galeopsis* et le *Stachys* examiné par Nägeli. Selon lui, il y a quatre faisceaux angulaires qu'il désigne sous le nom de « funiculi primitivi », et quatre faisceaux latéraux (cas le plus simple). Dans chaque nœud, le faisceau latéral se divise, au-dessous du point de sortie des faisceaux sortants, en deux branches qui vont à droite et à gauche

[1] Nägeli, *Das Wachstum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen und die Anardnung der Gefässstränge im Stengel.* (Beiträge zur wissensch. Botanik, 1tes Heft, 1858, pp. 108 et 151, tab. XV, fig. 3-5.)

[2] Kirchhoff, *De Labiatarum organis vegetativis*, pp. 11 et suivantes. Bonn, 1861.

Digitized by Google

rejoindre ces faisceaux sortants. Au-dessus du nœud, le faisceau latéral se reforme en prenant racine à gauche et à droite dans les faisceaux angulaires les plus proches. Sur les faces hors desquelles il ne s'est pas effectué de sortie, tout se borne à une anastomose transversale entre les faisceaux angulaires et le faisceau médian latéral. Kirchhoff a donné (p. 13) un schéma de sa description qui la rend très exactement [1].

Il est parfaitement clair pour nous que c'est Nägeli qui a raison, et que Kirchhoff a rendu la structure du nœud beaucoup plus « sane complicatam » qu'elle ne l'est en réalité. Tout d'abord, les faisceaux latéraux, en nombre variable, ne sont point contemporains des faisceaux angulaires, mais constituent une formation subséquente. Cette formation subséquente, ainsi que l'indique fort bien Nägeli, n'est pas autre chose que le début de la formation d'un cylindre libéro-ligneux continu. Cette formation commence tantôt par la constitution d'un petit faisceau latéral médian, tantôt de plusieurs, tantôt enfin d'une façon irrégulière. De plus, on ne voit pas dans les nœuds les faisceaux latéraux se diviser et s'incurver à droite et à gauche pour former des anastomoses. Tout ce que l'on constate, c'est que les faisceaux sont reliés par des arcs interfasciculaires plus développés que dans le reste de la tige, mais dont tous les éléments du reste sont disposés parallèlement à l'axe de la tige. Enfin, nous ferons remarquer que les « funiculi primitivi » de Kirchhoff ne sont pas du tout « primitivi », mais résultent de la fusion secondaire de deux faisceaux angulaires primitifs, dont l'un était une trace foliaire, l'autre un cordon réparateur. Or, chez les Dicotylées, où l'accroissement en diamètre exige la formation d'un cylindre cambial continu, ce n'est pas à cette structure secondaire qu'il faut s'adresser pour avoir la clef du réseau primitif formé par le système libéro-ligneux ; on risque, sans cela, de tomber dans les descriptions erronées, comme celle de Kirchhoff qui a pris le début de la vascularisation des arcs interfasciculaires pour un système de faisceaux latéraux à anastomoses nodales.

Nous concluons en approuvant entièrement l'exposé de la topographie du système libéro-ligneux fait par Nägeli.

[1] M. Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., Berlin, 1886, p. 26, renvoie aux indications et à la figure de Kirchhoff, sans autres explications, probablement sans s'être aperçu de son inexactitude.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

STRUCTURE ET HISTOGÉNIE DE LA JEUNE TIGE DANS LE SOUS-GENRE *Ladanum*.

Étudions, comme point de comparaison, la différenciation des tissus dans une plantule du *G. pyrenaïca*.

Dans le premier entrenœud, nous constatons à l'extérieur un épiderme à éléments tabulaires, formant sur une coupe tangentielle des rectangles ou des hexagones allongés, ayant sur une coupe transversale une forme plus ou moins carrée, à faces interne et externe convexes et à parois internes collenchymateuses. Cet épiderme porte des poils simples 2-4 cellulaires, non portés par un coussinet en entonnoir, mais insérés directement sur l'épiderme; les cellules portent de nombreuses perles cuticulaires sur leurs parois, sauf cependant la cellule basilaire qui n'en porte que peu. Ces poils naissent par un procédé analogue à celui que suivent dans leur genèse les poils sétacés du sous-genre *Tetrahit*, seulement la première cloison tangentielle n'est suivie que de cloisons tangentielles ; il n'y a pas différenciation d'une cellule mère destinée à former le coussinet; la cellule basilaire se cloisonne tout au plus une fois, très rarement deux fois verticalement. L'écorce a une épaisseur de 6-7 assises, dont les externes sont un peu collenchymateuses. Dans les angles, le collenchyme comprend plusieurs assises offrant les caractères déjà décrits chez le *G. Tetrahit*. L'endoderme est amylifère, il commence à subériser ses parois radiales. La zone extralibérienne a déjà subi une série de cloisonnements; il est très rare de trouver çà et là un élément de l'assise parenchymateuse primitive; ses éléments contiennent, par places, des chloroleucites amylogènes. Le liber et le bois se présentent comme chez le *G. Tetrahit* pris au même stade. Suivant le calibre de la tige, les huit faisceaux se distinguent très nettement, ou bien ils forment déjà quatre groupes angulaires uniques. Le parenchyme ligneux qui tapisse la face interne des groupes ligneux du côté de la moelle se distingue très nettement de cette dernière par la petitesse de ses éléments et la quantité de chloroleucites amylogènes qu'ils contiennent.

Digitized by Google

L'examen de la genèse des arcs interfasciculaires démontre qu'ils proviennent des recloisonnements tangentiels successifs opérés dans l'assise immédiatement sous-jacente à l'endoderme. Mais les assises plus internes y prennent également une certaine part, en se transformant directement en bois à la façon d'un procambium. On les distingue alors sur des coupes longitudinales opérées pendant leur sclérification, à leur forme parenchymateuse, tandis que les éléments libriformiens, provenant des recloisonnements de l'assise hypoendodermique, sont plus décidément prosenchymateux. Il est du reste difficile, dans la suite, de tracer une limite précise entre les deux formations, fait que M. Born avait déjà signalé [1].

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que le cambium interfasciculaire est bien un dérivé de l'assise immédiatement sous-jacente à l'endoderme, qu'il est donc d'origine péricyclique. Ce fait ne s'accorde pas avec les indications de M. Gérard sur la formation du cambium en dehors des faisceaux procambiaux. Il est probable que cette divergence de résultats doit être attribuée à ce que, sous le même nom, M. Gérard a étudié des plantes différentes des nôtres. Nous donnerions donc raison à M. Morot, pour le cas particulier, dans le débat au sujet de l'origine péricyclique ou profonde du cambium hors des faisceaux procambiaux [2].

L'entrenœud n° 2 montre très bien les divers stades de formation des arcs interfasciculaires. Les changements y sont peu nombreux. On remarque que l'écorce est très bombée et plus épaisse sur les faces de sortie des faisceaux, tandis qu'elle est concave sur les deux autres faces. Cette disposition s'exagère à l'approche du nœud, et nous obtenons finalement, en section transversale, une figure très allongée. Les deux pôles de cette figure sont occupés par les quatre faisceaux sortants; au centre se trouvent les quatre faisceaux réparateurs auxquels correspondent, au delà de l'écorce, quatre colonnes de collenchyme.

Aussitôt après la sortie des quatre faisceaux, les convexités changent de côté et viennent occuper les faces qui étaient concaves précédemment.

[1] Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., pp. 30-31.

[2] Voyez plus haut, dans l'historique de cette partie.

Digitized by Google

Chacun des quatre faisceaux restants se divise en deux masses, l'une petite, réparatrice, l'autre plus volumineuse, destinée à sortir au nœud suivant.

Après le nœud n° 4, l'épiderme devient très chlorophyllien et entoure ainsi l'écorce blanche d'une bande verte. Le collenchyme est peu différencié. On ne voit encore dans le bois que quelques trachées.

Après le nœud n° 5, les faisceaux sont à l'état procambial; la tige offre à ce stade les mêmes caractères que chez le *G. Tetrahit*. Encore quelques mamelons foliaires et nous trouvons la coupole végétative à méristème non différencié, dans lequel on ne distingue qu'un protoderme et un cylindre massif comprenant l'écorce et le cylindre central non différenciés.

CHAPITRE X.

STRUCTURE DES ENTRENOEUDS DANS LA TIGE ADULTE DU SOUS-GENRE *TETRAHIT*.

Nous avons scindé l'étude de la tige adulte dans le sous-genre *Tetrahit* en deux chapitres dont l'un étudiera spécialement les entrenœuds, mais laissera de côté, pour plus tard, l'analyse des renflements moteurs, à cause des particularités de structure qu'offrent ces curieux organes. Nous supposons dans ce qui suit une grande tige adulte, florifère, à dix entrenœuds développés; il est clair que sur les pieds plus rabougris les variations de structure que nous allons signaler se succèdent avec plus de rapidité le long des axes.

STADE 1. — Étudions d'abord l'entrenœud situé immédiatement au-dessous des derniers verticillastres au moment où ceux-ci fleurissent, chez le *G. Tetrahit*.

La section de l'entrenœud a une forme générale carrée, dans laquelle les parties angulaires sont projetées à l'extérieur et ont une forme pentagonale. Dans chacune de ces parties angulaires se trouve une colonne de collenchyme, une écorce très développée et un volumineux faisceau libéro-ligneux. Les faisceaux sont reliés par des arcs interfasciculaires, portant de

Digitized by Google

petits faisceaux accessoires. Le reste de la figure est occupé par une moelle homogène.

Reprenons de plus près ces différents tissus.

L'épiderme se compose de très petits éléments, à section tangentielle rectangulaire ou ayant la forme d'hexagones très allongés, à section transversale très irrégulièrement circulaire. La paroi extérieure est épaissie et porte une cuticule striée, à plis parallèles à l'axe de la tige. Il porte des poils sétacés à volumineux coussinets, mais pas, ou très rarement, de stomates. La paroi interne des éléments est collenchymateuse. Dans les angles, le collenchyme comprend 4-7 assises à apaississements concaves typiques peu considérables, laissant dans chaque cellule un grand lumen. L'écorce est à peu près entièrement employée aux fonctions assimilatrices. Elle se compose d'éléments sphériques ou ellipsoïdes, contenant de la chlorophylle, lâchement disposés de façon à laisser entre eux de grandes lacunes aérifères. Ces lacunes sont surtout développées au-dessous des colonnes de collenchyme, où elles constituent un véritable système de canaux aérifères séparés les uns des autres par plusieurs assises de cellules, ou par des trabécules unisériés formés par des éléments ajustés bout à bout. C'est là l'indication d'un système trabéculaire que nous retrouverons beaucoup plus développé et typique dans les cordons primaires du tube calicinal (fig. 11). L'assise qui

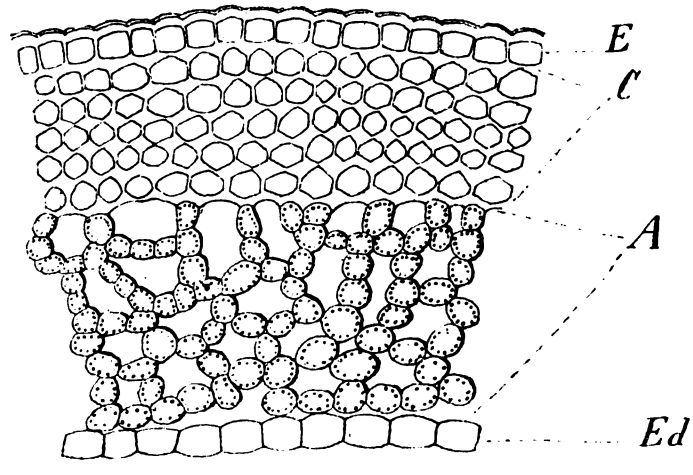


Fig. 11.
Section transversale des régions corticales angulaires dans un des derniers entrenœuds d'une tige adulte et florifère chez le *G. Tetrahit*. E, épiderme; C, colonne de collenchyme; A, tissu assimilateur; E*d*, endoderme.

Digitized by Google

précède l'endoderme a des éléments plus gros et incolores. L'endoderme ne contient plus d'amidon, ou seulement en quantité négligeable; ses parois sont entièrement subérisées, résistent à l'action de l'acide sulfurique concentré. Les éléments sont des parallélipipèdes plus ou moins réguliers, ayant en section transversale une forme rectangulaire allongée tangentiellement. Adossées à l'endoderme, dans les angles, se trouvent une zone péricyclique et une zone libérienne. A ce stade, et sur une coupe transversale, il est absolument impossible de dire où commence l'une et où finit l'autre. Contre l'endoderme, nous trouvons des éléments à gros lumens, parenchymateux ou peu prosenchymateux, entrecoupés çà et là d'éléments nettement prosenchymateux et plus petits. Ces éléments ne sont pas d'origine libérienne, ainsi que nous l'avons établi dans les chapitres précédents; mais, encore une fois, indiquer une ligne de démarcation entre eux et le cambiforme libérien serait absolument chimérique. Intérieurement, nous avons un liber où l'on reconnait comme d'ordinaire une série de plages criblées, dispersées sans ordre dans le cambiforme [1] et le parenchyme libérien, avec leurs cellules-compagnes. Dans la partie ligneuse, on distingue aisément les rayons médullaires, à éléments étroits et allongés dans le sens de l'axe de la tige, du libriforme et des vaisseaux ponctués encore peu sclérifiés. Ce n'est qu'à une profondeur de six ou sept assises que l'on trouve des éléments soumis à une énergique sclérification; après eux, enfin, se trouvent des séries de trachées initiales. L'ensemble de ce faisceau libéro-ligneux possède une section ayant la forme d'un croissant. La concavité du croissant est complètement remplie par un parenchyme ligneux tendre, à éléments prismatiques incolores, limité intérieurement par la moelle. Les arcs interfasciculaires contiennent de petits faisceaux libéro-ligneux, construits sur un plan analogue à celui des faisceaux angulaires. Ces faisceaux sont reliés par une assise plus

[1] Nous employons ce terme dans un sens plus restreint que Nägeli et de Bary, en l'appliquant aux cellules prosenchymateuses libériennes autres que les cellules-compagnes, ainsi que le font MM. K. Wilhelm et Haberlandt. — Ne pas confondre ce « cambiforme » avec le « cambiforme » de M. Bertrand. Le savant anatomiste de Lille appelle cambiforme « tout tissu dont les cellules se cloisonnent parallèlement à la surface de l'organe, et dont les produits ne sont ni du bois ni du liber ». Voy. Bertrand, *Théorie du faisceau*, p. 43. (Bull. scient. du dép. du Nord, 2me série, 3me année, 1880, nos 2, 3 et 4.)

Digitized by Google

ou moins mince, sous-endodermique (péricyclique), dont les éléments sont divisés tangentiellement, et sous-tendus par des éléments de transition appartenant plus ou moins à la moelle, légèrement sclérifiés. La moelle se se compose de gros éléments polyédriques, incolores, à membranes minces, dépourvues de ponctuations.

Stade 2. — Ce stade se trouve ordinairement un, deux ou trois entre-nœuds plus bas que le précédent; cela dépend un peu des échantillons. La tige s'est beaucoup accrue en diamètre. Sa section transversale est toujours irrégulièrement carrée, mais les parties angulaires ne forment plus des saillies pentagonales, elle sont placées à peu près au même niveau que les faces latérales; les angles sont arrondis. Les lumens des éléments épidermiques sont aplatis, leurs parois internes et externes sont plus épaisses. Les éléments du collenchyme ont leurs angles extrêmement épaissis, ils sont aplatis. L'écorce est passablement comprimée, surtout dans sa partie externe; on ne reconnaît plus la présence des canaux aérifères. L'endoderme a bien résisté à l'accroissement en diamètre et le suivant par de nouvelles divisions radiales. Le liber semble, par places, un peu écrasé; quelques éléments péricycliques commencent à se sclérifier. Le bois est très développé et la sclérification a atteint tous ses éléments, sauf l'îlot de parenchyme ligneux qui le sépare de la moelle. Les faisceaux des arcs interfasciculaires sont maintenant reliés par de fortes bandes de libriforme. La moelle, pour suivre le développement général de l'accroissement en diamètre, s'est rompue en plusieurs points et montre une grosse lacune centrale.

Stade 3. — Ce stade est représenté, dans les grandes tiges, environ par le sixième ou le septième entrenœud. Les éléments du collenchyme prennent des lumens polygonaux, grâce à l'épaississement considérable des angles, qui ont une forme carrée ou polygonale à côtés concaves; les plus externes sont aplatis. A part cela, les tissus sont en général dans le même état qu'au stade précédent. Quelques éléments péricycliques ressortent vivement par leur sclérification avancée. La lacune centrale a augmenté de dimensions (fig. 12).

Digitized by Google

Stade 4. — C'est l'entrenœud épicotyle ou un mérithalle inférieur, dont la structure n'offre pas grand changement. Les stéréides extralibériennes forment de petits groupes juxtaposés, ordinairement composés d'une seule assise, formant plus rarement des îlots d'une épaisseur de deux à trois

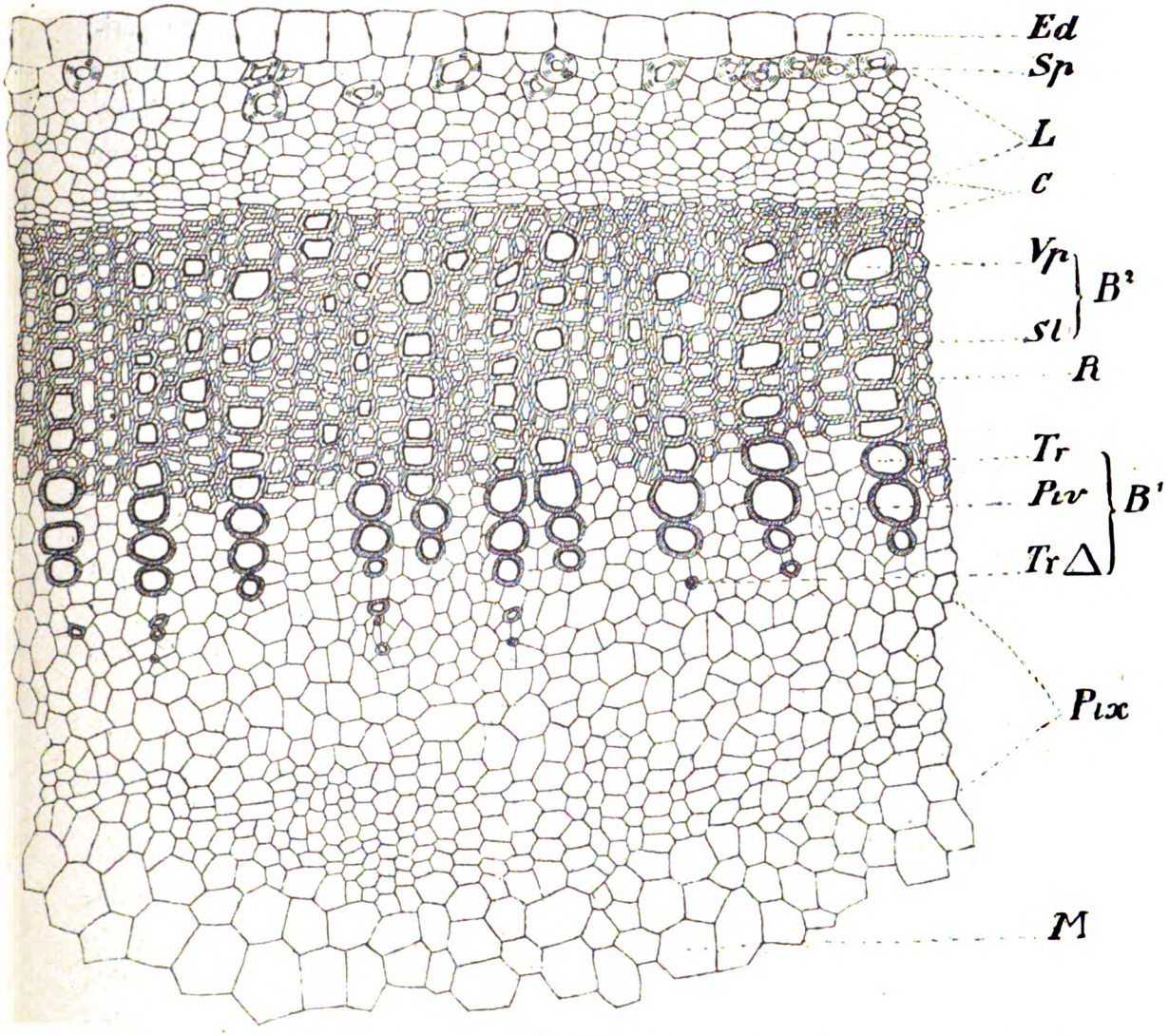


Fig. 12.

Section transversale d'un faisceau libéro-ligneux angulaire dans un entrenœud inférieur âgé du *G. Tetrahit*. Ed, endoderme; Sp, stéréome péricyclique; L, liber; c, assises cambiales; B², bois secondaire composé de vaisseaux ponctués Vp, et de stéréome libriformien Sl; B¹, bois primaire constitué par des trachées initiales Tr Δ et primaires Tr, ainsi que par du parenchyme intervasculaire Piv; R, rayon médullaire; Pix, parenchyme intraxylaire; M, moelle.

Digitized by Google

cellules. Le liber est peu écrasé. Le bois a atteint son maximum de développement, c'est-à-dire 2 millimètres d'épaisseur environ dans les angles. L'écorce s'exfolie. Tout le reste est comme au stade précédent.

Les réactions générales des tissus arrivés à la fin de leur développement ne diffèrent guère de celles que nous avons déjà étudiées.

Le réactif genevois colore également en jaune-orange le stéréome péricyclique et le bois. Dans ce dernier, les lamelles séparatrices des éléments restent roses. Tous les autres tissus sont roses. On peut, d'après cet éclectisme des éléments, étudier avantageusement avec ce colorant les ilots de stéréome péricyclique à la limite extérieure du liber, et le parenchyme intraxylaire (cellulosique) dans ses rapports avec les trachées initiales et les stéréides primaires (lignifiées).

Le chloroiodure de calcium colore le stéréome ligneux et péricyclique en jaune d'abord, puis en brun, sans que l'on puisse indiquer une différence quelconque dans la façon dont ces deux assises se comportent en face du réactif.

L'acide sulfurique colore d'abord en jaune les deux stéréomes, le ligneux prend ensuite lentement, le péricyclique rapidement une coloration verte. L'acide sulfurique laisse dans le ligneux un réseau de lamelles intercellulaires coloré en brun foncé, après la solution du reste des parois.

Examinons maintenant de plus près la structure intime des éléments fasciculaires.

Le corps du liber, après les assises cambiales, est en grande partie composé de parenchyme et de prosenchyme, de tubes criblés et de cellules compagnes.

Les tubes criblés appartiennent au type « courge » (fig. 13). Ce sont des cylindres disposés bout à bout les uns sur les autres, et séparés par des cloisons horizontales ou légèrement obliques. La cloison porte une plage criblée unique, qui en recouvre la surface entière. Le cal se forme très rapidement et occupe, arrivé à son plein développement, une certaine épaisseur des deux côtés de la plage; il montre une striation extrêmement nette. Les stries sont parcourues par de fins cordons mucilagineux, qui relient ensemble le contenu des deux tubes criblés. Le cal se creuse légèrement au

Digitized by Google

point d'entrée des cordons mucilagineux, de sorte que, coupée transversalement, sa surface suit une ligne ondulée et offre une succession de creux et de bosses. L'ensemble de l'appareil criblé a la forme d'une lentille biconvexe. Au delà des cals se trouvent des amas mucilagineux, que l'on peut contracter en petits boyaux au centre des tubes par l'action de l'alcool; ils

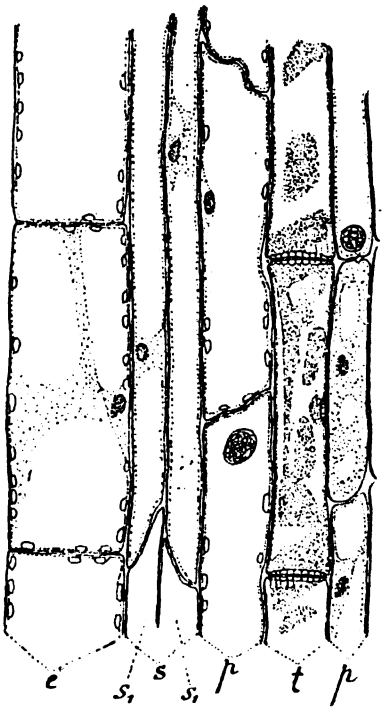


FIG. 13.

Section longitudinale opérée dans le liber primaire d'un entrenœud de la tige jeune chez le *G. Tetrahit*; *p*, parenchyme libérien; *t*, tube criblé; s_1, éléments prosenchymateux provenant du recloisonnement de l'assise péricyclique *s*; *e*, endoderme. Se reporter au texte pour les détails.

sont accompagnés d'un liquide aqueux en quantité assez considérable. On reconnaît, ce qui est inégalement facile à voir sur les différentes coupes, une couche pariétale de protoplasma, qui est sensiblement plus mince que les parois contre lesquelles elle s'applique; mais, de même que M. Strasburger [1], nous n'avons pas réussi à trouver le noyau indiqué par M. Lecomte [2]

[1] STRASBURGER, *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen*, p. 289. (HISTOLOGISCHE BEITRÄGE, III, 1891.)

[2] LECOMTE, *Contribution à l'étude du liber des Angiospermes*, p. 284. (ANN. DES SC. NAT., 7me série, t. X, 1889.)

Digitized by Google

comme persistant dans certains cas, ni dans cette couche de plasma, ni dans le mucilage. Outre les plages criblées transversales, on en constate de latérales qui aboutissent aux cellules-compagnes. Ces plages sont ordinairement plus petites et ne possèdent de cal que du côté du tube criblé. Çà et là on en voit même qui communiquent avec les cellules parenchymateuses dispersées dans le liber. Le calibre des tubes criblés est en général peu considérable; il est souvent dépassé par celui des éléments du parenchyme libérien.

Ce parenchyme se compose de grandes cellules à cloisons transversales horizontales ou obliques. Leurs parois sont recouvertes d'une couche de protoplasma plus ou moins granuleux, qui emprisonne çà et là des chloroleucites amylogènes. En cherchant, on finit toujours par trouver dans ce plasma un noyau ellipsoïdal. Le calibre des éléments de ce parenchyme, qui offre des transitions vers le cambiforme proprement dit [1], est très variable.

Les cellules-compagnes sont jumelles des tubes criblés; elles contiennent un noyau et un utricule protoplasmique très granuleux. Au début, on peut aisément les distinguer du cambiforme, mais plus tard elles se sectionnent par des cloisons longitudinales et forment des groupes qu'il est très difficile de séparer des petits éléments environnants, d'origine différente.

Les réactions des parties constituantes du liber ne diffèrent pas des données générales que l'on a obtenues chez d'autres plantes. Mentionnons cependant deux légères différences d'avec les précieuses indications de M. Lecomte. Le cal se colore en jaune foncé et sâle, plutôt qu'en rouge-brique, par le chlorure de zinc iodé [2]. L'action du bleu d'aniline est d'ordinaire sensiblement la même sur les cellules-compagnes que sur le cambiforme, tout en étant plus marquée que sur le parenchyme libérien à gros éléments [3].

Dans tous les cas où nous avons pu nous livrer à une investigation rigoureuse et certaine, nous avons constaté que les tubes criblés ou leurs cellules-compagnes ne sont jamais adossés directement à l'endoderme. Au

[1] Voyez, plus haut, la note au bas de la page 49.
[2] Lecomte, *l. c.*, p. 268.
[3] Ibid., *l. c.*, p. 213.

Digitized by Google

contraire, ils en sont toujours séparés par des éléments différents. Les uns sont de grandes cellules parenchymateuses, à cloisons transversales plus ou moins inclinées; elles correspondent aux cellules à large lumen que l'on trouve sur une coupe transversale. Les autres sont des éléments plus étroits, allongés, effilés aux deux bouts, plus prosenchymateux que les précédents. Le développement de ces éléments extralibériens [1] s'effectue d'une façon analogue à celui du parenchyme et du prosenchyme intralibériens du liber primaire, c'est-à-dire qu'ils dérivent d'éléments particuliers, situés à la limite du procambium, au lieu d'être situés en dedans de celui-ci, qui, sauf les cas où ils gardent leur apparence première, subissent des divisions d'abord tangentielles, puis radiales, dont les dérivés ne constituent pas de tubes cribliés et, conséquemment, pas de cellules-compagnes. On peut donc dire qu'il n'y a pas de différence essentielle dans la valeur histologique du parenchyme intra- et extralibérien, soit au point de vue génétique, soit au point de vue de la structure primaire. Il n'y a que leur position topographique qui puisse les distinguer, et encore la limite des deux formations est-elle le plus souvent impossible à indiquer. Dans les entrenœuds inférieurs de la plante adulte, une bonne partie de ces éléments extralibériens est sclérifiée et constitue des stéréides typiques, ou au moins très rapprochées de celles que présente le libriforme.

Passons maintenant en revue les éléments histologiques du bois, de plus près, sur des coupes longitudinales.

La moelle, dont les éléments ont la forme d'hexagones aplatis dans le sens de la hauteur, et très larges, est limitée vers le bord des faisceaux par un parenchyme contenant très longtemps des chloroleucites amylogènes. Ces éléments sont plus hauts que larges, et plus allongés que les éléments de la moelle. Les premières formes vasculaires que l'on rencontre ensuite en allant vers l'extérieur sont les trachées initiales et primaires.

On trouve, sur une coupe radiale, une série de 3-6 de ces trachées. Les plus anciennes sont entourées du parenchyme ligneux cellulosique dont nous

[1] Ce terme, dont nous nous sommes déjà souvent servi comme synonyme de « péricyclique », a été introduit par M. Lecomte (*l. c.*, p. 220) pour ne pas préjuger, en parlant de ce tissu, de la question des homologies péricycliques.

Digitized by Google

venons de parler, et ont leurs tours de spire moins rapprochés que les externes. Les premières, en se déroulant, donnent une spire formée par un seul spirule; les plus internes déroulent volontiers 2-3 spirules à la fois. Chez ces dernières, les tours de spire se touchent presque, et les différences de réfringence produites par l'alternance des parties libres et des parties couvertes produisent une alternance de bandes roses et blanches.

A cette zone trachéale initiale et primaire succède une zone secondaire, dans laquelle les trachées sont brusquement remplacées par des vaisseaux ponctués. Ce sont des vaisseaux ordinairement de fort calibre et ouverts; les diaphragmes des vaisseaux qui persistent dans certains cas, rarement pendant longtemps, ne sont jamais permanents. Les ponctuations sont doubles, arrondies ou un peu ellipsoïdes; le grand axe de l'ellipse est placé à peu près horizontalement; sur ce grand axe, on voit une bande rose qui n'est autre que l'ouverture de l'entrée dans la chambre interne de la ponctuation. La chambre de la ponctuation n'est pas seulement séparée du tube par une entrée immédiate, mais le plus souvent elle s'allonge en un petit vestibule. Comme on le voit, cette structure est identique à celle que nous avons signalée dans les racines. Les vaisseaux sont interrompus au début par du parenchyme ligneux; puis exclusivement par du libriforme, du côté de la zone cambiale. Le libriforme prend un énorme développement dans les entrenœuds inférieurs adultes. La structure des stéréides libriformiennes ayant déjà été décrite dans la racine, nous n'y reviendrons pas. Notons leur disposition en séries radiales très régulières, intercalées de rayons médullaires unisériés. Ces rayons médullaires sont, à un niveau quelconque qui n'est pas toujours celui de la première section transversale venue, en contact avec les vaisseaux ponctués. Cette disposition des deux sortes d'éléments est rendue nécessaire par l'absence, dans le bois secondaire, d'éléments parenchymateux autres que les rayons médullaires.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, les éléments des rayons médullaires sont parenchymateux, allongés dans le sens de l'axe de la tige et munis de nombreuses ponctuations. Cette disposition « dressée » des cellules appartenant aux rayons médullaires a été signalée par M. Born, qui a insisté sur le fait que la disposition « dressée » se rencontre surtout dans les plantes

Digitized by Google

herbacées, et la disposition « couchée » surtout chez les végétaux arborescents [1]. Les termes de cellules « dressées » et « couchées » datent de de Bary [2]. M. Kny [3] a plus récemment proposé d'appeler les éléments qui nous occupent, des « palissades médullaires », et les éléments couchés un « mérenchyme médullaire »; nous préférons l'ancienne appellation, parce qu'elle est plus courte et que la nouvelle n'implique rien de spécial sur la nature des éléments en question.

CHAPITRE XI.

STRUCTURE DE LA TIGE ADULTE DANS LE SOUS-GENRE *LADANUM*.

Le sous-genre *Ladanum* ne possédant pas de renflements moteurs sur les tiges, nous pourrons réunir l'étude des régions nodales à celle des entrenœuds.

La coupe transversale de l'entrenœud situé au-dessous du dernier verticillastre, après la floraison, présente la structure suivante, le *G. Ladanum* var. *intermedia* étant pris comme type.

La section est irrégulièrement carrée; les angles sont arrondis. L'épiderme se compose de petits éléments tabulaires, à section tangentielle rectangulaire ou hexagonale, allongée, à section transversale arrondie, grâce au développement collenchymateux des parties angulaires; la cuticule est striée. Cet épiderme porte des glandes stipitées uni-pluricellulaires, ou presque sessiles, suivant les cas. Les poils sont bi-tri-quadricellulaires; la cellule basilaire s'est parfois divisée longitudinalement, mais jamais il n'y a formation de coussinets entourant la base des poils comme dans la section *Tetrahit;* ces poils portent de rares perles cuticulaires. L'assise corticale hypodermique est collenchymateuse. L'écorce se compose de 6-7 assises d'éléments sphériques ou polyédriques laissant entre eux de petits méats aérifères, de section carrée ou polygonale; il n'y a pas formation de canaux aérifères comme dans le

[1] Born, *Vergleichend systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., p. 43.

[2] de Bary, *Vergleichende Anatomie*, p. 501.

[3] Kny, *Ein Beitrag zur Kenntniss der Markstrahlen dicotyler Holzgewächse.* (Berichte der deutschen bot. Gesellschaft, 1890, p. 176.)

Digitized by Google

groupe *Tetrahit;* l'écorce est homogène, elle contient peu de chlorophylle. L'endoderme se compose de petits éléments à membranes subérisées, ayant la forme de parallélipipèdes, ne contenant plus que des traces d'amidon. Avant de quitter l'écorce, mentionnons les bandelettes de collenchyme angulaires, fortes de 3-4-6 assises, à épaississements formant des colonnes polyédriques, à faces concaves. Le liber est séparé de l'endoderme par une zone péricyclique à membranes un peu épaisses et un peu jaunâtres. Les éléments libéroligneux sont groupés en quatre faisceaux angulaires très étalés, offrant les mêmes dispositions que dans le sous-genre *Tetrahit*, sauf que l'on ne trouve pas la concavité du faisceau remplie par une aussi grande quantité de parenchyme tendre; ce dernier se trouve plus localisé au voisinage immédiat des trachées; il montre, en outre, dans les pieds âgés, une tendance à se lignifier. Les faisceaux sont séparés les uns des autres par des arcs étroits, essentiellement composés de libriforme. Le centre de la tige est occupé par une moelle à gros éléments polyédriques, à parois tendres, dont quelques-uns sont pourvus de ponctuations simples, lancéolées, extrêmement peu profondes.

Cette structure fondamentale se poursuit sans transformation jusqu'au bas de la tige. Par l'action du cambium interfasciculaire, les bandes libéroligneuses qui rejoignent les faisceaux deviennent de plus en plus épaisses : on distingue encore cependant les quatre grosses masses angulaires. La moelle persiste. Il ne se forme pas de stéréides péricycliques. La structure intime des éléments et leurs réactions sont les mêmes que chez le *G. Tetrahit.*

La région nodale n'offre pas de particularités, si ce n'est que la moelle s'interrompt presque toujours au centre du nœud, pour reprendre au-dessus. Le mode de division des faisceaux n'est plus visible que dans les nœuds tout à fait supérieurs; nous l'avons déjà étudié dans les entrenœuds inférieurs de la jeune tige.

Il reste à mentionner que les bases des pétioles, dans les nœuds, sont reliées par une écorce dont les éléments sont collenchymateux. C'est ce tissu mécanique que Mirbel avait autrefois appelé « bride vasculaire », croyant que les bandes en question contenaient des anastomoses transversales libéro-ligneuses, qui reliaient ensemble les deux pétioles d'une même paire de feuilles [1]. Kirch-

[1] Mirbel, *Mémoire sur l'anatomie et la physiologie des Labiées*, p. 46 et fig. I, II, III. (Ann. du Mus. d'hist. nat., t. XV, 1810.)

Digitized by Google

hoff, qui a relevé l'erreur de Mirbel, voit cependant dans cette observation, en la corrigeant, la preuve que Mirbel avait déjà distingué ses anastomoses nodales interfasciculaires, ce qui nous semble au moins très invraisemblable, à en juger d'après l'exposé anatomique de l'illustre botaniste français [1]. Kirchhoff a donné aux « brides » de Mirbel, alternativement le nom de « torus » et de « vaginae » ; nous retenons ce dernier nom pour désigner une formation dont le rôle mécanique dans la solidité du verticille foliaire est tangible.

Une zone analogue de collenchyme passe aussi sur les rameaux axillaires et forme, par-dessus leur base, des bourrelets mécaniques parfois très volumineux. Ces bourrelets mécaniques maintiennent solidement les rameaux dans leur position sur la tige; elles frappent le regard par leur vive coloration rouge, surtout en automne.

Les variantes de structure dans le type que nous venons d'étudier sont peu nombreuses.

Parmi les plus importantes, il convient de signaler les dépôts cireux du *G. Reuteri*. L'épiderme de tous les entrenœuds, sauf les plus supérieurs, est glabre ou à peu près glabre. De très bonne heure déjà, l'épiderme isole à sa surface, surtout dans le voisinage des nœuds, de la cire. Cette cire se présente sous la forme de granules sphériques juxtaposés en plus ou moins grande quantité, et facilement solubles à chaud dans l'alcool et l'éther. Ces dépôts de cire peuvent se retrouver dans les trois espèces du groupe *Tetrahit*, particulièrement dans le *G. speciosa* var. *sulfurea*, mais ils offrent moins de constance.

Toutes les espèces du sous-genre *Ladanum* portent aux quatre coins de leurs jeunes tiges des colonnes de collenchyme assez saillantes. Avec l'accroissement en diamètre des axes, ces colonnes sont étirées tangentiellement, et prennent plutôt la forme de bandelettes. C'est chez le *G. Reuteri* que ce processus s'opère le plus rapidement; aussi est-ce lui qui a les tiges les moins carrées. Le *G. Ladanum* subsp. *intermedia* le suit de près, tandis que les *G. Ladanum* subsp. *angustifolia*, *G. pyrenaïca* et *G. dubia* conservent le plus longtemps leur collenchyme angulaire sous forme de colonnettes distinctes.

[1] Kirchhoff, *De Labiatarum organis vegetativis*, p. 12. Bonn, 1861.

Digitized by Google

Chez quelques formes, particulièrement du *G. villosa*, les entrenœuds supérieurs font proéminer à l'extérieur, d'une manière plus ou moins distincte, leurs parties angulaires dans lesquelles se trouvent les faisceaux libéro-ligneux.

La distribution des éléments chlorophylliens offre souvent une singulière particularité dans le sous-genre *Ladanum*. Tandis que d'ordinaire le système mécanique collenchymateux et le système assimilateur se partagent la périphérie de la tige, de telle sorte que le collenchyme occupe les angles et le parenchyme chlorophyllien les faces, nous trouvons ici la superposition angulaire du parenchyme assimilateur et du collenchyme. Parfois le parenchyme chlorophyllien fait tout le tour de la tige, mais il est plus puissant sous le collenchyme que sur les angles (certains pieds de *G. pyrenaïca* et de *G. dubia*); ailleurs, il manque totalement sur les faces. Un cas qui est fréquent chez le *G. Ladanum*, c'est l'absence totale de chlorophylle sur deux ou trois points des faces, tandis que tout le reste de la périphérie de la tige est chlorophyllien. Nous avouons ne pouvoir donner aucune explication de cette distribution qui *paraît* irrationnelle; elle n'offre pas de constance dans les différents groupes et se trouve soumise, dans de certaines limites, à la variation individuelle.

Enfin, chez quelques formes très robustes des *G. Ladanum* var. *intermedia*, *G. dubia* et *G. pyrenaïca*, il se forme exceptionnellement, au bas de la tige, un canal médullaire central.

CHAPITRE XII.

STRUCTURE ET DÉVELOPPEMENT DES RENFLEMENTS MOTEURS.

Les tiges, dans le sous-genre *Tetrahit*, ont ceci de particulier que, à une certaine distance au-dessous des nœuds, le calibre des entrenœuds augmente assez rapidement pour former un renflement assez volumineux, de forme plus ou moins quadrangulaire, allongé en cou de bouteille à la base, et légèrement rétréci au-dessous du nœud (fig. 14). Dans la partie tout à fait supérieure de la tige, les renflements sont extérieurement peu différenciés des

Digitized by Google

entrenœuds proprement dits [1]; ils le sont davantage à mesure que l'on descend vers la racine.

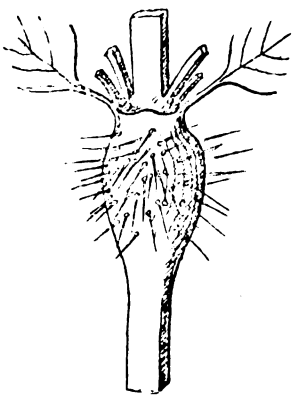


FIG. 14.
Apparence extérieure d'un renflement moteur du *G. Tetrahit*, pris dans la région caulinaire moyenne.

Les chiffres suivants, pris dans une tige adulte du *G. Tetrahit* ayant huit entrenœuds développés, donneront une idée des rapports de calibre qui existent entre les renflements et l'entrenœud sous-jacent.

TABLEAU I.

NUMÉRO du nœud.	DIAMÈTRE de l'entrenœud en millimètres.	DIAMÈTRE du renflement en millimètres
1	1,3	1,7
2	1,5	2
3	1,8	2,3
4	2	2,5
5	3	4
6	5,5	5,5
7	5	8,5
8	5,5	10

[1] Nous appellerons, dans la suite, la partie de la tige qui s'étend du renflement au nœud sous-jacent, simplement *entrenœud*, par opposition aux *renflements*.

Digitized by Google

Les tubercules sont soumis à quelques variations, quant au calibre, suivant les espèces et les formes. Ceux du *G. pubescens* sont presque toujours plus grêles que dans les *G. speciosa* et surtout *Tetrahit*.

Une variation spéciale existe encore chez le *G. pubescens*, en ce qui concerne l'indument de la région renflée. Tandis que chez les *G. Speciosa* et *Tetrahit*, l'indument se compose presque exclusivement de poils sétacés, ces derniers sont, chez le *G. pubescens*, mélangés d'une quantité assez considérable de poils dépourvus d'un coussinet en entonnoir autour de leur cellule basilaire.

Un point à mentionner, c'est la production de racines adventives sur les renflements placés dans des conditions d'humidité et d'obscurité suffisamment favorables. Ces racines adventives ne sont pas disposées dans un ordre rigoureux. Parfois on les voit alignées en séries, placées sur les angles ; ailleurs elles forment une ligne transversale ; le plus souvent elles sont insérées au hasard, par touffes de trois ou quatre.

Étudions maintenant la structure anatomique d'un renflement bien développé chez le *G. Tetrahit*.

L'épiderme est formé par de très petits éléments tabulaires, à cuticule striée, à parois internes collenchymateuses ; en section transversale, les éléments ont la forme de rectangles allongés suivant le rayon. Les cellules épidermiques contiennent de la chlorophylle et ont l'apparence du jeune épiderme sous le point végétatif.

Les angles du renflement sont très émoussés ; néanmoins, ils contiennent un collenchyme primitif de forme particulière, qui peut atteindre une épaisseur de douze assises de cellules et au delà (fig. 15). Ce collenchyme a commencé à se différencier dès le début ; aussi a-t-il entièrement atteint sa forme définitive. Ses éléments sont encore vivants, mais témoignent de leur vie par une division beaucoup moins active que le collenchyme angulaire interne et le collenchyme des faces. Les lumens des éléments ont en général une forme hexagonale, mais ils indiquent l'âge du tissu par le fait qu'ils sont allongés tangentiellement. Les épaississements angulaires sont énormes, mais en général ils ne se rejoignent pas dans une même cellule, c'est-à-dire qu'*ils* laissent entre eux une portion de la paroi primitive mince. Çà et là cepen-

Digitized by Google

dant, suivant la position réciproque des éléments, ils forment des îlots polygonaux ou sinueux, mais alors à bords très anguleux, qui peuvent prendre des dimensions considérables. Ce collenchyme angulaire a des reflets plus grisâtres que le collenchyme cortical proprement dit; c'est un collenchyme concave typique.

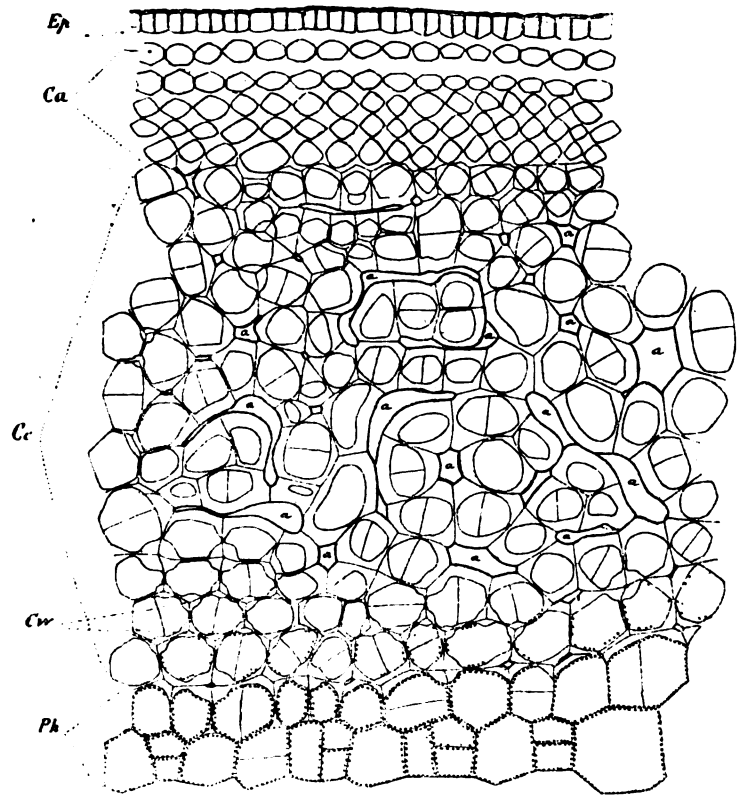


FIG. 15.

Section transversale des régions angulaires corticales d'un renflement moteur développé chez le *G. Tetrahit*. *Ep*, épiderme ; *Ca*, colonne de collenchyme angulaire; *Cc*, collenchyme cortical proprement dit, à nombreux méats aérifères A, et à colonnettes parfois convexes *Cw*; *Ph*, zone phlœotermique chlorophyllienne et amylogène.

Le collenchyme cortical proprement dit (fig. 15) provient d'une transformation plus récente du parenchyme cortical. Ainsi que nous l'avons vu dans la tige et que nous le reverrons un peu plus loin en suivant la différenciation des renflements, le parenchyme cortical est très lacuneux. Le collenchyme se forme par épaississement des membranes du côté de la lacune, et l'on

Digitized by Google

obtient alors un bel exemple de *collenchyme lacuneux,* tissu assez rare pour que nous l'examinions de plus près, et qui a fait récemment l'objet d'une étude particulière de M. Carl Müller [1]. Le cas le plus simple est celui où quatre ou trois cellules se rencontrent, en laissant entre elles un méat de section carrée ou triangulaire. Les cellules épaississent leurs parois contre ce méat, et la coupe transversale donne parfaitement l'impression d'une stéréide à section carrée ou plus ou moins triangulaire, plongée entre quatre ou trois cellules de parenchyme. Ainsi que le dit très bien M. Carl Müller, ce n'est là que l'impression d'un instant, car on peut, sans réactif aucun, suivre très facilement la membrane primitive de chaque cellule, la voir entrer dans l'épaississement et longer les contours internes de la pseudo-stéréide. Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'une coupe longitudinale ou l'examen d'états plus jeunes amènent infailliblement aux mêmes résultats. Mais les méats intercellulaires affectent, sur une quantité de points, les allures de véritables canaux d'un diamètre considérable et entourés de plusieurs cellules. Les épaississements se produisent sur toutes les faces donnant sur le canal, et les pseudo-stéréides prennent alors les formes les plus bizarres; leur section prend une forme polygonale régulière à cinq, six, sept, huit faces, etc., ou bien elle affecte l'apparence d'un fer à cheval, d'un S, d'un X, d'un Z, etc., figures capricieuses, qui dépendent entièrement de la forme des méats et du degré de cohésion des éléments du parenchyme. Partout la membrane primitive, ainsi que la présence ou l'absence de plasma, permettent de reconnaître ce qui est cellule de ce qui est méat. Du côté interne, le collenchyme est plus jeune, car sa différenciation est centripète. Là, les épaississements angulaires ne laissent volontiers au centre des colonnettes qu'un lumen très réduit. Ce qu'il y a de plus intéressant dans cette région, c'est la formation d'un collenchyme *convexe* assez bien caractérisé. Il est surtout net aux points où trois cellules se rencontrent, et forme alors, mais jamais sur une grande étendue, une mosaïque de triangles sphériques tranchant vivement par leur couleur blanche sur le fond mat des lumens. Tous ces éléments sont vivants et se divisent activement par des parois verticales. Les divisions horizontales

[1] C. Müller, *Ein Beitrag zur Kenntniss der Formen des Collenchyms.* (Berichte der deutschen bot. Gesellschaft, t. VIII, 1890, p. 159.)

Digitized by Google

ne s'effectuent que dans une mesure beaucoup plus faible, et surtout sur le côté convexe des renflements en train d'opérer une flexion. Les nouvelles parois montrent bien une tendance générale à couper perpendiculairement les parois existantes; cependant on en trouve qui forment avec ses dernières des angles très variés, parfois sphériques. La majorité de ces parois est orientée radialement, ce qui fait que l'écorce est en état de suivre rapidement l'accroissement en diamètre du cylindre central.

L'endoderme n'est pas subérisé du tout (fig. 15). Ses éléments sont vivants, à parois minces, contiennent un plasma granuleux, un gros noyau, et sont remplis de chloroleucites amylogènes. Autrement dit, l'endoderme est à l'état de gaine amylifère. Mais il ne s'en tient pas là : il se divise activement par des cloisons radiales, tangentielles et obliques. Les éléments dérivés du phlœoterme [1] constituent deux assises ou davantage, chlorophylliennes et vivantes; par places même la division est assez active pour donner naissance à un plexus pluricellulaire; repoussés au dehors, ces éléments se transforment peu à peu en collenchyme. Ce n'est que bien plus tard, alors que les éléments mécaniques du bois ont pris un développement considérable et que les courbures des renflements ont cessé de se produire, que l'assise phlœotermique mère se subérise et constitue un endoderme typique semblable à celui des entrenœuds.

Adossé directement au phlœoterme arrive le péricycle, fort de deux à quatre assises et entièrement collenchymateux (fig. 16). Les épaississements des éléments péricycliques ne sont pas limités aux angles, mais s'étendent aussi aux parois. La plupart des éléments se divisent activement pour suivre l'accroissement en diamètre des tissus sous-jacents. Dès que les renflements

[1] Nous trouvons ce terme, introduit par M. Strasburger, extrêmement commode. En effet, l'assise la plus interne de l'écorce commence par ne pas pouvoir se distinguer des autres; elle devient une gaine amylifère, ensuite un endoderme. Le terme d'endoderme, appliqué à tous ces états dans lesquels la constitution et la fonction des éléments est différente, ainsi que l'a fait M. Van Tieghem, doit être abandonné comme prêtant à des confusions. Il est donc heureux que nous ayons une désignation précise pour l'assise la plus interne de l'écorce, indépendamment des adaptations qu'elle subit. Voy. Strasburger, *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen*, pp. 309-310. (Histologische Beiträge, III, 1891.)

Digitized by Google

ont atteint un certain âge, un examen attentif décèlera, entre certaines cellules du collenchyme péricyclique, des petits éléments de section circulaire fortement sclérifiés. Ces petits éléments sont entièrement entourés par les épaississements collenchymateux des cellules environnantes. Il est extrêmement facile de les négliger, sur un examen rapide, si l'on n'est pas averti de leur présence à l'avance : c'est probablement la raison pour laquelle M. Rützon ne les a pas vus [1]. Ainsi qu'on s'en apercevra tout à l'heure, les réactifs indiquent que leurs membranes sont lignifiées, tandis que les tissus environnants sont constitués par de la cellulose pure. Des coupes longitudinales démontrent que ce sont là des stéréides typiques. Leur nombre augmente avec l'âge du renflement.

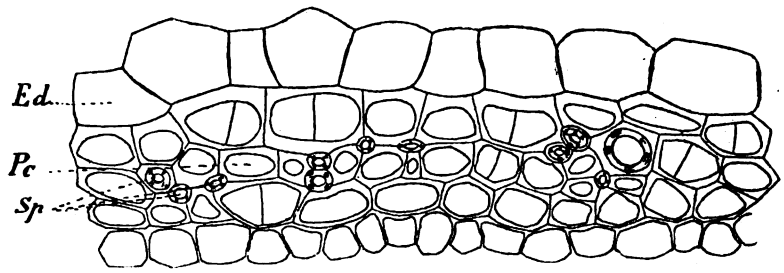


FIG. 16.
Section transversale de la région péricyclique dans du renflement moteur du *G. Tetrahit*, au moment de la différenciation de l'endoderme; Pc, collenchyme péricyclique; Sp, stéréides plongées dans le collenchyme péricyclique; Ed, endoderme.

Le liber forme une couche forte de trois à quatre assises environ, intercalée entre le collenchyme péricyclique et le bois (fig. 17). Les parois des éléments sont beaucoup moins épaissies que celles de la zone extralibérienne. On y distingue un parenchyme à gros éléments, contenant de l'amidon, intercalé de cambiforme. Çà et là, on remarque des îlots grillagés, à plages grillagées fort petites et à treillis peu compliqué. Ces îlots sont entièrement constitués par des tubes criblés et des cellules-compagnes, et dérivent par recloisonnements successifs d'une seule cellule procambiale primitive. Cette exagération des divisions dans les cellules procambiales qui, au lieu d'aboutir à la formation d'un tube criblé et d'une ou deux cellules-compagnes — ainsi

[1] RÜTZON, *Om Axeknuder*. (BOTANISK TIDSKRIFT, 1881, t. XII, pp. 248-264.) L'auteur dit, dans son résumé au sujet du liber : « il n'y a pas de liber dur ».

Digitized by Google

que c'est le cas en général, — aboutit à en former des îlots est un processus qui paraît répandu chez beaucoup de Gamopétales [1].

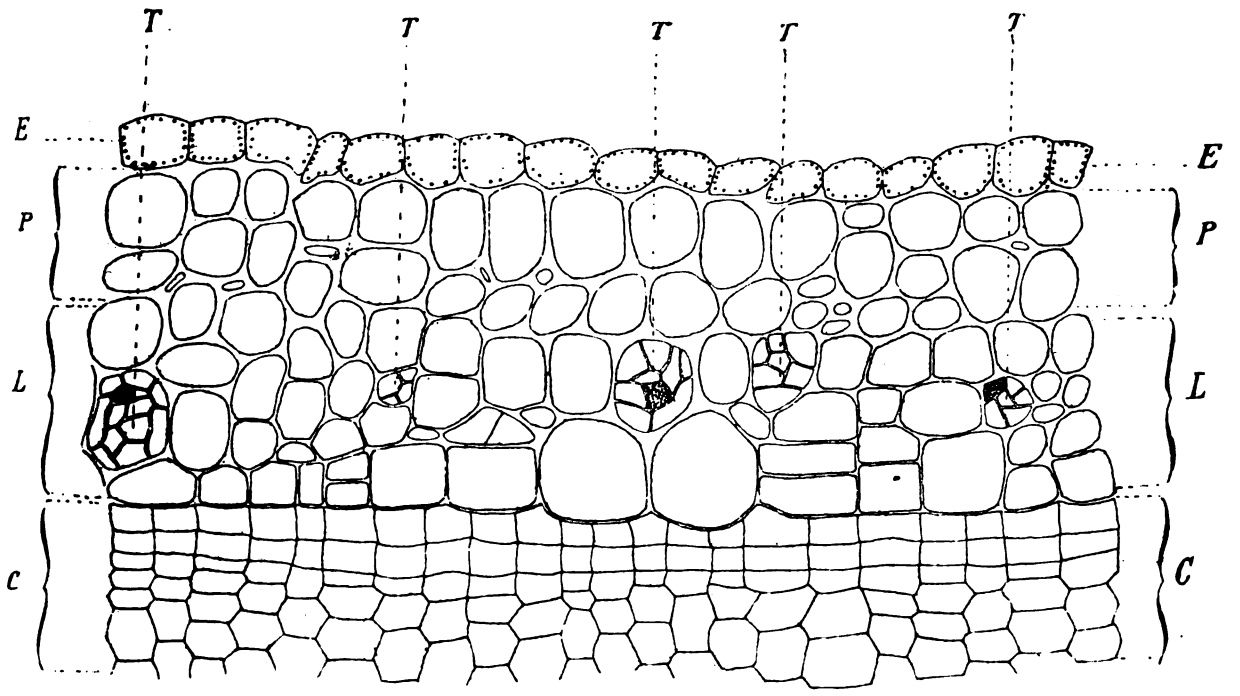


FIG. 17.
Section transversale des tissus situés entre la gaine amylogène et le cambium, dans un renflement moteur développé du *G. Tetrahit*. E, assise interne de la gaine amylogène (phlœothermique); P, collenchyme péricyclique; I, liber montrant en T des îlots grillagés; C, assises cambiales.

Le bois se compose d'une zone centrifuge secondaire, à éléments mécaniques développés, et d'une zone centripète primaire, bien plus considérable que la précédente, dépourvue d'éléments mécaniques. La zone mécanique est essentiellement composée de stéréides libriformiennes à parois passablement sclérifiées, et qui forment une couche ordinairement forte de 4-8 assises.

Ces stéréides entourent çà et là des vaisseaux ponctués de médiocre calibre, construits sur le type de ceux que nous avons décrits dans les entre-nœuds adultes. La zone mécanique est coupée par des rayons médullaires à éléments parenchymateux dressés, à parois peu ou pas sclérifiées. La zone centripète (fig. 18) est essentiellement caractérisée par l'absence de tissus scléreux autres que des trachées primaires à spirules déroulables. Ces trachées

[1] Voyez à ce sujet les indications de MM. de Janczewski, Bourriez, Vesque et Hoselacque.

Digitized by Google

forment des séries radiales, dans lesquelles le calibre des éléments diminue à mesure que l'on va de la périphérie au centre. Les plus extérieures sont souvent accolées par groupes de deux ou trois. Ces trachées sont toutes plongées dans des tissus tendres qui les environnent de toute part, à l'exception toutefois des plus extérieures qui touchent et pénètrent même un peu dans la zone mécanique.

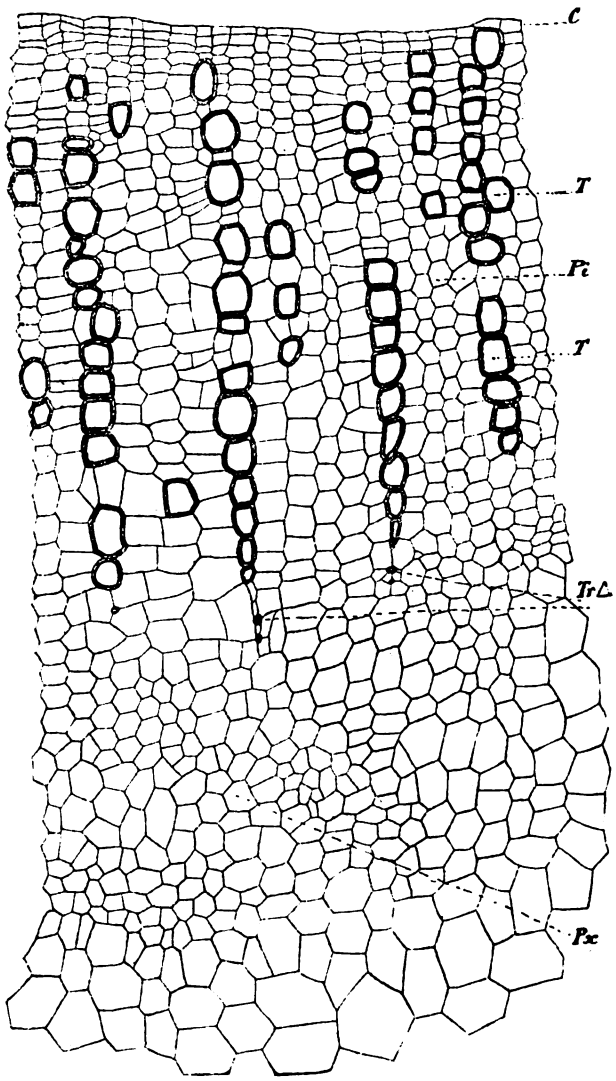


FIG. 18.

Section transversale de la région ligneuse dans un renflement moteur du *G. Tetrahit* à l'état primaire; C, assises cambiales; T, trachées primaires; Pi, parenchyme intervasculaire; Tr Δ, trachées initiales; Pa, parenchyme intraxylaire.

Digitized by Google

Le tissu tendre situé entre les rayons vasculaires est formé d'éléments à parois cellulosiques, de section transversale polygonale et de calibre assez variable. Des coupes longitudinales apprennent qu'ils consistent exclusivement en parenchyme, à éléments allongés, se superposant par des parois horizontales ou presque horizontales. Entre les trachées initiales et les premières trachées primaires des rayons vasculaires consécutifs, ce parenchyme est étiré tangentiellement. Ce tissu forme encore un gros îlot (fig. 24) à la face interne des faisceaux, îlot qui, dans sa partie la plus épaisse, peut se composer de 8-11 assises d'éléments; le calibre de ses cellules est en général un peu plus fort que celui des éléments intercalés aux trachées; ses éléments extérieurs emprisonnent les trachées initiales.

Ce parenchyme intraxylaire, dont nous avons déjà parlé à plusieurs reprises, a fait pour d'autres groupes l'objet d'une étude spéciale de M. Raimann [1]. Cet auteur arrive, entre autres résultats, à cette conclusion, que le parenchyme en question n'a pas de fonctions connues, et constitue probablement un organe rudimentaire. Nous ne pouvons, à aucun degré, accepter ces deux opinions. Tout d'abord, ce parenchyme est bourré de chloroleucites amylogènes, très abondants dans le jeune âge et qui persistent toujours en plus ou moins grande quantité dans la suite. L'amidon et les autres hydrates de carbone qui s'y produisent sont enlevés au fur et à mesure que la plante croît, pour être transportés, sous une forme chimique soluble, aux points où de nouveaux tissus se constituent. On peut donc dire que ce parenchyme joue dans l'élaboration et l'accumulation des matériaux assimilés le même rôle que les autres parenchymes ligneux. En second lieu, le parenchyme intraxylaire contient de l'eau, et il est évident que sa position autour des trachées est en relation avec le transport de l'eau (au moins dans le jeune âge pour les plantes arborescentes). Cette eau passe directement du parenchyme dans la région phlœotermique, et le reste de l'écorce par les rayons médullaires; pour ce qui concerne les renflements moteurs dans les entrenœuds munis d'un endoderme imperméable, elle se limite à alimenter le cambium et le liber. On voit donc par cette simple esquisse que la désigna-

[1] Raimann, *Ueber unverholzte Elemente in der innersten Xylemzone der Dicotyledonen.* (Sitzungsber. der k. k. Akad. der Wissensch. in Wien, t. XCVIII, pars I, 1889.)

Digitized by Google

tion d'« afonctionnel », donnée à ce tissu, est singulièrement peu justifiée [1]. Mais il n'est pas jusqu'à la dénomination même de « cambiforme intraxylaire », donnée à ce tissu par M. Raimann, que nous ne pouvions approuver. Le terme de « cambiforme » a primitivement été réservé pour les éléments prosenchymateux du liber, afin d'exprimer l'analogie de forme qu'ils ont avec les éléments du cambium [2]. Or, nous avons ici un parenchyme typique dont les cellules superposées sont séparées les unes des autres par des cloisons horizontales. Le terme « cambiforme » éveille donc l'idée d'une forme histologique qui n'est pas du tout celle du tissu en question. M. Strasburger, qui appelle ce parenchyme un « primäres Vasalparenchym », se borne à relever l'opinion de Raimann sans porter sur elle de jugement [3]. Une confusion plus grave paraît avoir été faite par M. Dennert, lorsqu'il a appelé ce parenchyme un « cambium interne » [4]. On comprend encore la désignation de cambium pour le tissu situé entre le liber interne et le bois des Cucurbitacées (Bertrand, Lotar), mais le parenchyme intraxylaire ne possède pas un seul des caractères essentiels du cambium. C'est pourquoi nous ne pouvons qu'approuver la critique qui a été faite par M. Born des conceptions histologiques de M. Dennert [5].

[1] Une question différente est celle de savoir si le parenchyme intraxylaire peut être homologué avec un liber périmédullaire. C'est un point du plus haut intérêt, mais dont la discussion nous entraînerait trop loin de notre sujet.

[2] Voyez, au sujet du « cambiforme » de M. Bertrand et de ses élèves, notre note, quelques pages plus haut.

[3] Strasburger, *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen*, p. 257. (Histologische Beiträge, III, 1891.)

[4] Dennert, *Beiträge zur anatomischen Systematik*, III, *Cruciferae*, pp. 98 et 106 (dans les Botanische Hefte, herausgegeben von A. Wigand, Heft 1.)

[5] Born, *Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen*, etc., p. 28. Nous ajoutons que, pour notre compte, les explications de M. Dennert sont restées passablement obscures. Qu'est-ce qu'un « weichbastartiges Gewebe », produit de son soi-disant « cambium »? Les régions intraxylaires de la tige des Crucifères qui ont l'apanage de ce singulier tissu possèdent-elles ou ne possèdent-elles pas des tubes criblés? C'est là, ou jamais, le cas d'appliquer la règle posée par M. Vesque (*Anatomie comparée de l'écorce*, p. 53) : « L'élément tout à fait caractéristique du système libérien est la cellule » grillagée, et là où cet élément manque il ne faut parler du liber qu'avec une extrême » réserve, et surtout n'appliquer ce mot à des tissus situés ailleurs qu'à la place ordinaire » du liber que quand il y a des raisons sérieuses pour le faire ». Il est fort possible que les Crucifères aient une région criblée interne; malheureusement, M. Dennert, dont l'anatomie se réduit trop souvent à de simples sections transversales, ne nous donne aucun renseignement sur les points qu'il faudrait connaître pour être au clair à ce sujet.

Digitized by Google

La moelle est continue; elle se compose d'énormes cellules polyédriques, à membranes minces, dont le diamètre excède de beaucoup la hauteur, et qui sont remplies d'eau.

La topographie générale du système libéro-ligneux est la suivante. Dans chaque angle on distingue très bien les deux faisceaux angulaires, grâce surtout à leurs ilots parenchymateux intraxylaires, qui sont distincts. Les faisceaux angulaires sont réunis par des bandes interfasciculaires, consistant en une zone ligneuse à éléments non ou peu sclérifiés, limitée du côté extérieur par des assises cambiales, dans lesquelles on ne reconnait ordinairement pas de tubes criblés. Les arcs interfasciculaires sont interrompus, suivant le calibre des renflements, par un, deux, trois ou même cinq faisceaux accessoires, construits sur le même plan que les faisceaux angulaires, mais naturellement beaucoup plus réduits.

Cette structure est typique pour toute la région renflée proprement dite. Elle passe à la structure ordinaire dans le rétrécissement en col de bouteille qui termine le renflement à sa partie inférieure.

En descendant, on voit d'abord le collenchyme cortical diminuer progressivement d'épaisseur jusqu'à ce qu'il ait atteint l'épaisseur de l'écorce normale. En même temps, le diamètre du cylindre médullaire diminue, et il apparait dans la moelle un canal central. Puis le collenchyme de l'écorce passe insensiblement à un parenchyme à parois minces, la sclérification du bois envahit une étendue plus considérable, le libriforme prend un beaucoup plus grand développement. A ce point, le calibre du corps de la tige a atteint la valeur normale de l'entrenœud et rentre entièrement dans la structure typique, telle qu'elle a été décrite plus haut.

Du côté du nœud le passage est extrêmement rapide, et il suffit de quelques minces coupes pour faire passer l'observateur à travers les principaux stades de réduction décrits ci-dessus.

La structure du nœud n'offre pas de différences essentielles avec celle des nœuds dans le sous-genre *Ladanum*, si ce n'est celles qui résident dans la disposition des éléments du cylindre central et que nous avons indiquées dans les précédents chapitres.

La genèse des renflements moteurs est fort simple. Ils ne se développent

Digitized by Google

pas de suite. Nous avons sous les yeux des cultures de *G. Tetrahit* contenant des pieds pourvus de huit entrenœuds dont les trois supérieurs non développés et qui sont hauts de 20 centimètres; ces pieds ne portent de renflements moteurs un peu remarquables que dans les deux entrenœuds inférieurs; tous les autres n'en ont point encore, mais on distingue la région où ils vont apparaître à sa couleur claire qui tranche sur le reste de l'entrenœud. Il s'agit là des entrenœuds épicotylés, car l'hypocotyle n'en porte jamais. Des sections transversales, opérées dans la région internodale proprement dite, et la région destinée à fournir le renflement, ne démontrent aucune différence de structure essentielle. Seulement, dans la suite, il se produit une différenciation très marquée dans le développement des tissus. Tandis que dans les entrenœuds l'écorce reste tendre, elle devient collenchymateuse dans les renflements et subit une série de cloisonnements tangentiels, sécantiels, radiaux, bref, dirigés en tous sens. Le bois en reste très longtemps à la structure primaire; la zone secondaire centrifuge et mécanique ne prend jamais un grand développement. Le phlœoterme reste à l'état de gaine amylifère et se divise. La zone extralibérienne, d'abord tendre et chlorophyllienne, devient collenchymateuse. Enfin, la moelle suit la progression générale de l'accroissement en diamètre, en cloisonnant ses éléments et en augmentant leur volume. C'est surtout grâce à l'activité de la moelle, suivi de l'énergique cloisonnement tangentiel des arcs interfasciculaires, que les renflements moteurs accroissent leur diamètre. On trouve sur la tige de grandes inégalités dans le développement des renflements. Ainsi, dans la plantule que nous venons de décrire, la structure interne de l'entrenœud n° 3 (en descendant) peut à peine être distinguée de celle des entrenœuds proprement dits; le n° 4 offre une différenciation déjà très avancée. D'où il résulte que pour poursuivre l'évolution ci-dessus décrite, il faut étudier une série de pieds à divers stades de développement.

Examinons, pour terminer, l'étude histologique des renflements, la façon dont leurs éléments se comportent vis-à-vis de quelques réactifs.

L'action de la phloroglucine en solution alcoolique, traitée par l'acide chlorhydrique d'une part, et le chloroiodure du zinc d'autre part, nous renseigne immédiatement sur la composition cellulosique simple du parenchyme

Digitized by Google

tendre intraxylaire et intervasculaire. Ces réactifs mettent en évidence les stéréides isolées dans le collenchyme extralibérien.

Le réactif genevois colore en jaune brun les parois extérieures de l'épiderme, tandis que les parois latérales et internes, ainsi que les assises corticales se colorent en rose clair. Dans les sections polygonales des épaississements collenchymateux, le corps de l'épaississement reste d'un rose clair, tandis que les lamelles pariétales se colorent en rose foncé. Le collenchyme péricyclique est d'un rose pâle, comme le collenchyme cortical. Les stéréides isolées tranchent vivement par leur couleur jaune-orange sur le collenchyme environnant. Le liber est d'un rose vif, dans lequel les îlots grillagés apparaissent en rose foncé. Les deux zones constituantes du bois sont très distinctes. L'extérieure étant presque entièrement composée de tissu mécanique, se colore en jaune-orange; l'intérieure, parenchymateuse, est essentiellement rose, de même que la moelle.

Le chloroiodure de calcium réagit en jaune-paille sur les stéréides isolées péricycliques, en jaune plutôt brun sur le libriforme.

L'hématoxyline teint en jaune commun toutes les stéréides, aussi bien les libriformiennes que les péricycliques, et laisse les autres tissus incolores.

L'étude de l'action des acides, notamment sulfurique et acétique, n'ajoute rien de nouveau sur ce que nous avons déjà appris à propos des entrenœuds adultes.

CHAPITRE XIII.

PHYSIOLOGIE DES RENFLEMENTS MOTEURS.

Les renflements moteurs sont des portions d'entrenœud différenciées en organes spéciaux, sur lesquels se localise l'action du géotropisme et de l'héliotropisme, et qui, dans les mouvements effectués par l'axe sous l'influence de ces forces, jouent le rôle de charnière, tandis que les entrenœuds proprement dits ne jouent qu'un rôle passif.

Une expérience très simple suffit pour constater cette localisation. Couchons, dans les mêmes conditions de température et de lumière, une tige de *G. Ladanum* et une tige de *G. Tetrahit* dans du sable humide. Au bout de quelques jours, les deux tiges se sont relevées et même complètement érigées;

Digitized by Google

mais tandis que chez le *G. Tetrahit* la courbure affecte les entrenœuds tout entiers, on constate que le *G. Tetrahit* s'est érigé uniquement sur ses renflements qui sont fortement courtés, et que les entrenœuds sont restés droits.

Nous avons dit que les mouvements s'opéraient sous l'influence de la lumière et de la pesanteur; on s'en persuade par les deux expériences suivantes :

Un pied de *G. Tetrahit* fut mis en pot et placé sur un clinostat [1]; un second pied, aussi semblable que possible au premier, fut mis en pot et le pot fut maintenu dans une position parallèle à l'horizon. Les deux pieds furent orientés par rapport à la source lumineuse, de façon que, les rayons tombant en normale sur les feuilles, il ne se produisît pas de courbures héliotropiques. Les deux plantes étaient l'une à côté de l'autre, dans les mêmes conditions de température, d'humidité et de terrain. Le clinostat fut maintenu dix jours en marche. Au bout de ce temps, le pied soumis à l'action de la pesanteur s'était complètement érigé, le pied placé sur le clinostat était resté absolument horizontal, dans la position qui lui avait été donnée au début de l'expérience.

On reconnaît encore plus facilement le rôle que peut jouer la lumière dans ces mouvements. Deux pieds de *G. Tetrahit* furent placés l'un à côté de l'autre, dans les mêmes conditions de terrain, de température et d'humidité; mais, tandis que l'un fut laissé accessible à la lumière de tous côtés, le second fut entouré et recouvert par un écran qui ne laissait arriver la lumière que d'un seul côté. Au bout de quatre jours le premier pied n'accusait aucune courbure, le second avait exécuté sur ses renflements une série de flexions qui avaient amené ses feuilles à se placer dans un plan perpendiculaire aux rayons incidents.

Examinons maintenant de plus près la façon dont la courbure s'opère. Il est facile de constater que le côté qui devient convexe s'allonge plus que celui qui devient concave. Mais on sait, d'autre part, que, dans certains cas,

[1] Nous n'avions à notre disposition, pour cette expérience, qu'un appareil dont le mouvement d'horlogerie donnait un nombre considérable de tours par minute. Nous avons suppléé à cet inconvénient en adaptant à la machine un grand volant métallique, qui communiquait avec l'arbre de couche par un engrenage. En faisant tourner le volant dans de l'huile, nous avons obtenu un mouvement régulier de 360° autour de l'axe en vingt minutes, et se perpétuant pendant huit heures consécutives. Ces expériences ont été faites avec une lumière orientée, de préférence à l'obscurité, parce que, avec le premier procédé, on se rapproche plus des conditions normales de végétation, tout en éliminant les mouvements phototropiques.

Digitized by Google

cet allongement du côté convexe est accompagné d'un raccourcissement du côté concave [1]. Pour savoir à quoi nous en tenir, nous avons tracé à l'encre de Chine des traits parallèles sur les deux côtés d'un renflement; la distance séparant les traits fut mesurée avant et après la flexion. Voici quelques-uns des résultats :

TABLEAU II.

NUMÉRO de l'expérience.	DIAMÈTRE du renflement en millimètres.	VALEUR de l'angle d'érection en degrés.	LONGUEUR séparant les traits avant la courbure sur le côté convexe.	LONGUEUR séparant les traits après la courbure sur le côté convexe.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR séparant les traits avant la courbure sur le côté convexe.	LONGUEUR séparant les traits après la courbure sur le côté convexe.	DIFFÉRENCE.
I.	6	32°,5	5	6	1	5	5	0
			5	7	2	5	5	0
			5	5	0	5	5	0
II.	4,5	40°	5	5	0	5	5	0
			5	8	3	5	5	0
			5	7	2	5	5	0
III.	8	30°	5	5,5	0,5	5	5	0
			5	7	2	5	5	0
			5	5	0	5	5	0
IV.	10	34°	5	6	1	5	5,5	0,5
			5	7	2	5	5	0
			5	5,5	0,5	5	5	0
V.	9		5	5	0	5	5	0
			5	7	2	5	5	0
			5	5	0	5	5	0
VI.	12		5	5	0	5	5	0
			5	6	1	5	5	0
			5	5,5	0,5	5	5	0

Le résultat de toutes ces expériences, dont nous reverrons encore des exemples dans la suite de ce chapitre, est que l'accroissement s'opère presque exclusivement sur le côté qui devient convexe; le côté concave reste ordinairement passif; il s'allonge parfois un peu, mais ne se raccourcit jamais.

Cette croissance, comme on le reconnait aisément en faisant l'anatomie

[1] Sachs, *Lehrbuch der Botanik*, éd. 4, 1874, p. 824.

Digitized by Google

du renflement, s'opère surtout dans le collenchyme périphérique dont les éléments sont vivants. Nous en avons trouvé la preuve par des expériences d'annulation. Ayant pris trois renflements de même âge et de même calibre, sur le même pied, nous avons enlevé au n° I son épiderme, au n° II son épiderme et son collenchyme; le n° III fut laissé intact comme point de comparaison. Au bout d'un séjour de vingt-quatre heures dans un milieu humide et obscur, les angles d'érection des trois renflements furent mesurés et donnèrent :

I	25°
II	10°
III.	25°,5

En répétant cette expérience, on ne trouve que rarement, entre les n^{os} I et III, des chiffres aussi concordants, attendu que même avec un âge et un calibre identiques, deux renflements réagissent plus ou moins différemment au géotropisme et à l'héliotropisme. En tout cas, ce qui ressort de cette expérience, c'est que l'épiderme joue dans les mouvements un rôle à peu près nul, tandis que l'angle d'érection baisse de plus de la moitié de sa valeur si l'on supprime le collenchyme cortical, et tend même souvent vers 0°.

On sait, depuis les mémorables travaux de MM. de Vries et Sachs [1], que la turgescence est ordinairement, dans les organes des plantes supérieures, une condition mécanique *sine qua non* de la croissance en surface des éléments. Elle agit de deux façons : d'abord en maintenant le plasma hyalin pariétal appliqué contre les parois de la cellule; ensuite en distendant ces parois et en permettant par ce moyen à de nouvelles particules organisées de s'introduire entre celles qui existaient déjà dans la paroi, pour augmenter la surface de cette dernière.

Mais on ne peut pas dire *a priori* que la croissance d'un tissu a pour condition la pression hydrostatique qu'exerce le suc cellulaire sur les parois de chacun de ses éléments. Il se peut fort bien, en effet, que cette pression soit suffisante pour maintenir le hyaloplasma solidement appliqué contre les parois, mais insuffisante pour distendre ces dernières. Cette action est alors exercée par une force qui a son siège dans un autre tissu.

[1] Voy. surtout Sachs, *Lehrbuch der Botanik*, 1874, éd. 4, p. 762, et de Vries, *Ueber die Ausdehnung wachsender Pflanzenzellen durch ihren Turgor*. (Bot. Zeitung, t. XXXV, 1877, pp. 1 et seq.)

Digitized by Google

Tel est précisément le cas du collenchyme d'après les recherches de M. Ambronn [1], dont nous ne pouvons que confirmer les résultats de la façon la plus complète.

Si l'on coupe un renflement transversalement et qu'on le mette dans l'eau pour exagérer les tensions positives des tissus, les mettre plus en évidence et éviter les changements d'équilibre qu'entraine l'évaporation, on verra bientôt la section prendre la forme bombée d'un verre de montre, qui indique que les relations de tension entre l'épiderme (E), le collenchyme (C), le liber (L), le bois (B) et la moelle (M) sont les suivantes :

$$E < C < L < B < M > B > L > C > E.$$

Mais aucun des termes de ce système, sauf l'épiderme, n'est sous une tension négative, c'est-à-dire que le collenchyme, qui nous intéresse surtout ici, ne se raccourcit pas si on l'isole des autres tissus. Placé dans l'eau, il ne s'allonge pas non plus (ou très peu), ainsi que l'a indiqué M. Ambronn. Il n'en est pas de même pour la moelle qui s'allonge fortement dans l'eau et se raccourcit dans une solution plasmolysante. Voici, par exemple, le résultat de quatre expériences qui ont duré dix heures, et dont les matériaux ont été empruntés à des renflements non courbés; nous verrons plus loin pour quelle raison.

TABLEAU III.

NUMÉRO de l'expérience.	ÉTAT de l'eau.	C		M	
		LONGUEUR avant l'expérience.	LONGUEUR après l'expérience.	LONGUEUR avant l'expérience.	LONGUEUR après l'expérience.
		millimètres.	millimètres.	millimètres.	millimètres.
I.	Eau pure.	20	20	12	15
II.		35	35	14	18
III.	Solution de Na Cl à 20 °/₀.	18	18	15	12
IV.		10	10	15	12

[1] H. AMBRONN, *Ueber die Entwicklungsgeschichte und die mechanischen Eigenschaften des Collenchyms.* (PRINGSHEIM'S JAHRBÜCHER F. WISS. BOTANIK, XII, 1881, p. 529.)

Digitized by Google

On doit conclure de ces faits que c'est dans la moelle que réside la force extensive qui produit l'allongement, puis la croissance du collenchyme. Nous avons adopté la méthode plasmolytique pour nous faire une idée de la valeur de cette force que nous désignerons désormais par P. Les résultats que l'on obtient varient naturellement un peu avec les individus, leur âge, etc. Cependant, si l'on prend des renflements sur un pied encore jeune (dans le courant du mois d'août), avant que le développement des tissus mécaniques dans le bois soit considérable, on obtiendra des résultats qui s'écarteront peu de ceux qui sont désignés ci-dessous, et qui représentent la moyenne de plusieurs observations. Ajoutons qu'avec un peu d'exercice, l'observation des débuts de la plasmolyse se fait sans trop de difficulté, quand même les éléments médullaires sont incolores. Nous désignons dans notre tableau l'absence de plasmolyse par le signe +, sa présence, au contraire, par le signe —; l'examen microscopique des renflements préalablement coupés s'opérait au bout d'un séjour de vingt-quatre heures de ces derniers dans la solution plasmolysante.

TABLEAU IV.

KNO_3 en °/₀ dans 1 litre d'eau.	ÉTAT plasmolytique.	OBSERVATIONS sur la section du renflement.
2	+	Moelle très bombée.
4	+	Moelle bombée.
6	+	Moelle plate.
8	—	Moelle plate.
10	—	Moelle plate.
12	—	Moelle légèrement concave.
14	—	Moelle concave.
16	—	Moelle concave.
18	—	Moelle concave.
20	—	Moelle concave.

Digitized by Google

La plasmolyse débute donc autour de 7, souvent plutôt dans le voisinage de 6. Si, pour prendre un chiffre rond, nous acceptons 6 °/₀ comme représentant l'équivalent isotonique en KNO_3 du suc médullaire, et que nous nous basions sur lui pour déterminer la valeur de la pression hydrostatique exercée par le suc cellulaire sur les éléments de la moelle, nous obtenons le chiffre de 13,9 atmosphères [1]. Ce chiffre paraît très élevé, et l'on pourrait être tenté de croire que les méthodes dont on se sert pour le déterminer contiennent décidément trop de causes d'erreur pour qu'on puisse lui accorder grande importance. Nous ne nierons pas qu'il ne représente qu'une approximation, mais en examinant sérieusement la question, nous sommes amené à penser qu'il ne s'écarte guère de plus 3 à 4 atmosphères du véritable état hydrostatique. Que l'on réfléchisse, en effet, que la résistance absolue du collenchyme est très élevée, qu'elle ne le cède même, dans certains cas, que de peu à celle des véritables stéréides, et, par suite, à celui de métaux travaillés, tels que le fil de cuivre, et l'on comprendra qu'il faille une force considérable pour amener dans ce tissu un allongement permettant une croissance rapide. Il est vrai que les chiffres trouvés par M. de Vries et par M. Westermaier [2] pour des organes en croissance sont en général beaucoup plus faibles : 3, 4 $^1/_2$, 6 atmosphères. Mais M. Ambronn a obtenu dans des entrenœuds du *Fœniculum officinale* des pressions de 9-12 atmosphères, ce qui se rapproche beaucoup de notre résultat [3]. Ce ne sont pourtant pas là les chiffres les plus élevés qui aient été déterminés. Nous rappellerons que, par la même méthode, M. Hilburg a trouvé, dans les coussinets moteurs de certaines feuilles, des turgescences

[1] Les recherches de M. de Vries ont montré que la pression hydrostatique correspondant à une concentration en KNO_3 de 1 °/₀ était à peu près, et au minimum, de 2,35 atmosphères. Nous avons fait notre détermination uniquement par la méthode plasmolytique ; la vérification par la méthode du dynamomètre de M. Pfeffer (*Die periodischen Bewegungen der Blattorgane*, pp. 9 et suiv., pp. 97 et suiv. Leipzig, 1875.) est malheureusement impraticable dans le cas particulier. Voy. pour les détails sur la manière dont M. de Vries s'y est pris pour obtenir ces chiffres : DE VRIES, *Untersuchungen über die mechanischen Ursachen der Zellstreckung*, pp. 117, 118. Leipzig, 1877 ; IDEM, *Eine Methode zur Analyse der Turgorkraft*. (PRINGSHEIM'S JAHRB. F. WISS. BOTANIK, XIV, 1884, pp. 529, 530).

[2] WESTERMAIER, *Zur Kenntniss der osmotischen Leistungen des leitenden Parenchyms*, pp. 8 et suiv. (BER. DE DEUTSCH. BOT. GESELLSCH., I, 1883.)

[3] AMBRONN, *l. c.*, pp. 529-531.

Digitized by Google

correspondant à une pression de 10-12 atmosphères [1], et que, d'après M. Wieler, la pression monte dans les éléments cambiaux de 13 à 16 atmosphères et atteindrait même 21 atmosphères dans les cellules de certains rayons médullaires [2]. Enfin, selon M. Eschenhagen, les parois des hyphes de l'*Aspergillus niger* et du *Penicillium glaucum* supporteraient des pressions de 63 atmosphères [3]! Ceux de ces derniers chiffres qui se rapportent aux phanérogames doivent être exagérés, mais un point est en tout cas acquis : les sucs cellulaires possédant un haut pouvoir endosmotique sont moins rares qu'on ne pourrait le supposer, et, par conséquent, les membranes sont souvent distendues par des forces telles, que la petitesse des surfaces sur lesquelles elles s'exercent permet seule de comprendre comment elles peuvent opposer à ces forces une résistance effective.

Il importe de remarquer que la plasmolyse s'opère dans toutes les parties de la moelle d'une façon égale : on ne peut donc faire remonter les flexions à des différences de turgescence entre le côté qui devient concave et le côté qui devient convexe. Certaines coupes pourraient cependant faire croire le contraire. Si, par exemple, on prend un cube de renflement ayant pour base un quadrant ou une demi-circonférence, et qu'on le place dans une solution sucrée qu'on laisse concentrer par évaporation, on verra que les cellules les plus rapprochées du bois ne plasmolysent pas encore, alors que celles qui en sont le plus éloignées sont en pleine plasmolyse. Cela provient de ce que ces dernières sont le plus facilement attaquées par le liquide plasmolyseur, tandis que les éléments voisins du bois sont protégés, d'un côté, par une forte cuirasse de collenchyme cortical, péricyclique et de bois, et que, de l'autre, les échanges de liquide ne dépendent pas directement de la concentration du liquide plasmolyseur, mais bien de la concentration du suc cellulaire des

[1] Hilburg, *Ueber Turgescenzveränderungen in den Zellen der Bewegungsgelenke.* (Unters. aus dem bot. Institut Tübingen, I, p. 23.)

[2] Wieler, *Beiträge zur Kenntniss der Jahresringsbildung und des Dickenwachstums.* (Pringsheim's Jahrb. f. wiss. Botanik, XVIII, 1888.)

[3] Eschenhagen, *Ueber den Einfluss von Lösungen verschiedener Concentration auf das Wachstum der Schimmelpilze*, Stolp, 1889. — Il va sans dire que pour des végétaux qui, comme les champignons et les algues, végètent souvent dans un milieu aqueux, la turgescence n'a plus la même signification que dans le cas qui nous occupe, car elle est forcément adéquate au degré de concentration du milieu, lequel peut être extrêmement élevé.

Digitized by Google

éléments voisins. Il faut alors un certain temps pour que l'équilibre s'établisse. Mais si l'on fait des coupes transversales minces dans un renflement intact et ayant séjourné un certain temps dans le liquide plasmolyseur, on trouvera que la concentration est la même partout.

En définitive, puisque la tension est égale dans toutes les parties de la moelle, et que cette tension peut être représentée par une résultante positive unique, il faut nécessairement que ce soit la résistance offerte à cette force par le collenchyme qui varie; c'est-à-dire que *la résistance restera constante sur le côté qui devient concave, tandis qu'elle baissera de valeur sur le côté qai devient convexe.*

Voyons un peu maintenant les conditions mécaniques dans lesquelles la flexion s'opère. La turgescence est due à ce que, dans le renflement, la moelle tend à s'allonger, et que le collenchyme résiste à cet allongement; ou, pour nous servir des termes consacrés, le premier tissu représente un cylindre soumis à une tension positive; le second, un cylindre entourant le premier, mais dont les éléments sont soumis à une tension négative. Supposons, pour simplifier, que nous ayons à examiner les conditions d'équilibre dans une section passant par l'axe de symétrie du cylindre médullaire (fig. 19). Au centre, passant par l'axe de symétrie du cylindre, nous aurons une force P représentant la tension positive de la moelle; à gauche et à droite, nous aurons deux forces F et F′ dirigées en sens contraire de P, mais parallèles entre elles et avec P; elles représentent la tension négative du collenchyme, ou la résistance qu'offrent deux colonnes m et m' de collenchyme à se laisser étirer. Les points d'application de ces forces sont placés sur la ligne droite $a\ a'\ a''$, ligne que l'on peut se représenter comme une barre rigide. L'équilibre est établi lorsque $F = F'$ et que $P = F + F'$; à ce moment-là, la ligne $a\ a'\ a''$ sera une droite perpendiculaire à la ligne de direction des trois forces P, F et F′. Si nous faisons $F' < F$, on aura $P > F + F'$; la droite tournera autour du point a d'un angle φ, lequel ira en croissant jusqu'à ce que l'équilibre soit de nouveau rétabli.

Les phases par lesquelles les membranes du côté convexe passent lorsqu'elles sont soumises à l'influence de la force P, sont celles, bien connues, d'un corps soumis à une traction quelconque. Sous l'action de la force P, la

Digitized by Google

colonne de collenchyme *m*, primitivement longue de L, atteint une longueur de L $(1 + \delta)$, δ représentant l'allongement de l'unité de longueur; par contre, en appelant β la contraction que subit l'unité de section, la section S de la colonne devient S $(1 - \beta)$. On peut admettre que l'action de la force P s'exerce approximativement d'une façon égale sur toute la section de la colonne *m*, et alors, la section diminuant, l'allongement augmentera. Cet allongement continuera à augmenter jusqu'à ce que l'élasticité fasse de nouveau équilibre à la force P.

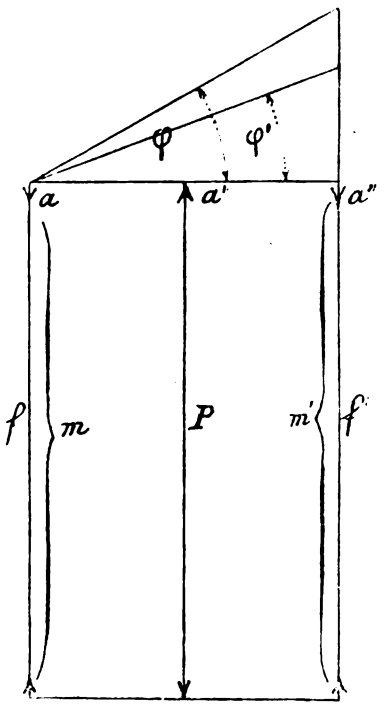


FIG. 19.
Diagramme de l'équilibre des forces agissant dans le plan longitudinal médian antéro-postérieur d'un renflement moteur non courbé. — Se reporter au texte pour les notations.

S'il n'existait pas de différence entre notre colonne de collenchyme *m* et un corps élastique quelconque, on devrait, en supprimant la force P, voir la colonne reprendre à peu près sa longueur L primitive.

Ici il n'en est rien, d'abord parce que le collenchyme n'est pas un tissu très élastique, ensuite *parce qu'il croît*. On démontre, en effet, dans la théorie de l'élasticité, que, sous l'action de la force P, le volume *v* de la

Digitized by Google

colonne varie et que le changement de volume équivaut au tiers du changement de longueur δ par unité ; de sorte qu'en appelant v' le nouveau volume et Q le coefficient d'élasticité, on a la relation [1] :

$$v' = v(1 + \tfrac{1}{3}\delta) = v\left(1 + \tfrac{1}{3}\frac{P}{Q}\right).$$

Puisque, avec le même nombre de molécules, le volume de la colonne augmente, sa densité doit diminuer. Or, nous nous trouvons précisément dans les conditions nécessaires à l'accroissement. En effet, si l'on se représente, avec Nägeli, la membrane comme constituée par des micelles plurimoléculaires entourées d'eau d'adhésion, les micelles seront écartées les unes des autres, les méats intermicellaires seront augmentés et se rempliront d'eau de capillarité. Les molécules destinées à l'accroissement de la membrane pourront, dès lors, circuler plus librement entre les micelles, et l'intussusception se produira avec énergie. Ce processus d'intussusception a pour conséquence de tendre constamment à redonner à la colonne sa densité primitive [2].

Si ces données générales sont faciles à déduire des faits et aisées à com-

[1] Voy. Jamin, *Cours de physique de l'École polytechnique*, t. I, pp. 133-145.

[2] Nous nous plaçons ici entièrement sur le terrain de l'accroissement en surface par intussusception. Le cas de la fissuration apicale de cellules, suivie de la formation d'une coiffe qui remplit la fissure et s'appose directement aux vieilles parois, a été constaté chez quelques algues, mais nulle part dans les tissus complexes des plantes supérieures on n'a rencontré de processus semblable. En dehors des cas de fissuration et de calyptration consécutive, l'accroissement en surface par étirement des couches primitives et juxtaposition de nouvelles (Schmitz in *Sitzungsber. der niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde in Bonn*, 6 déc. 1880; Strasburger, *Ueber den Bau und das Wachstum der Zellhäute*, Iéna, 1882, pp. 175 et suiv.) nous paraît une impossibilité mécanique; il nous semble donc que ce serait à ceux qui soutiennent la possibilité de l'étirement indéfini d'une lamelle de cellulose, de proposer une démonstration rationnelle et expérimentale de leur théorie et non le contraire, ainsi que le voudrait M. Strasburger. Voy. Strasburger, *Ueber das Wachstum vegetabilischer Zellhäute*, pp. 166, 167. (Histologische Beiträge, II, 1889.) — Au surplus, nous n'avons nullement l'intention d'entrer ici dans la discussion des deux théories, ce qui exigerait une série d'études vérificatives et sortirait complètement de notre sujet. Nous nous bornons à renvoyer le lecteur à ce qu'en a dit M. Zimmermann, dont nous partageons entièrement, sur ce point, la manière de voir. Voy. Zimmermann, *Morphologie und Physiologie der Pflanzenzelle* (dans Schenk's Handbuch der Botanik, t. III, pars. 2, pp. 647-652).

Digitized by Google

prendre, il est, en revanche, très difficile — nous dirions même, dans l'état actuel de nos connaissances, impossible — de préciser les détails de ces phénomènes. C'est à peine si nous possédons deux ou trois faits sur lesquels nous puissions nous appuyer.

Tout d'abord, les parois des éléments dans les colonnes de collenchyme, étudiées à la lumière polarisée, s'illuminent brillamment lorsqu'on croise les nicols. Étant donné qu'aucun indice ne peut nous faire supposer l'existence de tensions moléculaires perturbatrices quelconques, et que la production de couleurs de polarisation plus élevées au moyen de tensions artificielles *dans le collenchyme* est une expérience contenant des causes d'erreur considérables, et sur laquelle on ne saurait actuellement baser une théorie [1], nous considérons comme très probable que les micelles constituant le collenchyme, dans les renflements moteurs de nos *Galeopsis* [2], ont une structure cristalline semblable à celle des cristaux anisotropes [3].

Un autre point qui nous paraît bien établi, c'est l'absence de protoplasma dans les parois des éléments du collenchyme. Les réactifs courants qui ser-

[1] Voy. à ce sujet : Schwendener, *Ueber Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen*, p. 30. (Sitzungsber. der k. preuss. Akad. der Wiss., t. XXXIV, 1887.)

[2] Le dernier auteur qui s'est occupé de collenchyme, M. Carl Müller, indique, au contraire, ce tissu comme inactif dans la lumière polarisée, en ayant cependant soin de spécifier qu'il base son assertion sur le collenchyme du *Petasites* (*Ein Beitrag zur Kenntniss der Formen des Collenchyms.* [Ber. der deutsch. bot. Gesellsch., VIII, 1890, p. 163.]) En supposant que les observations de M. Müller soient exactes, on pourrait peut-être les concilier avec notre déduction en admettant l'existence de micelles biréfringentes, orientées dans toutes les directions et égales entre elles, qui se neutralisent les unes les autres, comme l'a proposé M. Schwendener pour la gomme. Voy. Schwendener, *Nochmals über die optisch anomale Reaction des Traganth- und Kirschgummis*, pp. 6, 7. (Sitzungsber. der k. preuss. Akad. der Wiss., t. XLII, 1890.) Nous nous garderons cependant de pousser plus loin le parallèle avec la gomme, et ne pouvons pas suivre M. Müller lorsqu'il attribue au collenchyme une constitution colloïdale. Cette constitution serait en contradiction avec les autres propriétés physiques du tissu en question.

[3] Nous n'avons pas poussé nos observations assez loin pour savoir si ces cristaux possèdent un ou deux axes optiques : il est très difficile d'obtenir des coupes sur lesquelles on puisse raisonner comme on l'indique en théorie.

Nous croyons, du reste, que l'étude de la structure intime du collenchyme serait entièrement à reprendre et jetterait beaucoup de lumière sur la structure moléculaire des membranes en général. Ce travail vaudrait déjà la peine d'être entrepris, ne fût-ce que pour élucider les contradictions qui existent dans les écrits des divers observateurs.

Digitized by Google

vent à caractériser le plasma indiquent très nettement que le hyaloplasma limite la partie vivante de la cellule vers l'extérieur. Ce fait entraîne deux conséquences. La première conséquence est que l'on doit éliminer, au moins pour le cas particulier, les théories qui veulent expliquer la croissance des membranes par l'action d'un protoplasma inclus, qui admettent, en d'autres termes, que la membrane croît d'une façon active [1]. La seconde conséquence, c'est que les matériaux premiers qui font croître la membrane sont fournis par le hyaloplasma. Ceux-ci, une fois arrivés à l'intérieur de la paroi, constituent de nouvelles micelles sous l'action des forces moléculaires et sans l'intervention directe du plasma (ce dernier ne pouvant pas être décelé dans les parois). Quant au mode suivant lequel cette émigration de matériaux s'opère, il nous semble probable — opinion qui a déjà été souvent soutenue — que c'est sous la forme d'hydrates de carbone, émis par le hyaloplasma et dissous dans l'eau de capillarité des parois.

Avant de reprendre le cours de nos recherches, nous tenons encore à bien préciser que les résultats obtenus dans ce travail sur le mécanisme de la croissance ne s'appliquent qu'aux cas que nous avons étudiés, et que, en particulier, nous ne considérons pas la pression hydrostatique développée par la turgescence comme *la* cause mécanique de la croissance, mais comme *une* cause mécanique. Si cette cause est parfois nulle ou presque nulle (boyaux polliniques, cellules de points végétatifs, etc.), elle est, au contraire, d'une importance capitale dans d'autres cas, tels précisément que celui qui fait l'objet de ce travail. La cause première, la plus importante, réside dans le protoplasma, qui non seulement détermine la direction de la croissance, mais encore élabore les matériaux pour cette dernière, et, point capital, en règle ainsi la vitesse dans une limite encore plus étendue que la turgescence. Nous croyons, en concevant ainsi la croissance comme la résultante de causes multiples, être à l'abri des critiques [2] qui ont été motivées par l'im-

[1] Wiesner, *Untersuchungen über die Organisation der vegetabilischen Zellhaut.* (Sitzungsber. d. k. k. Akad. der Wiss. in Wien, t. XCIII, pp. 18-64, 1886.)

[2] Voy. Krabbe, *Das gleitende Wachstum bei der Gewebebildung der Gefässpflanzen,* pp. 66 et suiv. Berlin, 1886. — Schwendener, *Ueber Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen,* pp. 27 et 28. (Sitzungsber. der k. preuss. Akad. der Wiss., t. XXXIV, 1887.)

Digitized by Google

portance exagérée donnée, au premier moment, à la turgescence comme cause première de la croissance [1].

[1] *Notes ajoutées au moment de l'impression.* — Notre monographie, et en particulier ce chapitre, était depuis longtemps terminée quand arrivèrent coup sur coup plusieurs publications ayant directement trait aux phénomènes étudiés ici. Nous mentionnerons, en premier lieu, un livre de M. le professeur Wiesner, intitulé : *Die Elementar-Struktur und das Wachstum der lebenden Substanz,* Wien, 1892. Cet ouvrage, dans lequel se trouve une exposition détaillée des théories formulées par l'auteur en 1886, aboutit à des conclusions absolument différentes de celles auxquelles nous ont amené nos études sur la structure et la croissance des membranes. Aussi croyons-nous nécessaire d'exposer en quelques mots les raisons qui nous poussent à maintenir intégralement les idées théoriques nägeliennes émises dans ce chapitre.

De même que nous avons laissé de côté cette partie de la théorie de Nägeli qui ne s'applique pas aux membranes, de même nous ne nous occupons pas des idées de M. Wiesner sur la structure du protoplasma, du noyau, des microsomes, etc., mais uniquement de ce qu'il dit des parois cellulaires.

Pour le savant professeur de Vienne, la membrane cellulaire est constituée par des corps élémentaires ou *dermatosomes*, qui sont à la membrane de la cellule entière ce qu'une cellule est à l'organe ou à l'ensemble de la plante. Ces dermatosomes ont une structure moléculaire inconnue, mais, en tout cas, très compliquée; ils « assimilent », croissent et se divisent; ils sont reliés ensemble par des substances plasmiques ou dérivées des albumines. Les dermatosomes sont dérivés des plus petites unités de la matière vivante ou *plasomes*. Les propriétés soit des plasomes, soit des dermatosomes sont établies par analogie avec ce qui se passe dans les noyaux, vacuoles et autres composantes internes des cellules.

L'auteur considère son hypothèse des plasomes comme aussi légitime et aussi bien fondée que la théorie atomique l'est en physique ou en chimie. Nous croyons que M. Wiesner aura beaucoup de peine à convaincre ses lecteurs de la légitimité de cette assertion, qui nous paraît, sinon tout à fait hyperbolique, du moins excessivement hardie.

Beaucoup des arguments habilement groupés pour motiver la théorie ne sont pas susceptibles d'une démonstration positive. Ceux de ces arguments qui nous intéressent particulièrement, comme touchant au sujet qui nous occupe, sont, sous une forme aphoristique, les suivants : 1° Pour expliquer la croissance des membranes, la turgescence est absolument insuffisante ; il faut avoir recours à l'action du plasma ; 2° les membranes contiennent du protoplasma ; 3° l'existence des dermatosomes peut être mise en évidence par la carbonisation : les membranes se désagrègent alors et les particules fibrillaires produites par cette désagrégation sont les dermatosomes recherchés; 4° les propriétés optiques des membranes, sur lesquelles Nägeli a en grande partie fondé sa théorie micellaire, sont dues à des différences de tension dans les différentes couches des parois.

Nous ferons à ces arguments les observations suivantes :

1° La thèse de l'insuffisance complète de la turgescence comme moyen unique d'explication de la croissance est à accorder entièrement à son auteur, ainsi que la nécessité d'une intervention du protoplasma.

Digitized by Google

Sur ce, nous revenons à nos études concernant la répartition et l'équilibre

2° Nous ne connaissons d'observation d'aucun auteur prouvant l'existence de plasma dans les parois de cellulose. M. Wiesner fait des raisonnements ingénieux (pp. 136 et suiv.) pour persuader le lecteur de la possibilité de l'existence de corps albuminoïdes dans les membranes; mais tout cela n'est qu'au potentiel, et nous cherchons en vain une indication positive de plasma dans les parois. Nous avons dit plus haut que les tissus étudiés par nous (collenchyme) n'en contenaient pas. Il résulte de là que l'action de la matière vivante dans la croissance, si l'on se base sur les faits et non sur les hypothèses, procède du plasma périphérique (hyaloplasma) et non d'un plasma contenu dans la membrane.

3° Le curieux phénomène de la désagrégation de la cellulose par carbonisation n'est pas du tout spécial aux membranes des végétaux. Dans un important mémoire (*Studien zur Energetik der Pflanze*, p. 105 [Abhandl. der k. sachs. Gesellsch. der Wiss., XVIII, 1892]), M. Pfeffer a montré que des lamelles de cellulose artificielle présentent exactement les mêmes particularités. Ce fait est décisif et montre qu'il est inutile de chercher dans la désagrégation de la cellulose l'expression d'une structure plasomique. Dans un article qui vient de paraître, M. Wiesner prétend que les expériences de M. Pfeffer ne changent rien à son interprétation (*Eine Bemerkung zu Pfeffer's Energetik der Pflanze* [Bot. Zeitg., p. 475, 22 juillet 1892]); mais comme il ne donne pas de raisons à l'appui de son dire, la réfutation expérimentale de M. Pfeffer reste entièrement debout.

4° A propos de la quatrième thèse, nous nous permettons une petite remarque qui a aussi été faite par M. Pfeffer (*l. c.*, p. 9) et qui n'est pas sans importance. M. Pfeffer se plaint de ce que M. Wiesner n'ait pas tenu compte de ses recherches antérieures qui, en ce qui concerne les vacuoles, sont partiellement en contradiction avec les données admises par le savant autrichien. M. Wiesner répond, dans l'article cité du *Botanische Zeitung*, que, obligé d'être bref, il a puisé ses arguments dans les travaux les plus riches en faits utilisables. C'est précisément contre cette tendance à se servir de faits utilisables en délaissant, parfois sans explications suffisantes, ceux qui ne le sont pas — c'est-à-dire ceux qui sont difficiles à concilier avec les théories de l'auteur, — c'est contre cette tendance que nous réclamons à propos des propriétés physiques des membranes végétales. M. Wiesner considère la biréfringence des membranes et les figures d'interférence qu'elles donnent dans la lumière polarisée comme provenant de différences de tension, et regarde cette manière de voir comme prouvée, en se basant sur l'important travail de M. V. v. Ebner (*Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organischer Substanzen*. Leipzig, 1882). Mais il ne fait aucune mention de la polémique de ce dernier auteur avec MM. Schwendener et Ambronn (voy. Schwendener, *ll. cc.*, et *Zur Doppelbrechung vegetalischer Objekte* [Sitzungsber. der k. preuss. Akad. d. Wiss., XVIII, 1889]; Ambronn, *Notiz über die Doppelbrechung in rühflüssigem Gummi* [Ann. d. Phys. und Chem., 1889]; Idem, *Das optische Verhalten und die Struktur des Kirschgummis* [Ber. des deutsch. bot. Gesellsch., VII, 1889]) qui ont, selon nous, répondu victorieusement aux arguments de M. v. Ebner. Nous aurions aussi aimé avoir, de la part de M. Wiesner, une réponse à un travail extrêmement soigné, dû à M. Steinbrinck (*Zur Theorie der hygroskopischen Flächenquellung und -schrumpfung vegetabilischer Membranen, insbesondere der durch sie hervorgerufenen Windungs- und Torsionserscheinungen* [Verhandl. d. nat. Ver. d. Rheinl., 5e série, t. VII, 1890]), dont la première conclusion est que, au point de vue des phénomènes de gonflement dans les membranes, de toutes les théories

Digitized by Google

des forces dans les renflements moteurs. La faible élasticité du collenchyme et la croissance des membranes empêchent toutes les deux une colonne de collenchyme de reprendre sa longueur primitive lorsqu'on supprime la force P. Mais, si l'on supprime cette force P pendant l'allongement, et qu'on examine comparativement l'effet produit sur la colonne *m* située sur le côté qui ne s'est pas allongé, et sur la colonne *m'* située sur le côté qui a subi un allongement, on peut prévoir théoriquement que le raccourcissement sera plus grand sur la colonne *m'* que sur la colonne *m*. En effet, la croissance ne suit pas immédiatement l'allongement, ce dont on peut facilement se persuader en dessinant à la chambre claire une cellule, prise dans un organe

émises sur la constitution desdites membranes, la théorie micellaire est la seule qui satisfasse à tous les faits. On voit, en outre, dans ce mémoire (pp. 145 et suiv.), que ce sont les lignes des membranes sur lesquelles, d'après M. Wiesner, les dermatosomes sont le plus rapprochés qui, possédant la plus grande densité, doivent, en cas d'imbibition, présenter le maximum de gonflement, — alors que c'est précisément le contraire qui a lieu. M. Steinbrinck fait remarquer, avec raison, que seule la théorie micellaire de Nägeli résout cette contradiction.

En résumé, nous ne pouvons voir dans la théorie des dermatosomes qu'une spéculation ingénieuse, mais dépourvue de base positive. Au lieu de passer directement de la membrane à la structure moléculaire, on y passe par l'intermédiaire des dermatosomes, auxquels pourraient, au fond, s'appliquer les théories moléculaires que l'on a appliquées aux cellules ; cet intermédiaire ne fait que compliquer sans nécessité des recherches déjà assez ardues en elles-mêmes. De plus, nous pensons, à l'inverse de M. Wiesner, que sa théorie est en contradiction avec plusieurs faits avérés (voy. ci-dessus). Nous n'avons, du reste, consigné ces remarques que pour justifier le point de vue que nous avions pris dans notre travail, et non dans un but de polémique. Lorsque apparaît une théorie absolument nouvelle sur un sujet aussi capital que la structure intime des membranes, il est logique et naturel de voir surgir en grand nombre les critiques et les demandes d'explications : c'est même rendre service à la théorie que d'en faire.

Quant à l'ouvrage de M. Pfeffer (*Studien zur Energetik der Pflanze*, 1892), il touche par beaucoup de points à notre sujet, surtout dans les chapitres VI, VII et VIII, qui traitent de la croissance et des mouvements locomoteurs. Nous regrettons que ce livre n'ait pas paru avant notre travail, car les vues profondes et originales qui y sont lumineusement exposées nous auraient suggéré bien des expériences et bien des recherches complémentaires. Nous remarquons que M. Pfeffer porte un jugement analogue au nôtre (voy. plus bas) sur l'explication des variations de courbures dans une solution plasmolysante qu'a tentée M. Noll (p. 99).

Enfin, mentionnons un mémoire de M. Stange, intéressant également nos recherches, mais qui a paru trop tard pour que nous puissions l'analyser, intitulé : *Beziehungen zwischen Substratconcentration Turgor und Wachstum bei einigen phanerogamen Pflanzen* (Bot. Zeitg., 1892, nos 16 et suiv.).

Digitized by Google

en croissance, avant et après la plasmolyse. Si la croissance suivait pas à pas l'allongement, cette cellule ne changerait pas de dimensions, tandis que le premier effet visible du liquide plasmolyseur sur la cellule est de produire une diminution dans ses dimensions. Par conséquent, si la colonne m se raccourcit, la colonne m' se raccourcira aussi, et se raccourcira plus, parce qu'en s'allongeant elle est devenue plus mince, et qu'étant plus mince elle doit, suivant les lois de l'élasticité, se raccourcir plus que si elle possédait son épaisseur primitive. Dans tous les cas, la suppression de la force P doit donc avoir pour conséquence directe d'amener un raccourcissement dans la longueur acquise de la colonne m'.

Il reste maintenant à donner une vérification expérimentale de cette conséquence de la théorie. Nous avons employé deux méthodes pour cela. La première consiste à faire une série de lignes de repère sur un renflement, à lui faire exécuter une flexion, à supprimer la force P par plasmolyse, et à examiner ensuite si les distances séparant deux des points de repère sur le côté convexe ont diminué. La seconde, expérimentée avec succès par M. de Vries et susceptible d'une beaucoup plus grande précision que l'autre, consiste à mesurer l'angle d'érection φ (dont nous avons vu plus haut, page 81, la signification) d'un renflement soumis à l'action du géotropisme, de supprimer la force P par plasmolyse, puis de mesurer à nouveau l'angle d'érection devenu désormais φ' ; la valeur $(\varphi - \varphi')$ donnera évidemment la mesure du raccourcissement, si celui-ci se produit (fig. 20).

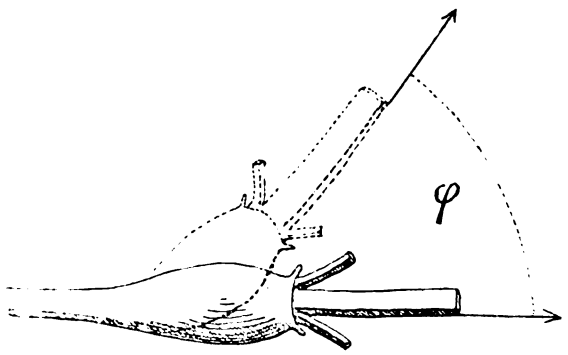


Fig. 20.
Érection d'un renflement moteur du *G. Tetrahit* sous l'action du géotropisme, et formation de l'angle φ.

Digitized by Google

Dans ces expériences, nous avons suivi à peu près la marche indiquée par M. de Vries, marche qui nous a paru excellente [1].

Nous prenions des renflements sur des pieds vigoureux, commençant à fleurir, et nous les isolions en coupant les tiges à une distance de 3-6 centimètres au-dessus et au-dessous des nœuds. Les renflements étaient ensuite placés horizontalement dans du sable humide, sous une cage en verre, recouverte de carton pour éviter l'action perturbatrice de la lumière. La cage se trouvait dans la petite serre du Jardin botanique de Genève, à une température constante d'environ 23-25° [2].

Au bout de vingt-quatre heures, les renflements étaient extraits avec précaution de la cage. On lisait aussi rapidement que possible l'angle d'érection ou les dérangements survenus dans la graduation, puis on plongeait les renflements dans une solution de Na Cl à 20 °/₀ [3].

Après un séjour de vingt-quatre heures dans le liquide plasmolyseur, on mesurait à nouveau l'angle d'érection devenu φ', et l'on obtenait directement la valeur $(\varphi - \varphi')$ en soustrayant le second angle du premier; ou bien on mesurait les perturbations survenues dans la graduation des renflements.

[1] H. de Vries, *Ueber die Aufrichtung gelagerten Getreides* (*l. c.*, p. 498).

[2] Nous saisissons cette occasion pour remercier M. Grandjean, chef des cultures au Jardin botanique de Genève, pour l'amabilité avec laquelle il nous a facilité l'exécution de nos expériences.

[3] Cette concentration est située bien au delà de la limite nécessaire pour produire la plasmolyse. En effet, la concentration isotonique de 1,01 °/₀ KNO_3 se trouvant par la formule

$$\frac{\text{poids moléculaire}}{\text{coefficient isotonique}} \times 0{,}03$$

(voy. de Vries, *Eine Methode zur Analyse der Turgorkraft*, l. c., pp. 536-537), on obtiendrait, pour le chiffre 6 de concentration que nous avons trouvé dans le suc médullaire, l'équation

$$\frac{\frac{58{,}5}{3} \times 0{,}03}{x} = \frac{1{,}01}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad x = 3{,}47.$$

La concentration adoptée dépasse donc la concentration-limite de 16, 53 °/₀, et la possibilité d'avoir opéré sur des renflements à plasmolyse nulle ou imparfaite se trouve complètement écartée.

Digitized by Google

TABLEAU V.

NUMÉROS des expériences.	DIAMÈTRE des renflements en millimètres.	COTÉ CONCAVE.				COTÉ CONVEXE.			
		LONGUEUR avant la flexion.	LONGUEUR après la flexion.	LONGUEUR après la plasmolyse.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR avant la flexion.	LONGUEUR après la flexion.	LONGUEUR après la plasmolyse.	DIFFÉRENCE.
I.	8	5	5	5	0	5	5	5	0
		5	5	5	0	5	7	6,5	0,4
		5	5	5	0	5	5	5	0
II.	7,5	5	5	5	0	5	6	5,7	0,4
		5	5	5	0	5	6	5,8	0,2
		5	5	5	0	5	5	5	0
III.	10,5	5	5	5	0	5	6	5,7	0,3
		5	5	4,9	0,1	5	6	5,8	0,2
		5	5	5	0	5	5	5	0
IV.	8	5	5	5	0	5	5	5,6	0,4
		5	5	5	0	5	7	6,5	0,5
		5	5	5	0	5	5,5	5,3	0,2
V.	6	5	5	5	0	5	6	5,6	0,4
		5	5	5	0	5	5,5	5,2	0,3
		5	5	5	0	5	5	5	0
VI.	10,5	5	5	5	0	5	5	5	0
		5	5	5	0	5	5	4,9	0,1
		5	5	5	0	5	6	5,6	0,4
		5	5	5	0	5	5,5	5,4	0,1
		5	5	5	0	5	5	5	0
VII.	6	5	5	5	0	5	6	5,6	0,4
		5	5	5	0	5	5,5	5,3	0,2
		5	5	5	0	5	5	4,9	0,1
VIII.	5	4,3	4,3	4,1	0,2	5	6	5,8	0,2
		5	5	5	0	5	5	4,9	0,1
IX.	6	5	5	5	0	5	5,5	5,3	0,2
		5	5	5	0	5	6	5,9	0,1
		5	5	5	0	5	5,5	5,3	0,2

Le tableau ci-dessus, dans lequel sont consignés les résultats de neuf expériences faites par la méthode des traits, montre qu'il existe toujours un raccourcissement notable sur le côté convexe lorsqu'on supprime la force P par plasmolyse, que lorsqu'il se produit un raccourcissement sur le côté

Digitized by Google

concave, fait du reste peu fréquent, ce raccourcissement est très faible et toujours de beaucoup surpassé par celui du côté convexe. La différence consignée dans la quatrième colonne de chaque tableau équivaut donc au rôle joué par la turgescence au moment où la plasmolyse a commencé à se produire. Les chiffres indiqués représentent des millimètres, les traits ont été faits sur les faces du renflement en commençant un peu au-dessous du nœud.

Nous donnons, pour ce qui concerne les chiffres, une plus grande importance à la méthode des mensurations d'angles de M. de Vries, parce qu'elle est susceptible d'une plus grande exactitude. La méthode précédente indique bien la marche du phénomène, mais, surtout lorsqu'on mesure les longueurs sur le côté concave, des erreurs de détail sont presque inévitables. Nous avons ajouté au tableau ci-après quelques renseignements comparatifs sur le calibre des renflements, ses relations avec le diamètre des entrenœuds, etc., renseignements qui complètent ce que nous avons dit à ce sujet au paragraphe précédent.

TABLEAU VI.

NUMÉROS des expériences.	DIAMÈTRE DU RENFLEMENT		DIAMÈTRE DE L'ENTRENŒUD		φ	φ'	$(\varphi - \varphi')$
	avant la plasmolyse.	après la plasmolyse.	du renflement.	situé au-dessus du renflement.			
I.	9	8	5,5	4,5	40°	37°	3°
II	4	3,5	2,3	2	30°	28°	2°
III	8	7	6	4,6	50°	46°	4°
IV	5,5	5	3,5	3	49°	42°	7°
V	8	8	5	4,5	35°	31°	4°
VI	6,5	6,5	3,5	2,5	43;5	35°	8;5
VII	6	6	4	3	32°	27°	5°
VIII . . .	6	5,5	3,5	5	58°	55°	3°
IX	4	4	2,5	2,2	38°	34°	4°
X	5	4,5	4	5	23;5	18;5	5°
XI	4,5	5,5	3	2,6	37°	33°	2°
XII	7	7	5	4	38°	34°	4°
XIII . . .	5,5	4	3	3	25°	22;5	2;5
XIV . . .	6,5	6	3	3	21°	18;5	2;5
XV	1,5	1,5	1,5	1	55°	47°	8°
XVI . . .	1	1	1	0,7	54°	45°	9°

Digitized by Google

Remarquons encore qu'il faut prendre les renflements sur des plantes fraîches; les renflements des plantes coupées et ayant séjourné dans l'eau perdent très rapidement leurs facultés motrices et sont des objets très défavorables pour l'étude du phénomène.

Le premier fait qui ressort de ce tableau, c'est la vérification de la méthode précédente : l'angle $(\varphi - \varphi')$ n'est jamais nul, ce qui signifie que le côté convexe se raccourcit toujours si l'on supprime la forme P, et se raccourcit toujours plus que le côté concave lorsqu'il se produit une contraction dans ce dernier. On peut remarquer, en outre, que la valeur de $(\varphi - \varphi')$ s'élève à mesure que l'angle d'érection augmente. Les expériences XV et XVI ont été faites sur de jeunes tiges dans lesquelles la différenciation externe du renflement n'était pas encore accomplie; pour le n° XV, la courbure s'était effectuée sur une longueur de 2,5 centimètres; pour le n° XVI, de 1,3 centimètre, longueur située dans la région du futur renflement.

Il importe peu que l'on expérimente sur un renflement isolé ou sur plusieurs renflements réunis par un entrenœud. Dans le cas de plusieurs renflements, tous prennent plus ou moins part à la constitution de l'angle φ et à la réduction de ce dernier à φ'. S'il n'y en a que deux, l'entrenœud compris entre les deux renflements reste immobile, tandis que les deux entrenœuds de gauche et de droite sont érigés chacun de leur côté et se comportent comme d'ordinaire, ainsi que le montrent les deux expériences suivantes (voir le tableau VII, ci-après) :

On remarquera, dans la deuxième expérience, le chiffre extraordinairement élevé atteint par l'angle $(\varphi - \varphi')$ qui est ici de 10°; jamais, en dehors de ce cas, nous n'avons constaté une pareille variation dans la valeur de l'angle d'érection.

En définitive, nos expériences confirment entièrement celles de M. de Vries et vérifient les considérations théoriques données plus haut.

Mais la méthode des variations de l'angle d'érection, telle que nous l'avons employée, a été l'objet d'une critique serrée de M. Noll [1]. Pour le savant auteur allemand, les résultats obtenus par M. de Vries sont sans doute

[1] Noll, *Beitrag zur Kenntniss der physikalischen Vorgänge, welche den Reizkrümmungen zu Grunde liegen.* (Arb. des bot. Inst. Würzburg, t. III, pp. 496-533, 1888.)

Digitized by Google

exacts, mais ils ne rendent qu'une partie du phénomène d'érection. Si, en effet, on poursuit les variations de l'angle φ' dans une solution plasmolytique, on le verra d'abord croître et dépasser φ, puis diminuer et, finalement, devenir plus petit que lui. Les résultats de M. de Vries, ne donnant que la fin des variations de l'angle, ne peuvent servir à donner une explication théorique complète des mouvements du renflement.

TABLEAU VII.

	I.	II.
φ de droite	40°,5	38°
φ' de droite	35°	28°
$(\varphi - \varphi')$ de droite	5°,5	10°
Diamètre de l'entrenœud de droite en millimètres.	2	3
Diamètre du renflement de droite avant la plasmolyse	3	6
Diamètre du renflement de droite après la plasmolyse	3	6
Diamètre de l'entrenœud moyen	2	3
Diamètre du renflement de gauche avant la plasmolyse.	3	6,5
Diamètre du renflement de gauche après la plasmolyse	2,5	5,5
φ de gauche	20°	31°
φ' de gauche	16°	23°,5
$(\varphi - \varphi')$ de gauche	4°	7°,5
Diamètre de l'entrenœud de gauche	1,8	2,8

M. Noll propose alors une théorie particulière pour expliquer cette augmentation première de l'angle φ'. L'auteur se place d'abord au point de vue de la croissance par apposition, et va même jusqu'à dire de la théorie qui admet la croissance par intussusception, qu'actuellement « ses principaux points d'appui ont été démolis [1] ». N'acceptant pas cette façon de voir, nous n'avons aucune raison pour discuter la manière dont nous est représenté le rôle de la turgescence dans la croissance en surface des membranes [2]. Mais

[1] Noll, *l. c.*, p. 502.

[2] M. Noll a exposé sa théorie avec plus de détails dans un travail intitulé : *Experimentelle Untersuchungen über das Wachstum der Zellmembran.* (Abhandl. der senck. naturf. Gesellschaft zu Francfurt a. M., t. XV, p. 156, 1887.

Digitized by Google

tout en laissant de côté le fond de la théorie de M. Noll, nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que son explication de l'augmentation de l'angle φ' ne nous paraît pas justifiée [1]. M. Noll admet d'abord, comme allant de soi, que le côté concave se raccourcit. Pour lui, la force de contraction du côté concave est plus grande que celle du côté convexe, attendu que l'élasticité de ce dernier a été diminuée; par conséquent, si l'on supprime la turgescence qui fait équilibre à ces deux forces de contraction, ce sera le côté concave qui se raccourcira le plus [2].

On voit que ce résultat est diamétralement opposé à celui que nous avons obtenu plus haut (pages 91 et 92), et comme M. Noll a également fait un peu plus loin un exposé de l'état physique des parois sur le côté convexe analogue au nôtre, ses deux résultats sont en contradiction l'un avec l'autre. Cependant, pour l'auteur, il n'en est rien, et les deux résultats peuvent fort bien subsister l'un à côté de l'autre; c'est la force de contraction du côté concave qui agirait d'abord, puis, plus tard, l'élasticité agirait d'une façon analogue, mais plus énergique, sur le côté convexe. Le second de ces deux phénomènes serait, selon M. Noll, purement mécanique : sans doute, mais nous ne voyons pas en quoi il le serait plus spécialement que le premier [3]. Nous avouons que l'explication et la sorte de distinction que nous a paru faire M. Noll, sont restées pour nous entièrement obscures. Nous ne nions pas qu'il puisse se produire une contraction sur le côté concave, nous l'avons même constatée (voy. page 91, expériences III et VIII), mais nous estimons que cette contraction s'opère simultanément avec celle du côté convexe; cette dernière ne manque jamais et dépasse de beaucoup celle qui peut se produire sur le côté concave.

Nous n'avions pas à notre disposition d'instrument d'optique, comme celui qu'employa M. Noll, qui nous permit de mesurer de très faibles variations angulaires; néanmoins, nous avons pu vérifier ses indications de la façon suivante.

Un renflement géotropiquement courbé était placé dans un récipient en verre, à base carrée, et maintenu en position au moyen d'une pince capi-

[1] M. Pfeffer vient d'exprimer le même jugement que nous dans un travail récent. (Voy. la note au bas de la page 88).

[2] Noll, *Beitrag zur Kenntniss, etc.*, l. c., pp. 516-517.

[3] Noll, *l. c.*, pp. 518-519.

Digitized by Google

tonnée de liège. Le récipient avait préalablement été posé sur une table de marbre, pour éviter les mouvements que pourraient occasionner un support plus fragile. Puis l'entrenœud du renflement était orienté d'une façon rigoureusement horizontale. Nous plaçant ensuite à 30 centimètres de distance du renflement, nous prenions une fausse équerre et nous en plaçions la base sur une surface plane, de telle sorte qu'elle fût parallèle avec le renflement et à la même hauteur que lui; nous lui donnions enfin une position définitive, telle que le regard pût viser sur une même ligne horizontale la partie supérieure de l'entrenœud du renflement et la base de la fausse équerre. Puis nous abaissions progressivement le second bras de la fausse équerre jusqu'à ce que le regard pût raser son bord supérieur et la face supérieure de l'entrenœud érigé. L'angle pris au moyen de la fausse équerre était ensuite directement mesuré avec un grand rapporteur soigneusement gradué. Avec un peu d'exercice, on arrive, par ce procédé, à une précision qui atteint aisément $^1/_4$ ou $^1/_3$ de degré. Nous faisions alors agir la solution plasmolysante sur le renflement, et nous observions les variations de l'angle au moyen du procédé déjà indiqué. Voici quelques-uns de ces résultats.

TABLEAU VIII.

I.		II.		III.		IV.	
HEURE de l'observation.	VALEURS successives de φ'.	HEURE de l'observation.	VALEURS successives de φ'.	HEURE de l'observation.	VALEURS successives de φ'.	HEURE de l'observation.	VALEURS successives de φ'.
10	16;3	8 $^1/_4$	21;5	9	22°	9	34°
10 $^3/_4$	16;5	8 $^3/_4$	21;8	9 $^1/_2$	22;1	9 $^1/_2$	34;1
11	16;2	9 $^1/_4$	21;5	9 $^3/_4$	22°	10	34°
12	15;8	10 $^1/_4$	21°	10	21;6	11	33°
1	15;4	11	20°				
2	15°	12	19°	φ' a continué à décroître pendant plusieurs heures.		φ' a continué à décroître pendant plusieurs heures.	
φ' a continué à décroître pendant deux ou trois heures.		12 $^1/_2$	18;75				
		1 $^1/_2$	17;5				
		2 $^1/_2$	17°				

Digitized by Google

Nous donnons également ci-dessous la courbe des variations de l'angle φ', en fonction du temps, dans une de nos expériences les mieux réussies (fig. 21), courbe qui, comme le tableau ci-dessus, met en évidence que pendant la première demi-heure environ l'angle φ' croît dans la solution plasmolysante d'abord rapidement, puis plus lentement, enfin, il s'arrête et diminue pendant plusieurs heures. L'augmentation est toujours très faible comparée à la diminution subséquente. Pour des diminutions moyennes de 4° à 5°, l'augmentation maximale que nous ayons constatée a été de 18′, en général, l'augmentation oscillait autour de 8′-12′. Souvent aussi nous n'avons constaté aucun accroissement appréciable de l'angle. Toutefois, nous sommes prêt à reconnaître que nous aurions pu probablement remarquer une augmentation, quoique très faible, en nous servant d'instruments de grande précision.

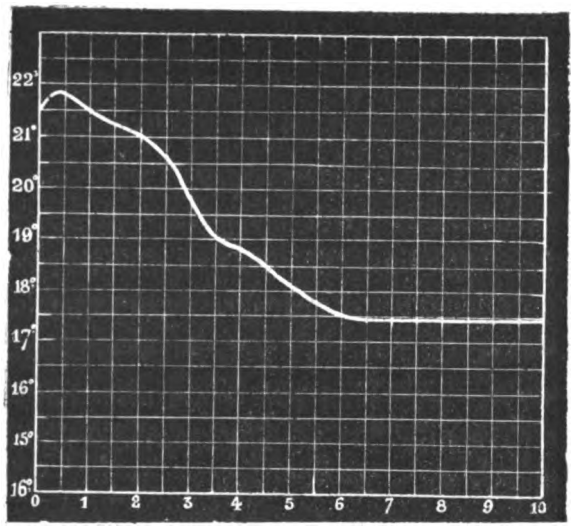


FIG. 21.
Courbe des variations de l'angle φ' d'un renflement fléchi du *G. Tetrahit* dans une solution plasmolysante en fonction du temps.

Comment maintenant expliquerons-nous la variation positive de l'angle φ' découverte par M. Noll?

Un point qui nous a immédiatement frappé, en expérimentant avec ces renflements, c'est que si l'on en met un dans une solution plasmolysante,

Digitized by Google

il est absolument impossible que le liquide plasmolyseur suspende instantanément la turgescence. Protégée à la périphérie par un double manteau de collenchyme et de bois, la moelle n'est accessible que par les deux surfaces de section, il faut donc un certain temps pour que, la plasmolyse progressant de cellule en cellule, la turgescence soit entièrement suspendue. En pratiquant des coupes dans des renflements placés dans une solution plasmolysante depuis quelques minutes, nous n'avons, en effet, jamais constaté que la plasmolyse eût dépassé le voisinage de la surface de section. Ce n'est qu'au bout d'une demi-heure environ et au minimum — le temps exactement nécessaire varie naturellement d'un exemplaire à l'autre — que la turgescence de la moelle est suspendue. Ce fait nous donne l'explication de l'augmentation de φ'. Au moment où le liquide plasmolyseur commence à agir, l'angle d'érection continue à croître sous l'action de la force P avec la même vitesse que quand le liquide plasmolyseur n'était pas en sa présence. Puis, à mesure que la turgescence baisse, le mouvement devient plus lent pour s'arrêter enfin complètement. Sitôt la turgescence suspendue, l'angle commence à décroître, et nous retrouvons au bout de quelques heures le rapport $\varphi > \varphi'$, ainsi que l'avait indiqué M. de Vries.

On nous objectera sans doute que si l'explication est plausible pour des organes compliqués comme les renflements moteurs des *Galeopsis,* ou d'autres corps moteurs, comme les nœuds des Graminées, des Polygonées, etc., elle n'est plus valable pour des végétaux unicellulaires chez lesquels rien n'arrête l'action du liquide plasmolyseur. Or, M. Noll assure que des « entre-nœuds » de *Nitella* et des hyphes de *Phycomyces* ont montré d'une façon très nette une augmentation de courbure [1].

L'objection est, croyons-nous, beaucoup moins grave qu'elle n'en a l'air. Il ressort des expériences de M. Noll, qui paraissent avoir été faites avec le plus grand soin, que l'augmentation de courbure se produisait au moment où le liquide plasmolyseur arrivait en contact avec le sujet étudié et ne durait que quelques instants. Or, même dans les piles de cellules isolées des *Nitella* ou dans les hyphes, la plasmolyse n'est jamais instantanée. Tous

[1] Noll, *l. c.*, pp. 520-521.

Digitized by Google

ceux qui ont étudié l'action de corps plasmolyseurs sur un fragment isolé d'épiderme ou sur des algues savent qu'il faut un temps plus ou moins long, ordinairement plusieurs minutes, avant que la plasmolyse commence. Il n'en faut pas plus pour que notre explication puisse être appliquée à des éléments livrés directement à l'action du liquide plasmolyseur. L'augmentation de courbure, constatée par M. Noll, n'est pour nous que la continuation des mouvements géotropiques antérieurs. Nous voulons dire par là qu'elle est la suite du phénomène d'allongement et d'accroissement micellaire qui s'opère dans les parois sous l'action du géotropisme, et qui se continue d'une façon induite pendant quelques instants avant que la plasmolyse ait commencé. Nous reconnaîtrions notre théorie en défaut dans le cas où l'on viendrait à nous montrer que la courbure augmente, alors même que la plasmolyse se produit, et au moment où elle commence à agir énergiquement.

C'est ce que l'on ne peut pas inférer, nous semble-t-il, du travail de M. Noll; le savant physiologiste nous parle bien d'une augmentation de courbure sous l'action d'une solution de KNO_3, mais il ne nous dit pas expressément qu'au moment où cette augmentation se produisait la turgescence était déjà suspendue.

Pour terminer la question du mécanisme des mouvements, nous ajouterons que, pendant que la courbure s'opère, on peut constater, en faisant de fines mensurations, que la moyenne de l'épaisseur des parois du collenchyme est plus faible sur le côté convexe que sur le côté concave. Ce fait, qui est une conséquence du mouvement de courbure, a été découvert par M. Noll [1]; nous ne pouvons que le confirmer. L'accroissement en épaisseur en efface du reste rapidement les traces. Quant à la constatation expérimentale de la diminution de ténacité sur le côté convexe, nous avons, à notre grand regret, dû le laisser de côté, le temps nous ayant fait défaut. Ici encore le travail de M. Noll, riche en observations soignées, comble utilement la lacune, et nous ne pouvons qu'y renvoyer le lecteur [2]. Il est à peine besoin de dire que M. Noll a, dans ses expériences, pleinement confirmé ce fait, indiqué

[1] Noll, *l. c.*, pp. 524-528.
[2] Id., *l. c.*, pp. 514-516.

Digitized by Google

d'une façon péremptoire par la théorie, que le coefficient de ténacité du côté convexe est sensiblement diminué [1].

Il est encore une dernière conséquence théorique que nous avons pu vérifier expérimentalement. On sait, depuis les expériences de M. Noll [2], que, dans les nœuds moteurs des Graminées, on peut empêcher artificiellement un segment d'exécuter une flexion et qu'alors, l'intercalation de nouvelles micelles s'opérant toujours sous l'action excitatrice de la pesanteur, le nœud devient difforme sur le côté convexe. Nous avons pu vérifier ce fait pour les renflements moteurs du *Galeopsis*. Deux renflements mesurant 8,5 et 9 millimètres de diamètre furent placés dans un tube de verre effilé au chalumeau à une des extrémités, de façon à ne laisser qu'une fine ouverture permettant l'accès de l'air; l'autre extrémité, très large, était entièrement obstruée par du sable humide. Les renflements furent placés horizontalement dans ces petits appareils, de façon qu'ils ne puissent exécuter qu'un

[1] Il nous avait semblé que l'on pourrait, au moyen de l'angle φ et du coefficient d'élasticité du collenchyme dans le renflement intact, obtenir, par l'intermédiaire d'une formule peu compliquée, la diminution survenue dans la valeur du coefficient d'élasticité sur le côté qui devient convexe, et cela d'une manière très exacte. Nous nous sommes adressé, pour être renseigné à ce sujet, à M. le Dr Cailler, professeur de mécanique à l'Université de Genève, qui a bien voulu nous transmettre les renseignements suivants, pour lesquels nous le remercions vivement. La note de M. Cailler étant arrivée longtemps après la rédaction de ce chapitre, le temps nous a manqué pour essayer de l'utiliser pratiquement.

« Une formule qui résoudrait ce problème serait, sans aucun doute, donnée par un développement en série procédant suivant des fonctions compliquées et dont on ne pourrait vraisemblablement pas faire grand usage. Le seul moyen serait donc, à mon avis, d'employer une formule approximative, comme

$$F - F' = a \operatorname{tang} \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ou, encore plus généralement,

$$F - F' = a \operatorname{tang} \varphi + b \operatorname{tang}^3 \varphi + c \operatorname{tang}^5 \varphi + \cdots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Les lettres a, b, c dans la formule (2) et a dans la formule (1) désignent des coefficients qui dépendent des dimensions et de l'élasticité de la plaque soumise aux forces F et F'. Les b, c .... devront décroître avec une grande rapidité, la formule (1) suffira donc ordinairement; mais si la plaque est douée d'une grande rigidité, comme a devient très grand, il conviendrait de faire usage de la formule (2) contenant un nombre arbitraire de coefficients à déterminer par autant d'expériences ».

Il est à peine besoin d'ajouter que, pour notre cas particulier, la première formule est la seule qui soit applicable.

[2] Noll, *l. c.*, p. 509.

Digitized by Google

angle d'érection très faible, et laissés dans cet état pendant soixante-sept heures, à température constante et dans l'obscurité. Au bout de ce temps, les renflements furent sortis et examinés. Tous deux avaient exécuté la flexion maximale à laquelle ils étaient limités (4°); tous deux également avaient formé sur leur coté convexe un bourrelet d'une épaisseur de 0,8 millimètre pour l'un, de 1,3 millimètre pour l'autre, bourrelet qui était étroitement appliqué contre les parois du tube de verre.

Au sujet des théories qui ont été proposées pour expliquer d'une manière différente les courbures géotropiques et héliotropiques, nous dirons simplement que celle qui consiste à admettre une différence de tension entre le côté concave et le côté convexe est en contradiction avec les faits dans le cas particulier. En effet, la pression hydrostatique exercée sur les parois du collenchyme par le suc cellulaire est très faible, et les variations dans sa valeur restent sans effet sur lesdites parois. De plus, elle est en contradiction avec toutes nos expériences plasmolytiques, opérées pendant la courbure, et qui indiquent une concentration et un pouvoir osmotique à peu près égal pour tous les éléments de la moelle.

Quant à la théorie de M. Wortmann, basée principalement sur l'étude des flexions chez un *Phycomyces*, nous la considérons comme inapplicable aux cas que nous avons examinés; d'une manière générale, nous partageons entièrement, à son sujet, l'opinion de MM. Elfving et Noll, aux critiques desquels nous ne saurions rien ajouter de nouveau [1].

Enfin, on remarquera que nous sommes arrivé à faire remonter les courbures géotropiques et héliotropiques des renflements, ainsi que l'ont fait avant nous plusieurs auteurs (Noll, Detmer, etc.), au fait que, sous l'action

[1] Voy. Wortmann, *Zur Kenntniss des Reizbewegungen* (Botan. Zeitung, t. XLV, 1887, n° 48-51). — Idem, *Einige weitere Versuche über die Reizbewegungen vielzelliger Organe* (Ber. der deutsch. bot. Gesellsch., V, 1887, p. 459). — Idem, *Zur Beurtheilung der Krümmungserscheinungen der Pflanzen* (Bot Zeitung. t. XLVI, 1888, n°s 30 et 31). — Idem, *Beiträge zur Physiologie des Wachstums* (Bot. Zeitung, t. XLVII, 1889). — Idem, *Ueber die Beziehungen der Reizbewegungen wachsender Organe zu den normalen Wachstumserscheinungen* (Bot. Zeitung, t. XLVII, 1889). — Elfving, *Zur Kenntniss der Krümmungverscheinungen der Pflanzen* (Sartrick ur Ofversigt af Finska vet. Soc. Förhandlingar, t. XXX. Helsingfors, 1888). — Idem, *Quelques mots sur la courbure des plantes* (Journal de botanique, II, 1888, pp. 197-200. — Noll, *l. c.*, pp. 500-501, et *ibidem, passim.*)

Digitized by Google

excitatrice de la pesanteur et de la lumière, le plasma pariétal diminue la ténacité des parois cellulaires sur le côté qui devient convexe. Mais en quoi consiste cette action des forces excitatrices? Et de quelle façon le plasma lui-même agit-il sur les parois? Ce sont là des questions auxquelles il nous paraît actuellement impossible de répondre. Les hypothèses que l'on a proposées jusqu'ici pour les résoudre ne nous ont semblé ni claires, ni satisfaisantes, outre qu'elles sont entièrement invérifiables [1].

Il nous reste, au sujet des renflements, à examiner brièvement les relations qui existent entre leur structure et leur fonction, et l'utilité de cette fonction elle-même, si toutefois elle existe.

Notons d'abord le grand développement des tissus mous : l'assise phloeotermique qui se divise longtemps et ne se subérise que lorsque les renflements sont très âgés, le parenchyme intraxylaire, la moelle.

Plus remarquable encore est la distribution du squelette. D'abord, nous avons l'énorme collenchyme cortical dont la position périphérique s'accorde on ne peut mieux avec la solidité qu'il donne à la tige en sa qualité de tissu mécanique, et avec le rôle que sa qualité de tissu vivant et ses propriétés physiques lui font jouer dans les mouvements d'érection. C'est ensuite la région péricyclique, qui est collenchymateuse, avec de rares stéréides plongées dans le collenchyme. La position plus rapprochée du centre qu'occupe le bois est bien celle qui convient à un tissu qui possède un coefficient de ténacité et d'élasticité élevé. Du reste, la réduction du libriforme est une concession faite à la plasticité par la solidité. On peut facilement s'en convaincre en étudiant, au début de la floraison, le lieu de fractures des tiges soumises à l'action de poids. C'est toujours sur les renflements moteurs que la fracture s'opère et non sur les entrenœuds.

Le rôle des renflements se révèle comme étant d'une utilité incontestable pour la plante dans une quantité de cas. Nous avons d'abord celui dans lequel les pieds sont couchés par le vent ou par une cause accidentelle de ce genre; on constate que dans l'immense majorité des cas, sous l'action du géotropisme, les tiges s'érigent avec une grande rapidité et rattrapent ainsi

[1] Voy., par exemple : Detmer, *System der Pflanzen-Physiologie*, 2ter Theil (dans *Schenk's Handbuch der Botanik*, t, II, 1882, p. 534).

Digitized by Google

en fort peu de temps les dommages que leur a causés la tempête. Dans les haies et les taillis, que les *Galeopsis* du groupe *Tetrahit* affectionnent, la sensibilité phototropique fait rapidement prendre aux tiges qui se courbent sur leurs renflements une position favorable à l'optimum d'éclairage. Dans certains cas, les deux forces se superposent et produisent des courbures énormes. Nous avons vu près d'Etoy, dans le canton de Vaud (Suisse), des tiges de *G. Tetrahit* ayant exécuté sur un seul renflement moteur des flexions de 140°, 150° et même 160°!! Et voici comment. Les nucules avaient germé dans un fossé profond recouvert d'un épais treillis de *Rubus*, *Clematis vitalba*, *Convolvulus sepium* et autres plantes grimpantes qui, d'en haut, en excluaient presque entièrement la lumière. Les tiges avaient d'abord tourné sur leurs renflements d'angles variables, sous l'action de rayons lumineux unilatéraux. A mesure que le dôme de verdure surplombant devenait plus opaque, et que le point de départ des rayons se déplaçait en se localisant, les tiges avaient suivi ce point en continuant à se courber. Enfin, le géotropisme avait eu sa part dans les flexions, part plus ou moins grande suivant les échantillons et la position de ces derniers. Il est clair que si les tiges, ayant acquis un certain développement et un squelette stéréique, étaient dépourvues de renflements moteurs dans lesquels des tissus mous sont encore susceptibles de réagir contre les excitations tropiques, le sort des échantillons dont nous parlons aurait été de mourir dans un laps de temps plus ou moins long, après une vie étiolée.

A propos du collenchyme, on a attaqué récemment comme trop exclusive la fonction mécanique, en tant que fonction capitale, attribuée par M. Ambronn à ce tissu. MM. Kohl et C. Müller veulent y voir un tissu aquifère dont la position périphérique servirait précisément à diminuer la transpiration; les fonctions mécaniques ne seraient que secondaires et acquises [1]. Nous ne pouvons absolument pas nous rattacher à cette opinion. Nous n'avons pas remarqué que l'eau du collenchyme y fût en plus grande abondance qu'ailleurs; sa présence est une condition nécessaire à la vie des

[1] Kohl, *Die Transpiration der Pflanzen*, p. 114. Braunschweig, 1886. — C. Müller, *Ein Beitrag zur Kenntniss des Formen des Collenchyms* (Ber. der deutsch. bot. Gesellsch., VIII, 1890, pp. 164-166.)

Digitized by Google

cellules, mais elle est là sous une pression extrêmement faible. Au surplus, nous nous trouvions dans des conditions tout à fait favorables pour nous faire expérimentalement une idée de la valeur de cette opinion. Les renflements moteurs des *Galeopsis* présentent un réservoir plein d'eau (la moelle) entouré d'un bois à éléments mécaniques peu développés, et à région péricyclique non entourée d'un endoderme, dans le sens d'un phloeoterme subérisé. Rien ne semble, à première vue, s'accorder mieux avec l'opinion de MM. Kohl et Müller que de voir un énorme manteau de collenchyme entourer ce réservoir à eau mal protégé. Mais aussi, comme conséquence directe de ce rôle de protection, il doit s'ensuivre que si le manteau qui remplit une fonction effective est supprimé, le réservoir à eau doit s'en ressentir et perdre de son contenu.

Nous avons alors fait l'expérience suivante. Avisant un robuste pied de *G. Tetrahit* nous avons, au moyen d'un scalpel, dépouillé un renflement de son manteau de collenchyme; le liber étant difficile à respecter, il fut enlevé aussi, de sorte que le bois fut mis à nu. Les rameaux supérieurs de la plante étaient engagés dans les branchages d'une haie, sans quoi la tige n'aurait pu résister au vent. Les pieds de *Galeopsis*, auxquels on fait subir cette opération sans les soutenir dans leur partie supérieure, se plient infailliblement en deux à l'endroit opéré sous l'action du vent : fait qui rend tangible pour ainsi dire la fonction squelettaire du collenchyme. Pendant les quatre jours qui suivirent, il fit un temps fort chaud et très sec (milieu d'août), favorable à notre projet. Le cinquième jour, le renflement opéré ne montrait pas l'apparence d'une contraction, ce qu'il n'aurait pas manqué de faire s'il avait perdu de l'eau, et la plante entière se portait parfaitement bien. Des sections transversales examinées au miscroscope nous montrèrent les éléments de la moelle gonflés d'eau, et aussi fortement turgescents que dans les renflements non opérés.

On nous répondra peut-être que l'eau était remplacée au fur et à mesure qu'elle s'évaporait, et que le grand développement du parenchyme ligneux autour des trachées favorise même l'alimentation rapide de la moelle. Mais dans ce cas-là, la perte sensible d'eau que subissaient les feuilles des parties supérieures de la plante, par le temps chaud et sec qui régnait, n'était

Digitized by Google

plus ou très imparfaitement compensée par l'apport du système conducteur, et, par conséquent, ces parties devaient se faner. Nous avons vu qu'il n'en était rien, et que l'on ne constatait dans la turgescence des parties supérieures aucune différence d'avec l'état normal.

Du reste, la structure des éléments du collenchyme, sa topographie, l'âge de la plante auquel il fonctionne dans la plupart des cas, toutes ces raisons, ajoutées aux expériences relatées ci-dessus, font mettre très à l'arrière-plan la fonction attribuée à ce tissu par MM. Kohl et C. Müller, et justifient pleinement la fonction mécanique, en tant que fonction principale, découverte et si bien étudiée par MM. Schwendener et Ambronn.

L'expérience d'annellation ci-dessus relatée a déjà montré la résistance considérable offerte à l'évaporation par les éléments médullaires; l'expérience suivante est encore plus décisive. Nous avons pratiqué dans tous les renflements moteurs d'un pied de *G. Tetrahit,* haut de 1,75 centimètre, des trous pénétrant jusqu'à la moelle, au moyen d'un trocart obturateur. En retirant le cylindre obturateur du tuyau, il sortit un peu d'eau, et nous laissâmes le tuyau environ une demi-heure en place, pour éviter que la plaie ne se refermât de suite. Au bout de cinq jours d'un temps sec et chaud (milieu d'août), les trous forés par le trocart étaient encore parfaitement conservés, les parois de la plaie s'étaient cicatrisées, les renflements n'avaient pas diminué de volume, les éléments médullaires étaient turgescents, et la plante était en parfaite santé.

Nous avons vu que la moelle et la quantité d'eau qu'elle contient joue un rôle capital dans les mouvements géotropiques et héliotropiques. A côté de ce rôle, ce tissu en a sans doute un second, celui d'alimenter d'eau les tissus périphériques. Cette alimentation est du reste facilitée par les communications directes qui existent entre la moelle et le collenchyme cortical, par l'intermédiaire des rayons médullaires et de la région phloeotermique dépourvue d'endoderme subérisé.

Il ne faudrait pas croire cependant que l'eau des renflements est emmagasinée dans la moelle, comme elle l'est dans certaines feuilles, pour subvenir aux besoins d'autres tissus en cas de sécheresse; son rôle essentiel est de donner de la force vive dans les mouvements des renflements; il n'y a

Digitized by Google

qu'à priver d'eau un pied de *G. Tetrahit* pour s'apercevoir que les feuilles se fanent très rapidement et bien avant que la contraction des renflements soit appréciable.

TABLEAU IX.

NUMÉROS des renflements examinés.		I.	II.	III.	IV.
Diamètre humide en millimètres.	T	12,5	13,5	14	9
	E	8,5	9	10	6
	D	4	4,5	4	3
Diamètre sec en millimètres.	T	5,5	6	6,5	2,5
	E	6	7,5	7	4,5
	D	0,5	1,5	0,5	2
Valeur de la contraction.	T	56 °/₀	55,5 °/₀	53,5 °/₀	72,2 °/₀
	E	29,3 °/₀	16,6 °/₀	30 °/₀	25 °/₀
	D	26,7 °/₀	38,9 °/₀	23,5 °/₀	47 °/₀
Poids humide en grammes.	T	3,001	3,701	2,605	1,439
	E	3,282	3,470	1,730	1,728
	D	—	—	—	—
Poids sec en grammes.	T	0,660	0,690	0,498	0,260
	E	0,789	0,907	0,417	0.438
	D	—	—	—	—
Pour-cent de l'eau contenue.	T	78,070 °/₀	81,356 °/₀	80,883 °/₀	81,547 °/₀
	E	75,929 °/₀	73,861 °/₀	75,895 °/₀	74,652 °/₀
	D	7,141 °/₀	7,495 °/₀	4,988 °/₀	6,895 °/₀

Digitized by Google

Le tableau ci-dessus donnera une idée de la violente contraction que subissent les tissus aquifères au moment de leur dessiccation. Il est difficile de préciser combien d'eau correspond à un poids sec déterminé de moelle. On peut cependant s'en faire quelque idée en comparant la teneur en eau d'un renflement (T) avec celle d'un même poids d'entrenœud (E). Nous avons, dans ce but, pesé des renflements et des entrenœuds, qui étaient ensuite placés dans une étuve chauffée à 99°; on les y laissait jusqu'à poids constant.

Les résultats obtenus et consignés sur notre tableau montrent que les renflements possèdent en moyenne, au commencement de la floraison, 5 °/₀ plus d'eau que les entrenœuds sous-jacents auxquels se rapportent nos mensurations. On voit aussi que la contraction de la région du renflement, sous l'action de la sécheresse, est en moyenne de 59 °/₀ du diamètre primitif, — celle de l'entrenœud sous-jacent n'est que de 25 °/₀ en moyenne, — et que les renflements se contractent environ de 34 °/₀ plus que les entrenœuds [1].

[1] Des coupes de la moelle du renflement, traitées à chaud par la liqueur de Fehling, nous avaient fait constater sur les parois cellulaires un précipité d'oxyde de cuivre. Attribuant cette réduction à la présence de glucose, nous avons prié MM. Barbier et Jeanprêtre, docteurs ès sciences physiques et chimiques, de bien vouloir procéder à une analyse comparée des renflements et des entrenœuds au point de vue de la teneur en glucose. Voici les résultats que nous devons à l'extrême obligeance de nos deux amis :

I.

Renflements séchés à 100° :
Gr. 3,9470 contiennent 0,3930 de sucre, soit 10 °/₀.
Entrenœuds séchés à 100° :
Gr. 3,4080 contiennent 0,4060 de sucre, soit 11,9 °/₀.

Craignant que le séchage à l'étuve à 100° n'altérât une partie du sucre, il fut procédé à une deuxième analyse sur des matériaux frais.

II.

Renflements humides :
Gr. 4,8920 contiennent 0,1123 de sucre, soit 2,3 °/₀.
Entrenœuds humides :
Gr. 3,5920 contiennent 0,0813 de sucre, soit 2,2 °/₀.

Ces chiffres sont excessivement élevés et sont peut-être dus à la présence d'un corps réducteur de la liqueur de Fehling autre que le glucose. La vérification de cette hypothèse

Digitized by Google

Étude de la feuille.

CHAPITRE XIV.

APPARENCE EXTÉRIEURE DE LA FEUILLE.

En laissant de côté les cotylédons, dont nous parlerons au paragraphe suivant, les feuilles aériennes sont toujours pétiolées et se ressemblent beaucoup. Quelquefois cependant les feuilles qui suivent les cotylédons diffèrent un peu des autres par leur sommet émoussé ou arrondi et par leurs dents plus crénelées.

La forme générale des feuilles est lancéolée, mais elle varie dans de larges limites. On trouve tous les degrés entre les feuilles presque linéaires de certains pieds du *G. Ladanum* subsp. *angustifolia*, jusqu'aux feuilles largement ovées et cordiformes à la base du *G. pubescens* var. *genuina*.

L'indument est aussi très variable. Chez le *G. Ladanum* var. *glabra* et plus rarement chez le *G. Reuteri*, les feuilles sont presque entièrement glabres; chez le *G. speciosa* var. *hispidior*, elles sont hérissées de poils sétacés; chez les *G. dubia* et *pyrenaïca*, elles sont soyeuses surtout en dessous et dans les parties supérieures des axes.

Les marges sont ordinairement occupées par une serrature consistant en dents ou en créneaux de forme assez variée. Parfois la serrature manque presque complètement, au moins sur les feuilles raméales (certains pieds du *G. Ladanum* subsp. *angustifolia* et du *G. Reuteri*).

La nervation consiste en une nervure médiane qui porte à droite et à gauche un nombre variable de nervures latérales secondaires, souvent plus de dix dans les *G. Tetrahit* et *speciosa*. Les nervures latérales secondaires alternent presque toutes les unes avec les autres. Elles aboutissent aux sinus

échappe à notre compétence, mais elle nous paraît probable, vu que les entrenœuds contiennent plus de corps réducteurs que les renflements, ce qui est contraire à ce que nous attendions d'après nos expériences plasmolytiques. Il est en tout cas certain que la moelle contient du glucose, et que c'est au pour-cent considérable de ce sucre qu'est dû le haut pouvoir osmotique des éléments en question.

Digitized by Google

séparateurs des dents et se divisent en deux branches dont l'une va rejoindre la nervure descendante de la dent supérieure, et l'autre la nervure ascendante de la dent inférieure. La feuille se trouve être ainsi marginée par une nervure de bordure ondulée et sympodiale. Il y a du reste souvent des irrégularités individuelles dans la nervation, et les latérales sont partout réunies par des anastomoses transversales plus ou moins nombreuses. Ces anastomoses ne sont presque pas saillantes en dessous : la feuille appartient donc à notre type penné simple [1].

CHAPITRE XV.

STRUCTURE DES COTYLÉDONS.

La structure du pétiole des cotylédons n'offrant rien de spécial, on trouvera suffisamment de détails sur le pétiole des feuilles aériennes pour que nous puissions le négliger.

Nous avons déjà vu (chap. I) quelle était la conformation extérieure des cotylédons; passons donc à l'examen de leur structure interne.

L'épiderme des cotylédons ne diffère pas sur les deux faces de ces organes (en section transversale); il est formé par des cellules de section transversale plus ou moins quadrangulaire, à parois minces, recouvertes extérieurement par une très fine cuticule. Sous cet épiderme se trouve une couche palissadique. Elle est formée par des cellules en barillet, deux fois plus hautes que larges, disposées bout à bout les unes au-dessus des autres, de façon à former des séries non alternantes. Entre l'épiderme inférieur et la zone palissadique se trouve une couche de tissu spongieux aussi épaisse que la région à palissades (forte de 3-4 assises en moyenne). Elle se compose de gros éléments ayant la forme de sphéroïdes très irréguliers, à membranes minces, se touchant lâchement les uns les autres, et laissant entre eux des méats aérifères sinueux et très nombreux. Ces cellules contiennent moins de chlorophylle que la zone palissadique. Le cotylédon contient une nervure médiane et de nombreuses nervures secondaires. Les nervures secondaires n'offrent qu'une

[1] Voy. Briquet, *Fragmenta Monographiae Labiatarum*, fasc. I, p. 19 (Bull. Soc. bot. de Genève, V, 1889), et *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 3, 1891.

Digitized by Google

réduction de la structure de la nervure médiane; il suffira donc d'étudier cette dernière.

Le faisceau libéro-ligneux qui forme le cœur de la nervure est situé sous la zone palissadique; il n'est donc pas dominé par un gros coussinet parenchymateux comme nous en trouverons un dans la feuille aérienne. Cependant, la partie péricyclique de la nervure est séparée du tissu palissadique par une zone régulière du parenchyme. Cette zone se compose de gros éléments incolores, de section transversale polygonale, de section longitudinale allongée. Elle s'appuie à droite et à gauche contre le faisceau dont la section est semi-circulaire. L'intérieur du demi-cylindre est rempli par un parenchyme ligneux tendre, à la limite inférieure duquel on trouve les trachées initiales. Le demi-cylindre ligneux se compose d'une douzaine de rayons vasculaires interrompus çà et là par des rayons médullaires unisériés. Le liber est peu développé et se compose d'éléments extrêmement petits. Il est limité du côté de l'écorce par de gros éléments parenchymateux à large lumen. Ces éléments peuvent à peine se distinguer de la zone parenchymateuse corticale par leur taille. En certains endroits ils se sont divisés par une cloison tangentielle. Ailleurs, à la suite de cloisonnements répétés, ils forment des ilots de petits éléments que l'on ne peut distinguer histologiquement du prosenchyme et du parenchyme libériens, mais qui ne contiennent ni tubes criblés, ni cellules compagnes : ils sont le produit du fractionnement de l'assise péricyclique. Notons encore que les cotylédons sont glabres, ou à peu près glabres; leurs deux épidermes portent des stomates que nous étudierons à propos de la feuille aérienne, en même temps que la forme des éléments épidermiques et la disposition des cellules annexes.

CHAPITRE XVI.

STRUCTURE DU PÉTIOLE.

Nous prenons comme objet d'étude un jeune pétiole du *G. Tetrahit*; la structure histologique du pétiole est, du reste, la même dans toutes les espèces; il n'y a que la course des faisceaux qui ne soit pas identique. Si

Digitized by Google

l'on se reporte à ce que nous avons dit de la course des faisceaux dans la tige, on se rappellera que dans chaque pétiole entrent deux faisceaux foliaires. Immédiatement après leur sortie, et déjà dans l'écorce du nœud, chacun de ces deux faisceaux détache l'un à gauche, l'autre à droite, un faisceau latéral plus petit et plus grêle. Les deux faisceaux sortants sont les faisceaux médians du pétiole, les deux faisceaux latéraux dérivés deviennent dans le pétiole les faisceaux des cornes. Or, tandis que dans le sous-genre *Ladanum* les faisceaux médians se réunissent *en général* assez vite en un seul, les faisceaux médians, dans le sous-genre *Tetrahit*, parcourent tout le pétiole pour ne se réunir qu'à la partie inférieure de la feuille.

Un jeune pétiole du *G. Tetrahit* présente donc un épiderme constitué par des cellules de section transversale rectangulaire, allongées dans le sens du rayon, et offrant de nombreux poils sétacés (ces derniers manquent dans le sous-genre *Ladanum*). Pour suivre l'augmentation en volume du pétiole, l'épiderme a sectionné radialement ses cellules, lesquelles deviennent collenchymateuses sur les coins internes. L'assise corticale hypodermique a subi le même sort : ses cellules se sont cloisonnées radialement d'une façon répétée. Nous trouvons, de la sorte, à la périphérie du pétiole, une zone à petits éléments recloisonnés, composée de deux assises, l'épiderme et une assise hypodermique corticale qui est collenchymateuse. La deuxième assise corticale se cloisonne très peu, ses éléments augmentent simplement de volume. Au-dessous des faisceaux médians, la région corticale compte 6-7 assises. Ces assises sont composées d'un parenchyme régulier, dont les parois radiales et tangentielles restent pendant longtemps exactement sur le prolongement les unes des autres. Ces assises sont plus ou moins incolores. La plus interne contient de la chlorophylle dont les grains sont gorgés d'amidon : c'est la couche homologue de l'endoderme dans la tige. Les cornes du pétiole ont leurs extrémités remplies de très bonne heure par un cordon de collenchyme typique. Ce cordon se continue sous l'épiderme supérieur et soustend de la sorte la gouttière d'une façon continue. Les cordons de collenchyme des cornes sont tantôt séparés des faisceaux des cornes par une ou deux assises de parenchyme ordinaire, tantôt le collenchyme vient s'appuyer directement contre le parenchyme ligneux ou le jeune libriforme.

Digitized by Google

Les faisceaux des cornes sont déjà en place au moment où le pétiole sort de la tige, tant ils s'écartent rapidement des médians. Chez eux, l'assise-limite de l'écorce n'est pas caractérisée comme une gaine amylifère. Entre cette assise et le liber, on trouve de gros éléments parenchymateux, tantôt isolés, tantôt juxtaposés par groupes de deux ou trois. Entre ces éléments ou ces groupes d'éléments, les cellules de l'assise primitive ont subi un fractionnement énergique dû à une série de cloisonnements tangentiels et radiaux, qui a abouti à la formation d'îlots de parenchyme et surtout de prosenchyme entièrement dépourvus de tubes criblés et de cellules compagnes. Comme précédemment (dans les cotylédons), on ne peut distinguer histologiquement ces éléments de ceux du parenchyme libérien à gros éléments et du cambiforme que l'on trouve un peu plus loin dans le liber. L'assise-limite ne se distingue guère qu'à la taille de ses éléments.

Les faisceaux médians, de section légèrement réniforme, sont inclinés l'un vers l'autre et séparés par quatre ou cinq assises de tissu conjonctif (au moins dans la partie inférieure du pétiole). L'étude de ces faisceaux est intéressante. Nous remarquons tout d'abord que l'assise-limite est très évidente, et facile à distinguer des tissus attenant au faisceau par la grande dimension de ses éléments et leur teneur en chloroleucites gorgés d'amidon. Au-dessous de l'assise-limite, et entre cette dernière et le liber, nous trouvons une gaine de parenchyme régulière et parfaitement caractérisée. Elle est composée d'éléments plus gros que les cellules libériennes, mais bien plus petits que ceux de l'assise-limite; leur section transversale est polygonale ou irrégulièrement carrée. Sur certains points, quelques cloisonnements tangentiels et radiaux commencent déjà à altérer la netteté primitive de l'assise, qui est péricyclique. Plus tard ce cloisonnement s'accentue et il devient très difficile de reconnaître ce qui est d'origine péricyclique de ce qui appartient au liber; à l'âge adulte cela est même ordinairement impossible. Mais si l'on prend le faisceau jeune, on arrivera toujours à éviter les irrégularités et à reconnaître l'assise primitive. Dans le liber, aucun des éléments n'atteint le calibre des cellules de l'assise péricyclique primitive. Le faisceau ligneux, à l'époque où nous faisons cette étude, n'offre pas encore une sclérification bien appréciable dans le libriforme et les tissus ligneux non vasculaires. Les trachées

Digitized by Google

forment 8-14 séries de rayons parallèles. Le parenchyme ligneux tendre qui limite le faisceau à sa partie supérieure et les rayons médullaires sont remplis de chloroleucites amylogènes.

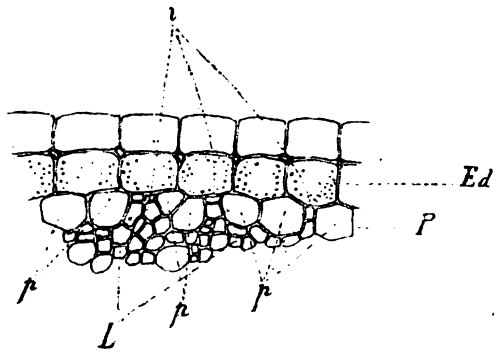


FIG. 22.

Section transversale opérée dans un jeune pétiole du *G. Tetrahit*, à la limite de l'écorce et du liber. — Ed, gaine amylifère; P, assise péricyclique; *t*, îlots de fractionnement aboutissant à la formation de parenchyme et de prosenchyme aux dépens des gros éléments de l'assise péricyclique (*p*); L, liber.

Les variations dues à l'âge sont peu considérables dans le pétiole. La première modification qui s'introduit, c'est la formation d'un tissu chlorophyllien à éléments sphériques plus ou moins lâches, qui se constitue directement aux dépens du parenchyme cortical dans les cornes, autour des faisceaux, et qui descend de là sur les flancs du pétiole sous l'épiderme dorsal, sans cependant recouvrir complètement la face dorsale.

Il n'y a pas formation de stéréides péricycliques, ou la formation de ces éléments est en tout cas isolée et rare. Par contre, la zone péricyclique devient plus tard assez nettement collenchymateuse, tandis que le libriforme atteint rapidement une sclérification complète.

CHAPITRE XVII.

HISTOGÉNIE ET STRUCTURE DE LA FEUILLE.

Dans leur développement, les feuilles passent par les stades ordinaires de mamelons et d'écailles. Une section transversale opérée dans une écaille, au-dessous du point végétatif, donne les résultats suivants (chez le *Tetrahit* par exemple) :

Digitized by Google

L'ensemble de la coupe rappelle, comme forme, la figure offerte par la même coupe du pétiole développé. Au centre, on trouve une plaque circulaire qui représente la nervure médiane. A droite et à gauche de cette plaque partent deux cornes, recourbées en dehors à leur extrémité : c'est le commencement du limbe.

Dans la plaque neurale, nous voyons d'abord à la périphérie un épiderme qui supporte de nombreuses glandes et des poils sétacés en voie de formation. Cet épiderme, encore peu recloisonné, est constitué par des cellules assez grandes. A l'intérieur se trouve une masse homogène de parenchyme cortical plus ou moins chlorophyllien, à gros éléments polyédriques. Entre le centre de la figure et le point d'insertion du limbe, on voit, à droite et à gauche, deux faisceaux procambiaux. On ne les distingue que par la petite taille et les recloisonnements successifs de leurs éléments; il n'y a pas d'assise amylifère, on ne peut guère distinguer l'assise péricyclique du liber.

L'épiderme du limbe porte des glandes et des poils en voie de formation. Il n'y a pas encore de stomates entièrement organisés. Le mésophylle se compose d'environ cinq rangées de cellules quadratiques légèrement chlorophylliennes, serrées, sans méats intercellulaires, et dans lesquelles toute distinction de palissades, de tissu spongieux, etc., est impossible.

Si nous prenons une feuille à un stade plus avancé, nous retrouvons la même forme générale dans la section, mais les cornes se sont très allongées : elles correspondent maintenant à une vraie section de limbe dans laquelle on distingue plusieurs nervures secondaires.

Dans la plaque neurale, nous avons d'abord un épiderme portant des poils et des glandes. Les cellules de cet épiderme ont subi des recloisonnements radiaux répétés, l'assise corticale hypodermique aussi, et toutes les deux sont devenues collenchymateuses sur leurs surfaces de contact contenant un peu de chlorophylle. L'écorce se compose, dans le coussinet parenchymateux inférieur de la plaque, d'environ sept assises de gros éléments, dont les files radiales sont très reconnaissables vers le centre. On ne peut distinguer l'assise-limite que par sa teneur en amidon et en chloroleucites. Le liber est séparé de l'écorce par une zone péricyclique à éléments assez considérables (fig. 23), sauf quelques-uns qui sont très fractionnés. On ne

Digitized by Google

peut indiquer de limites précises entre la zone péricyclique et la zone libérienne; la première diffère cependant de la seconde par l'absence de tubes criblés et de cellules compagnes. Les faisceaux ligneux se composent de plusieurs séries radiales de rayons vasculaires, formés par des trachées, entourés à leur partie interne par un parenchyme ligneux cellulosique; le libriforme a encore des parois très tendres. Les rayons médullaires et le parenchyme ligneux qui limite supérieurement la face du faisceau sont bourrés de chloroleucites amylogènes. Les deux faisceaux sont séparés dans toute la partie inférieure de la feuille par deux ou trois assises de tissu conjonctif (ce qui n'a lieu qu'à un très faible degré dans le sous-genre *Ladanum*). A la partie supérieure, l'épiderme et l'assise corticale hypodermique ont subi les mêmes cloisonnements qu'à la partie inférieure; ils sont aussi un peu collenchymateux et séparés des faisceaux par des séries radiales de parenchyme un peu chlorophyllien.

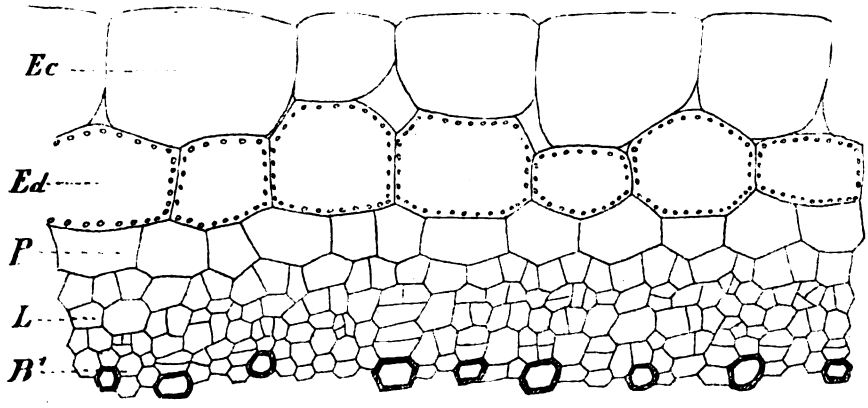


FIG. 23.

Section transversale des régions situées entre l'écorce inférieure et le bois, dans une feuille du *G. Tetrahit*, avant le fractionnement de l'assise péricyclique. — Ec, parenchyme cortical; E*d*, gaine amylogène; P, assise péricyclique; L, liber; B', bois primaire.

Le mésophylle est à peine plus différencié qu'au stade précédent, sauf la présence de chlorophylle plus abondante, et la formation de nombreux stomates aux dépens de l'épiderme.

A l'état adulte, nous trouvons encore un certain nombre de modifications (fig. 24).

Digitized by Google

Dans la plaque neurale le libriforme s'est sclérifié, et il s'est formé des vaisseaux ponctués secondaires; la zone péricyclique est devenue plus ou moins collenchymateuse et contient quelques stéréides; le tissu cortical forme deux coussinets parenchymateux, l'un inférieur, gros, l'autre supérieur, plus mince, qui renferme les faisceaux libéro-ligneux; ce tissu cortical ne renferme pas ou très peu de chlorophylle, il est collenchymateux à la périphérie.

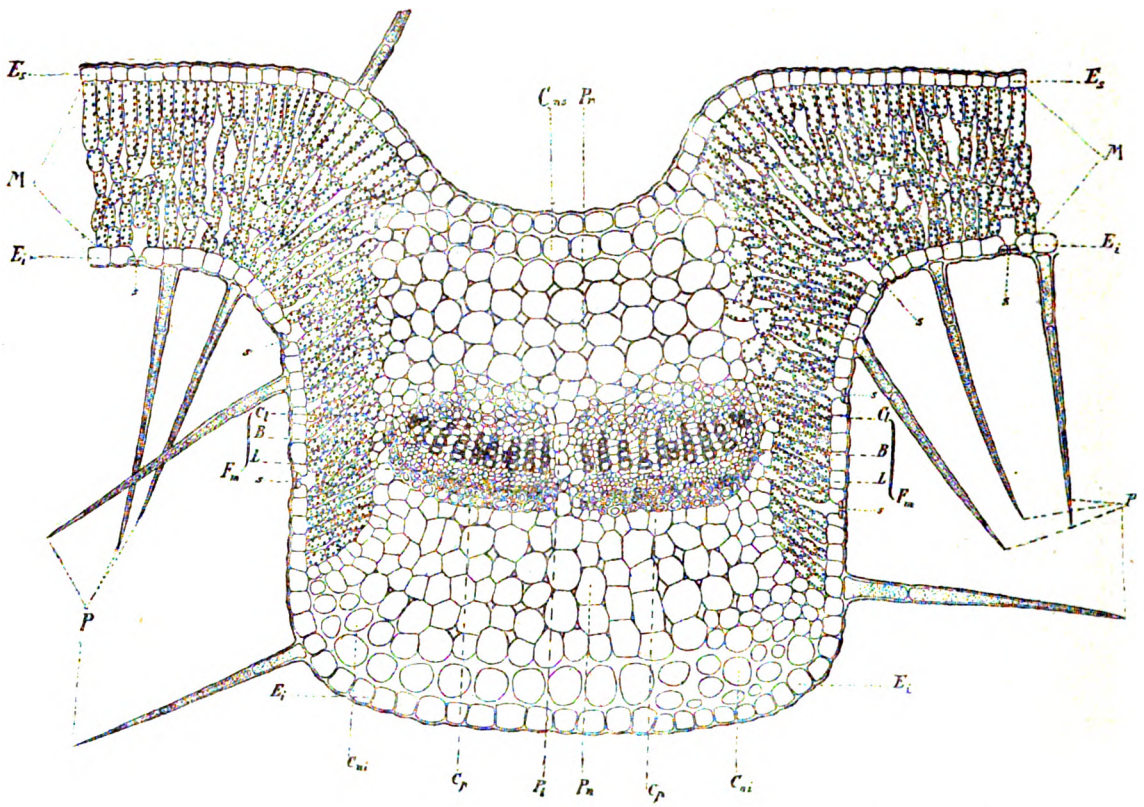


FIG. 24.

Section transversale de la nervure médiane, opérée dans la partie basilaire de la feuille chez le *G. Ladanum*. — Es, épiderme supérieur; M, mésophylle; Ei, épiderme inférieur; *s*, stomates; *p*, poils; Cns, collenchyme neural hypodermique supérieur; Cni, collenchyme neural hypodermique inférieur; Pn, parenchyme neural à nombreux méats aérifères; Fm, faisceaux de la nervure médiane, comprenant un îlot de collenchyme intraxylaire Cl, une zone ligneuse B, et une zone libérienne L; Cp, revêtement de collenchyme péricyclique.

Dans le limbe on distingue deux zones superposées. La zone supérieure palissadique se compose de deux, trois ou quatre assises de palissades courtes, en forme de barillet, n'alternant pas les unes les autres, mais accolées

Digitized by Google

bout à bout; elle sont très chlorophylliennes. La zone inférieure, spongieuse, de même épaisseur que la précédente, se compose d'éléments sphériques ou un peu ramifiés, lâches, interrompus par de nombreux méats intercellulaires.

Cette structure est beaucoup moins nette chez les individus qui ont crû à l'ombre, mais surtout chez les formes scotophiles du *G. pubescens*, où le mésophylle peut se réduire à trois assises de cellules, ainsi que l'a déjà indiqué M. Vesque [1], et où alors la distinction d'une zone spécialement assimilatrice (palissadique) et spécialement adaptée à la circulation de l'air (spongieuse) n'est plus possible.

Avant de passer à l'étude de l'épiderme et des stomates, mentionnons que les poils des *Galeopsis* sont des poils simples, dépourvus de coussinets en entonnoir, sauf dans le sous-genre *Tetrahit*, où ce genre de trichome est en général plutôt localisé sur les nervures. Les poils simples sont ordinairement pluricellullaires sur les nervures de la face inférieure et sur le limbe de la face supérieure; à la face inférieure, le limbe porte souvent des poils réduits à une courte cellule basilaire portant une longue cellule terminale.

L'épiderme se compose, sur les nervures, de cellules tabulaires formant des rectangles ou des hexagones très allongés; sur le limbe, au contraire, il est formé par des éléments à parois séparatrices ondulées. Les deux faces se comportent différemment sous le rapport de l'intensité de l'ondulation. La face supérieure n'a que des ondulations médiocrement accentuées, tandis que, sur la face inférieure, les ondulations prennent un développement suffisant pour donner, dans beaucoup de cas, une forme irrégulièrement étoilée aux éléments, chaque cellule étant ramifiée en cinq à sept bras.

On sait que M. Vesque a admis que les Labiées se caractérisaient par des stomates appartenant au type *caryophyllé*, à la seule exception des Ajugées qui se rapprochent par là des Verbénacées. Pour ce qui est du genre *Galeopsis*, il n'est point soumis à cette loi. Ses stomates, à ostioles orientés dans toutes les directions, sont entourés de trois jusqu'à cinq cellules disposées d'une façon tout à fait irrégulière, dont les parois prolongées vien-

[1] Vesque, *Caractères des principales familles gamopétales tirés de l'anatomie comparée de la feuille.* (Ann. sc. nat., sér. 7, t. I, 1885, p. 348.)

Digitized by Google

draient couper l'ostiole sous des angles très variés (fig 25). Les stomates suspendus sont sans doute excessivement rares; nous ne nous souvenons pas d'en avoir vu sur des feuilles de *Galeopsis* [1]. C'est là une exception qui, si elle n'infirme pas la valeur systématique élevée que l'on a donnée aux caractères tirés de la genèse des stomates chez les Labiées, nous obligera tout au moins à reprendre en détail l'étude générique et spécifique de l'appareil stomatique dans la famille qui nous occupe.

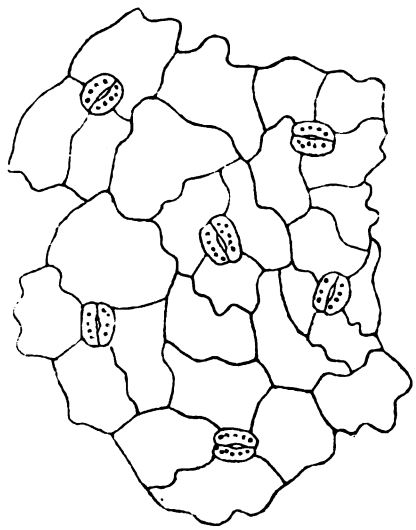


FIG. 25.
Section tangentielle de l'épiderme inférieur d'une feuille adulte du *G. Tetrahit*.

Les stomates sont, chez les *Galeopsis*, localisés sur la partie inférieure de la feuille.

Examinons maintenant la structure interne des stomates (fig 26).

Les cellules de bordure sont soustendues par les cellules annexes. Leur paroi dorsale est extrêmement mince; leur paroi supérieure est épaissie; leur paroi inférieure l'est deux fois plus. Le lumen des cellules de bordure a la forme d'un triangle sur une coupe transversale; la base de ce triangle est formée par

[1] VESQUE, *l. c.*, p. 346. — Il est curieux que M. Vesque, qui a examiné des feuilles de *Galeopsis*, n'ait pas vérifié sur ces dernières son caractère de stomates suspendus. Cela nous aurait sans doute valu de sa part d'autres détails plus circonstanciés et fort intéressants sur la dispersion des types stomatiques dans la famille.

Digitized by Google

la paroi dorsale, le sommet en touche la lamelle qui forme la paroi ventrale de la cellule de bordure; la paroi externe est donc en ce point excessivement mince, ce qui est le cas normal chez les Dicotylées [1]. Dans le lumen, on trouve un noyau et une couche protoplasmique pariétale englobant de nombreux chloroleucites. Les cellules annexes contiennent un noyau, un plasma pariétal et du suc cellulaire, mais pas de chlorophylle.

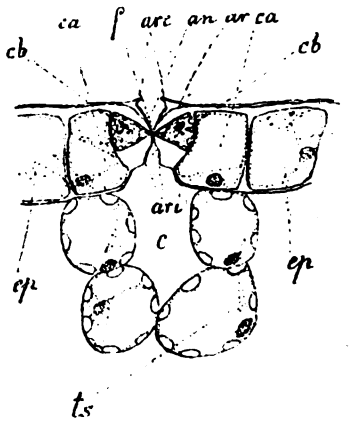


FIG. 26

Section transversale médiane d'un stomate foliaire chez le *G. Tetrahit*. — *ep*, cellules épidermiques; *ca*, cellules annexes; *cb*, cellules de bordure; *arc*, arêtes extérieures; *an*, antichambre; *f*, lèvres du stomate; *ar*, arrière-chambre; *ari*, arêtes intérieures; *c*, chambre sous-stomatique; *ts*, tissu assimilateur.

En pénétrant du dehors dans l'ostiole, on lui trouvera les particularités suivantes : ce sont d'abord les arêtes externes qui sont très aiguës; elles sont entièrement formées par la cuticule qui descend dans l'ostiole et vient mourir sur ses lèvres, ce qui peut facilement être mis en évidence par le chloro-iodure de zinc ou le réactif genevois. Des arêtes externes on passe dans une antichambre dont la coupe transversale est celle d'un entonnoir à bords recourbés en dedans. Puis vient la fente de l'ostiole, comprise entre les deux lèvres qui sont longuement arrondies. L'arrière-chambre a la section d'un entonnoir à bords non recourbés en dedans. Cette différence d'avec l'antichambre provient de ce que les arêtes internes des cellules de bordure sont

[1] SCHWENDENER, *Ueber Bau und Mechanik der Spaltöffnungen*. (MONATSBERICHTE DER K. AKAD. DER WISSENSCH. ZU BERLIN, Juli 1881.)

Digitized by Google

droites et presque obtuses. La chambre sous-stomatique n'est en général pas très développée. Les stomates sont toujours plus petits que les cellules annexes, mais placés sensiblement sur le même niveau qu'elles.

Terminons l'étude de la feuille en disant que, au sommet des dents, on trouve ordinairement un ou plusieurs stomates aquifères par l'intermédiaire desquels s'opère souvent une excrétion d'eau liquide dans les heures matinales du commencement de l'été. Ces stomates aquifères sont de forme circulaire et non elliptique (vus de face); leurs cellules de bordure sont immobiles; ils sont entourés de parenchyme à petits éléments différenciés en épithème, c'est-à-dire riches en eau, tendres, et non ou très faiblement chrorophylliens.

CHAPITRE XVIII.

TÉRATOLOGIE DE LA FEUILLE.

Les seules observations que nous ayons eu l'occasion de faire sur la tératologie de l'appareil végétatif, concernent trois feuilles appartenant au *G. dubia* var. *dubia*, cultivé au Jardin botanique de Genève. Ces trois feuilles avaient identiquement la même structure. La partie inférieure du limbe était beaucoup plus large qu'à l'ordinaire et avait pris une forme ovée; la disposition des marges était parfaitement normale jusqu'au quart supérieur de la feuille; là le limbe se bifurquait pour donner deux sommets aigus ou acuminés, divergents à 60° l'un de l'autre et portant chacun sur leur côté interne une dent assez volumineuse. La nervation de ces feuilles était la suivante. Le pétiole était normalement constitué; deux petits faisceaux dans chaque corne, deux gros faisceaux médians. Ces derniers étaient plus gros que d'ordinaire, et séparés par un espace assez considérable, occupé par le parenchyme fondamental incolore. Au lieu de se réunir, les deux faisceaux médians restent distincts sur tout le parcours du pétiole et entrent séparés dans le limbe. Dès leur entrée dans celui-ci, ils commencent à diverger : celui de gauche se rend au sommet de gauche de la feuille et celui de droite au sommet de droite. Ces deux faisceaux médians envoient sur les bords externes une nervation absolument normale; par contre, l'espace limbaire qui les

Digitized by Google

sépare est très peu innervié : ou bien les nervures manquent ou elles sont courtes; les anastomoses transversales entre les deux systèmes sont très fines. Dans un des cas, une grosse nervure se détachait du faisceau principal de droite et venait aboutir au fond du sinus séparateur des deux sommets.

Quelle est la valeur morphologique de cette singulière formation? Au premier abord, on serait tenté d'y voir la concrescence de deux feuilles réunies jusqu'au-dessous du sommet, mais à systèmes libéro-ligneux entièrement distincts, ce qui rendrait le verticille foliaire fort de trois pièces. Un examen plus approfondi ne pourra cependant pas laisser subsister cette manière de voir. Si, en effet, nous avions affaire à deux feuilles concrescentes et à systèmes libéro-ligneux distincts, on devrait trouver dans le pétiole non deux faisceaux médians, mais quatre rapprochés deux par deux, ce qui n'est pas le cas. De plus, une verticille de trois feuilles entrainerait une course très différente des faisceaux libéro-ligneux dans le segment caulinaire dont fait partie le verticille : or, cette course est parfaitement normale.

Nous résumerons donc notre interprétation de cette monstruosité de la façon suivante : *Chorise du limbe dans son quart supérieur ; sommets divergents à 60° ; faisceaux médians du pétiole ne se réunissant pas, mais divergeant rapidement dès leur entrée dans le limbe, se rendant chacun à un des sommets de la feuille ; champs latéraux du limbe à nervation normale, champ limbaire situé entre les deux faisceaux longitudinaux à nervation réduite.*

Étude de l'appareil floral.

CHAPITRE XIX.

TECTONIQUE DE L'APPAREIL FLORAL.

Comme dans toutes les Labiées, les fleurs des *Galeopsis* ne sont jamais placées sur l'axe primaire (sauf dans des cas tératologiques), mais elles terminent des axes secondaires. Elles sont agglomérées en verticillastres qui forment des sortes de capitules terminaux. Les feuilles placées à l'aisselle des verticillastres ne sont point différenciées en bractées.

Digitized by Google

A l'intérieur d'un même verticillastre, les fleurs apparaissent dans l'ordre suivant. D'abord une fleur centrale, bientôt flanquée, à droite et à gauche, de deux fleurs secondaires; cette disposition est celle de la cime bipare ou dichasium. Puis, subitement, chaque axe latéral du dichasium donne naissance à une fleur placée au-dessous, et entre lui-même et l'axe principal. C'est le début de la formation d'une cime unipare héliçoïde, qui se continue de façon à comporter, suivant les cas, trois, quatre ou cinq fleurs. Les époques de floraison et de fructification marchent de pair avec l'ordre de formation des mamelons floraux de divers degrés. Les sympodes, dans chaque verticillastre, sont tellement courts que les fleurs paraissent être sessiles et naître sur un même plateau.

Chaque fleur possède deux bractéoles; outre celles-ci, on trouve toujours à la base du verticillastre des bractéoles stériles. Les bractéoles offrent presque toujours la structure générale du calice, c'est-à-dire que leur sommet se termine par une arête, comme celle que nous étudierons dans les dents calicinales. Biologiquement, la valeur des dents calicinales et des bractéoles est à peu près la même : chez toutes les deux, l'arête constitue pour la fleur et le fruit un appareil de défense contre les hôtes nuisibles. Ainsi que M. Schumann [1] l'a indiqué récemment pour le genre *Salvia*, les deux bractéoles ne sont *pas transversales*, mais bien *phylloscopes*. Cette disposition, qui est primitive, n'influe pas sur le développement de la fleur, car il n'y a pas de contact direct entre les bractéoles et le premier mamelon calicinal.

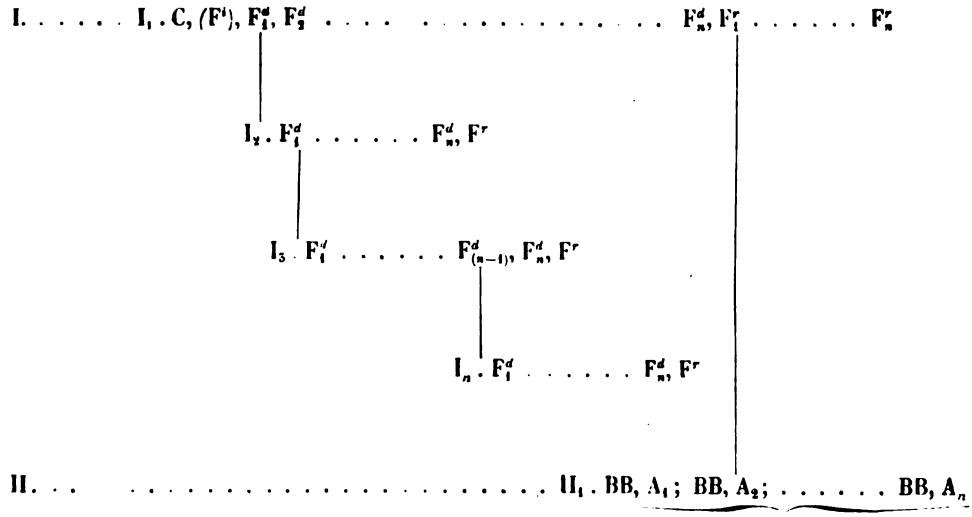
Si nous passons en revue la disposition générale des membres sur les axes, telle que nous l'avons établie, nous aurons une loi générale et simple pour la succession des diverses formes de feuilles. Nous obtenons, en effet, sur les axes primaires (I) des cotylédons (C), des feuilles aériennes initiales (F^i) qui peuvent manquer, des feuilles aériennes développées (F^d), enfin des feuilles aériennes réduites ou bractées (F^r). C'est à l'aisselle de ces dernières feuilles que naissent les verticillastres constitués par les axes secondaires (II) qui portent des bractéoles (B) et des fleurs (A). Chacune des feuilles aériennes, jusqu'à la $(n - 1)^e$, peut produire à son aisselle un axe

[1] Karl Schumann, *Neue Untersuchungen über den Blüthenanschluss*, pp. 427-432. Leipzig, 1890.

Digitized by Google

primaire; ces axes primaires sont alors de 2e, 3e ... n^e ordre et traversent les mêmes phases que l'axe principal.

Nous pouvons donc schématiser cette évolution dans la formule végétative suivante :



La première pièce qui fait son apparition entre les bractéoles et l'axe mère, c'est le sépale impair postérieur, sous la forme ordinaire d'un mamelon. Viennent ensuite les deux sépales latéraux, suivis en dernier lieu des deux inférieurs. Puis, tandis que les mamelons se creusent en écailles, très rapidement destinées à se transformer en dents, il s'établit au-dessous de ces dernières une zone de croissance continue qui les soulève et développe une muraille qui deviendra le tube calicinal. Le développement du calice est donc basipétal; les lignes passant par le sommet des dents limitent un plan incliné dont la partie élevée regarde l'axe; sa forme est elliptique et non circulaire, comme le représentent les diagrammes.

La corolle subit exactement la même évolution, mais en sens inverse, c'est-à-dire que le lobe moyen inférieur apparaît d'abord, puis les deux latéraux, enfin les deux supérieurs. Ces derniers sont représentés par deux mamelons peu distincts l'un de l'autre presque dès le début.

Le développement de l'androcée est intimement lié à celui de la corolle, puisque les deux verticilles sont connés dans leur partie inférieure. L'ordre de naissance y est donc aussi acropétal; les deux étamines inférieures appa-

Digitized by Google

raissent d'abord, les deux supérieures ensuite. On ne voit jamais de traces d'une cinquième étamine, comme elle figure sur le diagramme théorique des Labiées et comme prétend l'avoir vue Payer [1].

Le gynécée apparaît en dernier lieu; les deux carpelles sont simultanés, ils subissent rapidement un cloisonnement transversal qui n'offre rien de spécial.

Nous n'avons rien de nouveau à dire sur ces premiers états floraux, et renvoyons pour cela le lecteur à la description très exacte du premier développement de la fleur chez le *Salvia glutinosa* qui a été donnée tout récemment par M. Karl Schumann [2]. Quant au développement ultérieur de la corolle, de l'androcée et du gynécée, nous y reviendrons à propos de l'étude spéciale de ces verticilles, et formulons dès maintenant le diagramme floral des *Galeopsis* (fig. 27).

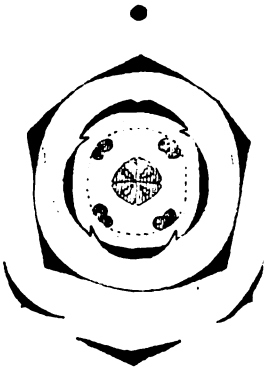


FIG. 27.
Diagramme de la fleur dans le genre *Galeopsis*.

Calice pentamère, gamosépale, régulier, à préfloraison ouverte, à évolution basipétale.

Corolle pentamère, gamopétale, zygomorphe, à préfloraison quinconciale, à évolution acropétale, à pièces alternant avec celles du calice.

Androcée tétramère, didyname (les étamines antérieures plus longues), à évolution acropétale, à étamines alternant avec les trois pièces inférieures de la corolle et connées avec cette dernière.

1 PAYER, *Traité d'organogénie comparée de la fleur*, pp. 553 et seq.

2 KARL SCHUMANN, *Neue Untersuchungen über den Blüthenanschluss*, pp. 427-432. Leipzig, 1890.

Digitized by Google

Gynécée dimère, orienté transversalement, à carpelles biovulés, naissant simultanément et se divisant ensuite par une cloison transversale, à style gynobasique dont les branches sont dirigées en arrière et en avant.

CHAPITRE XX.

STRUCTURE DU CALICE.

Le calice des *Galeopsis* est tubuleux ou légèrement campanulé-tubuleux. Il est accrescent pendant l'anthèse. Il porte cinq dents lancéolées, de longueur variable et se terminant le plus souvent par une arête blanchâtre qui peut, dans certaines formes (*G. Tetrahit* var. *Reichenbachii*, *G. Ladanum* var. *spinosa*), atteindre des dimensions considérables.

Le calice est parcouru par des nervures à système squelettaire très développé, qui lui donnent une solidité remarquable. En voici la disposition générale.

D'abord cinq *cordons primaires* qui parcourent le tube dans toute sa longueur jusqu'à l'extrémité des dents. Ces cordons sont plutôt faibles à la base du calice, augmentent de taille en se rapprochant des dents, et atteignent leur calibre maximum un peu au-dessus ou à la hauteur de leur point d'intersection avec le cordon de ceinture.

Le *cordon de ceinture* est un anneau puissant qui relie solidement entre eux les cordons primaires, jouant ainsi dans le squelette du calice le même rôle qu'un cercle de tonneau; il passe immédiatement au-dessous des sinus séparateurs des dents. Outre ce système primaire, il aboutit au-dessous de chaque sinus séparateur un *cordon secondaire*, encore assez robuste dans certaines formes (*G. Tetrahit*, *G. speciosa*, *G. pyrenaïca*, *G. Ladanum* var. *carpetana*, *intermedia* et *calcarea*, par exemple), et qui, dans d'autres, prend un faible développement. La formation de cordons tertiaires situés entre les précédents est exceptionnelle et très irrégulière. Tous ces cordons s'anastomosent plus ou moins ensemble au-dessous du cordon de ceinture.

Dans les dents nous avons, outre le cordon central, deux cordons marginaux faibles qui partent de l'anneau de ceinture au fond des sinus séparateurs, suivent le bord de la dent et viennent rejoindre le cordon central au

Digitized by Google

pied de l'arête de la dent, suivant la longueur de cette arête, à la moitié, au tiers, au quart, etc., de la hauteur totale de la dent. Ces deux cordons marginaux sont anastomosés transversalement et obliquement avec le cordon central.

Étudions maintenant le calice de plus près sur un échantillon de *G. Tetrahit* bien développé.

Sur la face interne du calice, l'épiderme se compose d'éléments tabulaires ayant en section transversale une forme rectangulaire, en section tangentielle une forme plus irrégulière : losangique, rectangulaire, arrondie, etc. Les parois radiales sont ondulées, système qui, comme on sait, augmente la solidité de la membrane. A la base du calice, tous les éléments de l'épiderme portent des ponctuations dans les parois externes, ponctuations qui paraissent roses, tandis que le reste de la paroi est blanc, grâce à une différence de réfrangibilité due à la diminution d'épaisseur dans la membrane. Ces ponctuations ont une forme circulaire ou ellipsoïde, parfois elles s'allongent en forme de bâtonnets droits ou courbés. A mesure que l'on remonte vers les dents du calice, le nombre des cellules épidermiques portant des ponctuations diminue et, finalement, on les trouve localisées sur les cellules basilaires des poils. Autour du cordon de ceinture, on n'en trouve plus du tout. Les poils que porte cet épiderme sont coniques, extrêmement acérés et fortement sclérifiés; ils sont renflés à la base et semblent plonger au milieu d'une cellule qui n'est autre que leur article basilaire. Ils sont à peu près dépourvus de perles cuticulaires.

L'épiderme externe ne porte aucune espèce de ponctuation. A la base, ses éléments sont tabulaires. Ils ont une forme rectangulaire en coupe transversale, et la forme d'un rectangle très allongé suivant l'axe du calice sur une coupe longitudinale; leurs parois sont rectilignes et non ondulées. Ce n'est qu'au-dessus et immédiatement au-dessous du cordon de ceinture que les parois des éléments épidermiques sont engrenées les unes dans les autres par des ondulations. Les poils que porte cet épiderme sont en général des poils sétacés à coussinet basilaire (ce qui n'a naturellement jamais lieu dans le sous-genre *Ladanum*); les perles cuticulaires en sont peu visibles. Les stomates sont à peu près complètement localisés sur l'épiderme externe, avec les glandes stipitées, tandis que l'épiderme interne n'en porte pas.

Digitized by Google

Les cordons primaires (fig. 28) contiennent un petit ilot libérien dans lequel, sur des coupes favorables, on reconnaît quatre ou cinq plages grillagées entourées de cellules-compagnes, de parenchyme et de prosenchyme. Plus à l'intérieur, on trouve un volumineux faisceau libéro-ligneux. Ce faisceau est presque entièrement formé par du tissu mécanique. Ce n'est que vers le bord, du côté libérien, que l'on voit quelques trachées; les vaisseaux ponctués sont rares. Les spirales des trachées ont des tours de spire constamment très serrés. Quant aux stéréides, elles sont courtes, avec les ponctuations typiques, et solidement tressées les unes dans les autres.

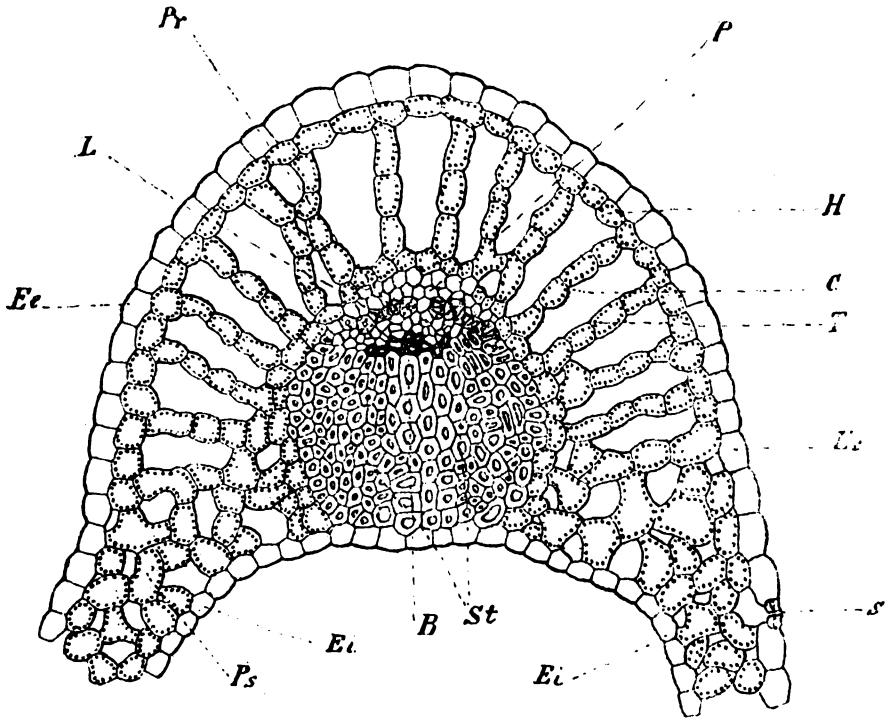


FIG. 28.

Section transversale d'un des cinq cordons calicinaux primaires chez le *G. Tetrahit*. — Ee, épiderme externe; H, assise assimilatrice hypodermique; C, canaux aérifères; T, trabécules assimilateurs; P, parenchyme cortical incolore; P, stéréides péricycliques; L, liber; B, bois; St, stéréome ligneux; Ei, épiderme interne; Ps, parenchyme assimilateur du limbe; S, stomate.

Le liber est séparé de l'écorce par un stéréome péricyclique qui n'est pas toujours complet et laisse çà et là un élément non sclérifié. Souvent aussi ce stéréome s'unit à droite et à gauche avec le stéréome ligneux, de telle sorte que le liber est complètement emprisonné.

Digitized by Google

Au delà du stéréome péricyclique se trouve un coussinet de parenchyme à parois minces, peu chlorophyllien, qui, au lieu de s'étendre jusqu'à l'épiderme comme dans les nervures foliaires, n'est épais que de quelques assises de cellules, dont les dernières deviennent plus chlorophyllifères. Entre cette dernière assise et l'assise chlorophyllienne hypodermique se trouvent de grands canaux aérifères, séparés les uns des autres par des trabécules unisériés. Ces trabécules n'ont pas une structure absolument régulière; en général cependant, ils se composent de trois ou quatre cellules chlorophylliennes, accolées bout à bout, parenchymateuses et allongées dans le sens du rayon. L'épiderme extérieur se compose de gros éléments, à section transversale irrégulièrement polygonale, qui ne communiquent pas directement avec les canaux aérifères, mais en sont séparés par l'assise chlorophyllienne hypodermique.

L'épiderme inférieur est formé par des éléments plus petits; il touche directement au stéréome ligneux dans beaucoup de cas.

Cette structure est en général typique chez les grands *Galeopsis* (*G. Tetrahit, speciosa,* etc.), pour les nervures primaires. Quant aux cordons secondaires, la disposition des trabécules s'obscurcit chez eux; ils se rapprochent pour former un tissu spongieux, lâche. Ce cas devient normal pour les nervures primaires dans une série de formes où les cordons sont peu développés (par exemple : *G. Ladanum* var. *orophila, Kerneri, Berteti, glabra,* etc.).

Dans le limbe, on trouve un tissu spongieux fort de 3-5 assises, composé d'éléments globuleux ou un peu ramifiés.

Le réactif genevois colore tout le stéréome, aussi bien le pérécyclique que le ligneux, en jaune-orange, tous les autres tissus en rose, les poils (à cause de leur forte cuticule) et la cuticule de l'épiderme en jaune-paille.

Le chloroiodure de calcium iodé colore en vert bleuâtre les tissus cellulosiques; en jaune, puis très rapidemment en rouge-brun foncé le stéréome (péricyclique et ligneux). Il y a donc identité parfaite, au point de vue de la structure et de la composition chimique, entre les diverses parties du squelette.

Si l'on sectionne transversalement une dent au-dessus du niveau des sinus

Digitized by Google

séparateurs, on obtient une image dont les contours rappellent ceux d'une coupe de pétiole : c'est une figure réniforme, dont la gouttière est tournée vers l'intérieur. Le corps de la dent est limité de toutes parts par un épiderme à petits éléments sensiblement égaux sur toutes les faces. L'intérieur est occupé par un tissu spongieux extrêmement riche en méats aérifères dont les éléments ont des bras ordinairement beaucoup plus allongés que dans le tissu spongieux du tube calicinal. Au centre de la figure se trouve un gros îlot de stéréome, qui touche à l'épiderme interne d'un côté, et est séparé de l'épiderme externe par du tissu spongieux. Les éléments de ce stéréome offrent un calibre sensiblement égal. On voit encore, entre le tissu spongieux et le stéréome, les divers éléments libéro-ligneux que nous avons signalés dans le tube calicinal, mais bien réduits. Enfin, outre les anastomoses, qui ont en petit la même structure que le faisceau marginal, on trouve à gauche et à droite du faisceau médian les cordons marginaux composés de tissu mécanique, un ou deux vaisseaux, avec quelques éléments libériens.

En remontant le long de la dent, on voit peu à peu la masse spongieuse diminuer; elle ne forme bientôt plus qu'une mince couche autour de l'îlot de stéréome. Les cordons marginaux rejoignent le cordon central. Les éléments vasculaires et libériens disparaissent; et, peu après la disparition de l'épiderme, nous ne trouvons plus qu'une arête de stéréides unies et compactes, qui forme précisément l'arête de la dent. Au-dessus du cordon de ceinture, l'épiderme porte des poils, des glandes et de rares stomates.

CHAPITRE XXI.

STRUCTURE DE LA COROLLE.

La corolle des *Galeopsis* offre, comme dans tant d'autres Labiées, une structure fort complexe. On peut y distinguer quatre parties principales : le tube, la gorge, le labre et le labiole (fig. 29) [1].

Le *tube* est cylindrique, à section un peu elliptique, ordinairement très

[1] Voy. Briquet, *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 13.

Digitized by Google

long par rapport aux autres parties, atteignant dans les grandes fleurs jusqu'à 2 centimètres et dépassant parfois cette longueur. Tout à fait à sa base, il est un peu élargi, de façon à entourer étroitement le prolongement du torus sur lequel le gynécée repose. Il est lisse intérieurement, mais un peu plus haut on constate qu'il porte des poils ordinairement disposés d'une façon irrégulière; ces poils manquent quelquefois, de telle sorte que le nectarostège en anneau, que nous avons signalé nous-même au fond du tube des *Galeopsis* [1], n'existe pas en tant que formation définie. Le tube est parcouru par une série de cordons libéro-ligneux dont cinq de premier ordre appartiennent à la corolle et quatre aux étamines.

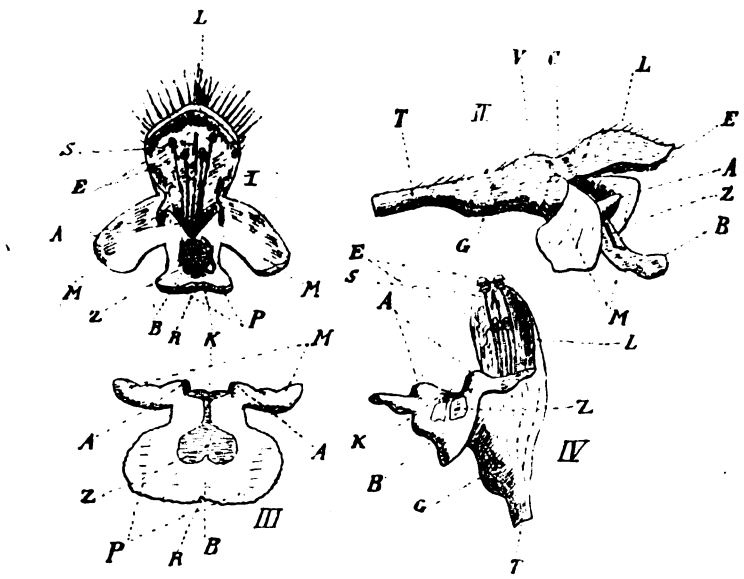


FIG. 29.

Morphologie de la corolle dans le genre *Galeopsis*, I et II chez le *G. Tetrahit*, III et IV chez le *G. Ladanum*. — L, labre; C, dépression séparant le labre de la voûte du tube; V, voûte du tube; G, gorge du tube; T, tube proprement dit; M, lobes latéraux du labiole; A, apophyses labiolaires; K, vallon interapophysal; B, lobe moyen du labiole; Z, tache labiolaire; P, pleuridies du lobe labiolaire moyen; R, émargination interpleuridiale; E, étamines; M, style.

La *gorge* est formée par un élargissement du tube, élargissement qui n'affecte que le plancher du tube, tandis que le plafond subit seulement une légère élévation en voûte. Une série de cordons libéro-ligneux descend symétriquement à gauche et à droite du plafond, dans le plancher de la gorge,

[1] *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 157.

Digitized by Google

et en forme l'appareil de soutien. Nous reviendrons en détail un peu plus loin sur la distribution des cordonnets libéro-ligneux, qui joue un rôle important pour la solidité de la corolle.

Le *labre* est séparé de la voûte supérieure de la gorge par une légère dépression transversale. Il a plus ou moins la forme d'un casque convexe, sous lequel se trouvent les étamines qu'il recouvre à la façon d'un toit. Le labre est parcouru par deux cordons libéro-ligneux principaux, anastomosés en réseau au sommet et dont les ramifications viennent mourir sur les bords du limbe, ou s'insérer dans les pleuridies [1] quand il y en a. La formation de petites pleuridies coniques est très fréquente; ce sont des expansions toujours ciliées. Souvent on distingue une émargination apicale, qui permet de reconnaître à gauche et à droite l'extrémité des lobes corollaires supérieurs. Le labre est presque toujours recouvert de nombreux poils pluricellulaires.

Le *labiole* comprend trois formations différentes : les lobes latéraux, le lobe moyen et les apophyses.

Les *lobes latéraux* ont en général une forme rectangulaire allongée; ils sont parcourus par trois nervures principales, une médiane et deux latérales; ils n'offrent généralement pas de pleuridies.

Le *lobe moyen* affecte, suivant les variétés et les individus, des formes assez différentes. Tantôt il est plus ou moins carré, avec une émargination médiane qui permet de distinguer à droite et à gauche deux grosses pleuridies; tantôt il est arrondi. Ailleurs, il est allongé, l'émargination est plus profonde et les bords sont enroulés en dessous (*G. Tetrahit* var. *bifida*). Certains individus présentent dans le lobe moyen une pleuridisation très avancée (*G. Ladanum* var. *carpetana, orophila, Kerneri, Berteti,* etc.), mais qui n'offre aucun caractère de constance. Le lobe moyen possède une nervure centrale qui suit sa ligne médiane et vient se diviser au-dessus du sinus séparateur des deux pleuridies (quand il y en a); il envoie à droite et à gauche de nombreuses ramifications. Outre ce cordon central, il existe deux cordons latéraux qui s'anastomosent fréquemment avec lui. Au-dessous des sinus séparateurs des lobes latéraux et du lobe moyen, les cordons latéraux sont réunis par des anastomoses transversales.

[1] *Les Labiées des Alpes maritimes,* p. 13.

Digitized by Google

A côté des nervures principales du labiole, il faut signaler, suivant la grandeur des fleurs et la nécessité qui en dérive, un développement facultatif et plus ou moins considérable de nervures secondaires détachées à différentes hauteurs des troncs principaux.

Les apophyses sont formées par une invagination conique du labre, invagination qui se répète symétriquement à droite et à gauche à l'entrée de la gorge. Le corps des apophyses est soutenu par des nervures délicates; elles sont creuses intérieurement. Leur forme est différente dans les *Tetrahit* et dans les *Ladanum*. Chez les premiers, elles affectent la forme d'éminences coniques penchées en avant, à parois raides un peu de tous les côtés, et séparées par une vallée; celle-ci est constituée par deux plans synclinaux se coupant sous un angle aigu ou plus ou moins droit. Chez les *Ladanum*, les apophyses rejoignent par une pente douce le tube de la corolle, et présentent des pentes abruptes seulement du côté extérieur; elles sont séparées par une large vallée à fond aplati et creusé d'une petite rigole.

En avant des apophyses, indiquant l'entrée de la vallée qui les sépare, on aperçoit la *tache labiolaire* ou *nectarosème* [1]. Ce nectarosème se compose chez les *Ladanum* de deux figures plus ou moins elliptiques, séparées ou confluentes, et colorées en jaune qui tranche vivement soit sur le jaune pâle (*G. dubia*), soit sur le rose vif (*G. Ladanum*, *G. Reuteri* et *G. pyrenaïca*) du reste du labiole. Chez les *Tetrahit*, la tache labiolaire prend la forme d'un réseau de lignes irrégulièrement croisées, jaunes dans les *G. pubescens* et *Tetrahit* à fleurs rouges, brunes dans les *G. Tetrahit* à fleurs blanches, jaunes et violettes dans le *G. speciosa*.

Un point délicat dans la structure de la corolle, c'est la course des faisceaux libéro-ligneux dans la partie supérieure dorsale du tube et la voûte de la gorge; en second lieu, le mode de ralliement des faisceaux qui descendent sur les flancs de la gorge avec ceux qui en sillonnent la partie dorsale.

Examinons le cas des *Ladanum* qui est le plus compliqué (fig. 30, I); nous en déduirons ensuite le cas des *Tetrahit* par réduction.

[1] Voy. Errera et Gevaert, *Sur la structure et les modes de fécondation des fleurs*, p. 72. (Bull. Soc. roy. bot. de Belgique, t. XVII, 1878.)

Digitized by Google

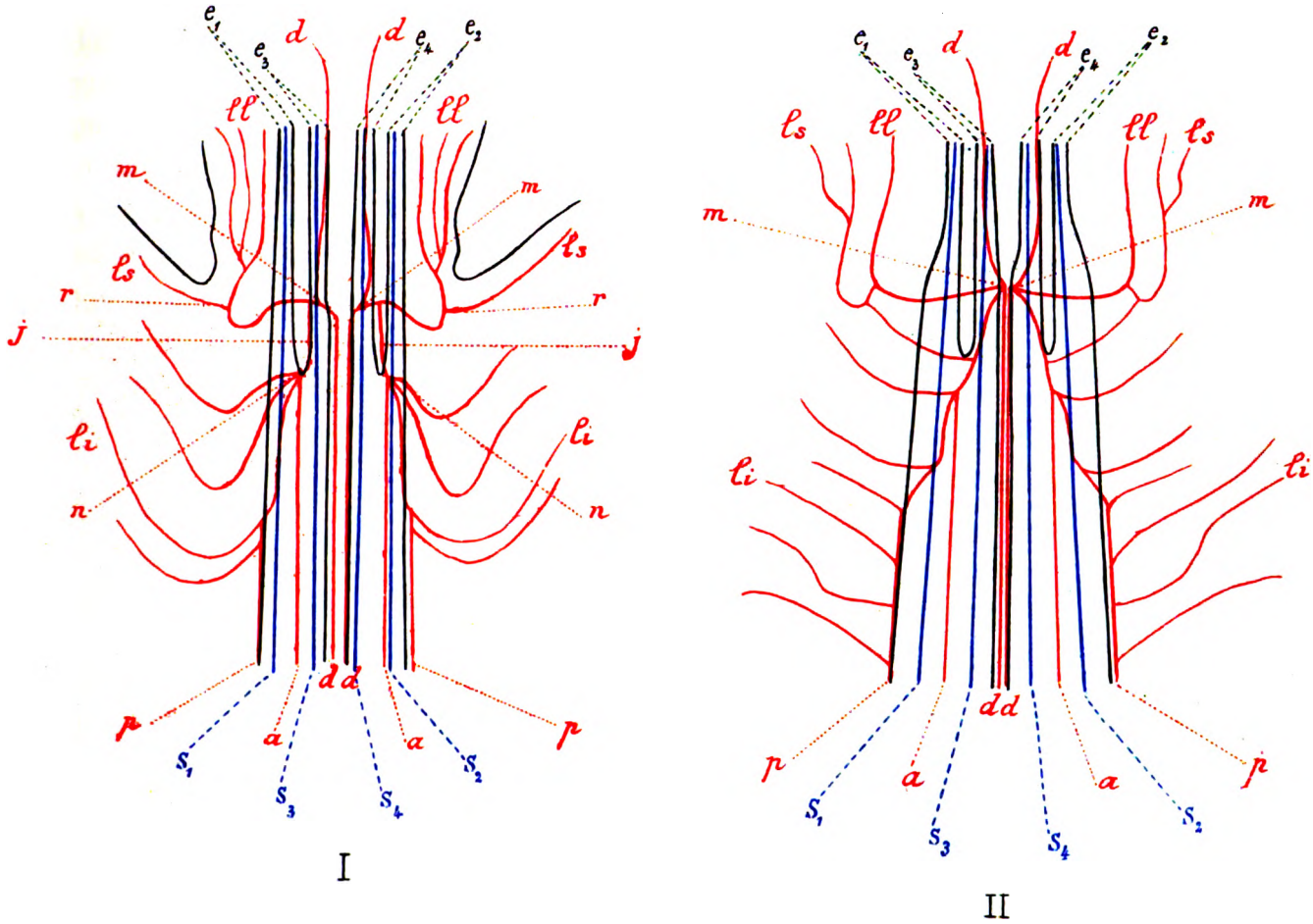


FIG. 30.
Course des cordons libéro-ligneux dans la voûte du tube corollaire chez les *Galeopsis Ladanum* (I) et *Tetrahit* (II).
Se reporter au texte pour les notations.

Digitized by Google

Digitized by Google

Constatons tout d'abord que les filets des quatre étamines placées sous le labre se réunissent deux par deux au-dessous des sinus séparateurs du labre et du labiole, pour former deux adelphies connées, presque immédiatement au-dessous de leur point de naissance, avec la voûte de la gorge. Comme il est facile de séparer dans chaque adelphie les deux filets constituants, on pourrait discuter sur la question de savoir s'il s'agit là d'une vraie concrescence ou d'une simple adhérence. La question est oiseuse à notre avis; la donnée empirique, c'est que les deux filets de chaque adelphie se sont développés simultanément côte à côte et que leurs tissus marginaux sont suffisamment unis pour former un seul corps; cette donnée nous suffit. Chaque filet possède un cordon libéro-ligneux : chaque adelphie en possède deux, par conséquent, qui courent parallèlement à l'axe de la voûte; ce sont les cordons *staminaux* (s_1, s_2, s_3, s_4).

Les cordons qui forment l'axe principal du système entier sont au nombre de deux, que nous nommerons les cordons *dorsaux essentiels* (d, d). Ils correspondent aux deux lobes corollaires primitifs dont la concrescence forme le labre. Ils suivent les marges intérieures des adelphies et s'incurvent directement dans le labre à la hauteur des sinus séparateurs du labre et du labiole.

Légèrement au-dessous de ces sinus (en m), chacun d'eux émet un cordon latéral qui se divise bientôt en deux branches; l'une se ramifie presque immédiatement et, remontant vers le haut, va innervier le labre : ce sont les cordons *latéraux du labre* (l, l); l'autre se dirige vers le flanc de la gorge dans lequel il commence à descendre : ces deux cordons sont les *côtiers supérieurs* (ls).

La ligne médiane des adelphies paraît être parcourue par un cordon (a) qui s'arrête un peu au-dessous du point où les filets deviennent libres. Une dissection soignée apprend que ces cordons n'appartiennent pas aux adelphies qui les recouvrent, mais bien à la voûte elle-même : ce sont les cordons *dorsaux auxiliaires.*

Il en est de même pour les cordons *dorsaux marginaux* (p) qui suivent la marge externe des adelphies sur un certain parcours, puis obliquent sous les bandes staminales, croisent les cordons staminaux extérieurs (s_1, s_2) et viennent rejoindre (en n) les dorsaux auxiliaires au-dessous du point de

Digitized by Google

dissolution des adelphies. Les cordons dorsaux marginaux envoient à gauche et à droite une quantité de cordons parallèles qui descendent dans les flancs de la gorge : ce sont les *côtiers inférieurs* (*li*).

Les auxiliaires et les marginaux sont rattachés aux dorsaux essentiels par deux *cordons de jonction* (*j*) qui relient solidement ensemble le système libéro-ligneux dorsal.

Dans le groupe *Tetrahit*, la course est plus simple (fig. 30, II). Au centre, nous retrouvons les deux cordons dorsaux essentiels à la même place. Mais les cordons de jonction ne forment plus avec les cordons marginaux qu'un seul et même cordon qui pénètre obliquement dans chaque adelphie en suivant une ligne sinueuse, et vient retrouver les dorsaux essentiels au point de séparation des cordons latéraux du labre. Quant aux dorsaux auxiliaires, ils suivent leur voie accoutumée et viennent s'accoler aux marginaux au-dessous des points de dissolution des adelphies.

Il nous reste à donner quelques détails sur l'histologie de la corolle. L'épiderme est tendre et a la même structure sur les deux faces, interne et externe. Il se compose d'éléments à section transversale plus ou moins polygonale, à section tangentielle rectangulaire allongée. Dans le voisinage des cordons, les parois de ces cellules sont droites; entre les nervures, au contraire, les parois sont ondulées. L'épiderme interne est plus ou moins dépourvu de poils (sauf dans le tube) et de stomates. Le mésophylle se compose de cellules irrégulièrement globuleuses, un peu chlorophylliennes, lâches, formant ordinairement une couche extrêmement mince. Les cordons sont en général constitués par 2-4 trachées et un ou deux éléments mécaniques (qui manquent parfois), accompagnés de quelques éléments libériens. Quelque débile que paraisse cette constitution, elle offre cependant une solidité assez considérable, ce dont on se convaincra facilement en entreprenant des dissections de corolle à l'aiguille montée; on verra alors que la résistance offerte à la traction par ces cordons exige souvent, pour être vaincue, des efforts relatifs auxquels on n'était guère en droit de s'attendre.

Les cellules des bords des lobes sont papilleuses; elles lancent au dehors des prolongements coniques dont les groupements rappellent comme facies l'image de certaines mâcles d'oxalate de calcium.

Digitized by Google

CHAPITRE XXII.

STRUCTURE DE L'ANDROCÉE.

Après la dissolution des adelphies, que nous avons examinées dans le chapitre précédent, les filets s'élèvent librement sous le labre. Ce sont des cylindres blancs et massifs, qui ont la structure suivante.

L'épiderme est lisse, dépourvu de poils et de stomates, formé par de grandes cellules à parois épaisses, ayant en coupe transversale une forme carrée ou polygonale, en coupe tangentielle la forme d'hexagones très allongés dans le sens de l'axe du filet. Le parenchyme intérieur a une disposition analogue; il est incolore et tous ses éléments sont serrés les uns contre les autres de façon à former une colonne solide. Au centre se trouve un faisceau libéro-ligneux composé d'un îlot libérien à tubes criblés de fort calibre, offrant la même structure que ceux de la tige, de trachées à spirales formant des tours de spire lâches, d'un ou deux vaisseaux ponctués et de quelques stéréides.

Les filets se terminent par un endroit rétréci où les tissus sont tordus, et dont nous parlerons.

Puis vient le connectif. Ce dernier est massif et couvre une bonne partie du dos des loges anthériennes. Il offre extérieurement une surface arrondie, qui porte çà et là de volumineuses glandes sessiles et blanchâtres que l'on retrouve aussi sur la partie du connectif située entre les deux loges anthériennes. Nous ne reviendrons pas ici sur ce que M. Correns et nous-même avons dit ailleurs des fonctions présumées de ces glandes [1].

Les loges, en position horizontale, sont adossées et offrent la structure suivante (fig. 31). A l'extérieur se trouve un sac, d'un brun foncé en dedans, violet en dehors, rempli d'un pollen jaune doré. Les marges de ce sac sont lisses. Le sac lui-même a une forme générale triangulaire et est peu profond :

[1] Correns, *Zur Biologie und Anatomie der Salvienblüthe* (Pringsheim's Jahrbücher, t. XXII, pp. 232-235, 1890), et *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 16.

Digitized by Google

c'est ce qu'on appelle l'*utricule* de la loge anthérienne. A l'intérieur, nous trouvons une membrane dont le blanc pur contraste vivement avec la coloration foncée de l'utricule. Cette membrane est à peu près plane; elle porte le nom d'*opercule*. Les opercules sont ciliés de poils, lesquels sont très longs au milieu des marges et beaucoup plus courts aux extrémités. Ces poils, dits poils *vecteurs*, sont unicellulaires, rarement bicellulaires; leur paroi est assez épaisse; ils portent une cuticule plissée dans le sens longitudinal et un peu perlée.

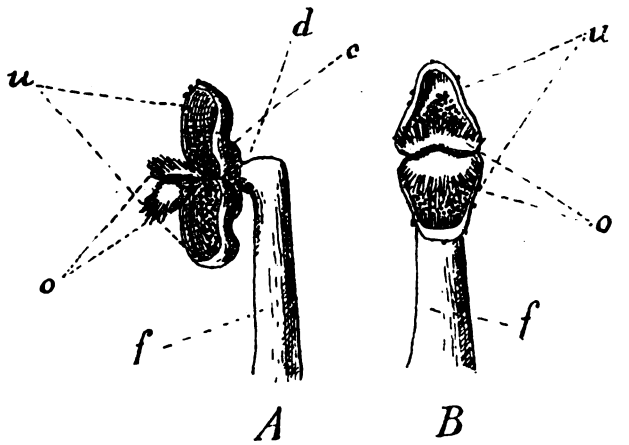


FIG. 31.
Morphologie des anthères dans le genre *Galeopsis*. — A, vues de côté; B, vues de front; *f*, filets; *c*, connectif; *d*, partie apicale différenciée du filet; *u*, utricules; *o*, opercules.

Les parois des loges consistent essentiellement, à ce stade de développement, en un épiderme et une zone à bandes spiralées.

Les grains de pollen sont ellipsoïdaux et pourvus de trois plis longitudinaux légèrement ondulés [1]. Dans l'eau, les grains deviennent ovoïdes et les plis disparaissent pour donner naissance à trois bandes un peu grisâtres. La partie extérieure de l'exine est suffisamment cuticularisée pour résister longtemps à l'action de l'acide sulfurique. A des grossissements ordinaires, elle semble être recouverte par un fin méandre d'ornements; à de forts grossisse-

[1] Et non pas *six* sillons, comme nous l'avons indiqué par erreur dans *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 158.

Digitized by Google

ments (1000 diamètres environ pour une image claire), ce méandre se résoud en une quantité de verrucosités de forme générale elliptique, carrée ou rectangulaire, mais à angles arrondis. Ces verrucosités sont disposées de façon à former des aréoles polygonales ou elliptiqes, en étant rapprochées par leurs extrémités et en ne laissant qu'un très petit espace entre elles. Telle est simplement la structure de l'exine; on ne distingue pas d'endroit particulier par lequel on puisse remarquer que le boyau pollinique opère de préférence sa sortie. Comme il est très facile de faire germer des grains frais dans une solution sucrée gélatinée, on verra, en effet, que le boyau perce la paroi en des endroits très différents suivant les grains.

Reprenons maintenant le développement de l'étamine au point où nous l'avions laissé en parlant de l'organogénie de la fleur.

Les mamelons staminaux se différencient en anthères immédiatement après leur apparition, alors que la corolle ne les recouvre pas encore (fig. 32). Souvent même le développement de l'androcée est si rapide qu'il devance celui de la corolle et qu'à un certain stade, la préfloraison du calice étant ouverte, on voit les étamines se développer librement sans être aucunement cachées par le périanthe.

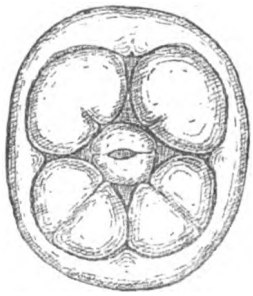


FIG. 32.
Vue de l'androcée des *Galeopsis* au moment de la différenciation des étamines.

Quand la différenciation des loges anthériennes est bien achevée, apparaît une fente de déhiscence qui est longitudinale, et les poils vecteurs se forment par prolifération des papilles épidermiques marginales sur la lèvre interne de la fente.

Digitized by Google

Ce n'est qu'à ce moment que, par accroissement intercalaire, les anthères sont soulevées et que le filet apparaît comme formation distincte. Tous les filets se courbent immédiatement de façon à présenter la convexité de la courbure en dehors et la concavité en dedans; les filets inférieurs sont, dès le début, les plus longs et les plus courbés (fig. 33). Puis, tandis que

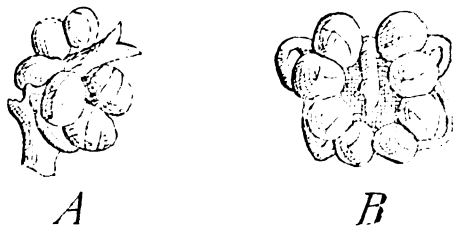


FIG. 33.
Vue d'ensemble de l'androcée des *Galeopsis* au moment de la première courbure des filets — A, vue latérale; B, vue frontale.

l'allongement des filets se poursuit activement, il se passe dans leur partie apicale un phénomène tout particulier. Cette partie apicale est restée pour ainsi dire à l'état cambial, alors que le reste du filet s'est développé normalement et a pris de la consistance. C'est dans cette partie cambiale, qui forme un petit cylindre haut de 0,07 millimètre et mesurant 0,12 millimètre de diamètre environ, que se manifeste une torsion dirigée à droite pour les étamines de gauche, et à gauche pour les étamines de droite (fig. 34).

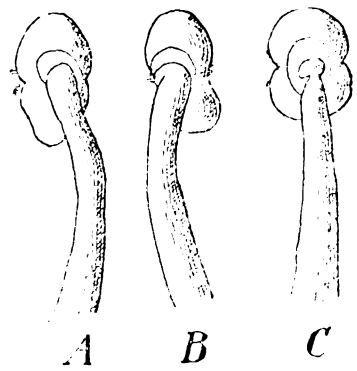


FIG. 34.
A, B, C, vues postérieures d'étamines de *Galeopsis* montrant la torsion apicale des filets.

On peut calculer que la torsion, qui est de 90°, entraîne, pour une des

Digitized by Google

files de cellules parallèles à l'axe du cylindre, un allongement maximal d'environ 0,0473 millimètre [1].

[1] On peut facilement se rendre compte de la marche de la torsion en développant le cylindre sur une surface plane (fig. A). L'axe des y sera formé par une ligne située dans le plan de surface du cylindre et parallèle à l'axe de symétrie de celui-ci. L'axe des x sera formé en développant la circonférence de cercle qui limite la section transversale du cylindre.

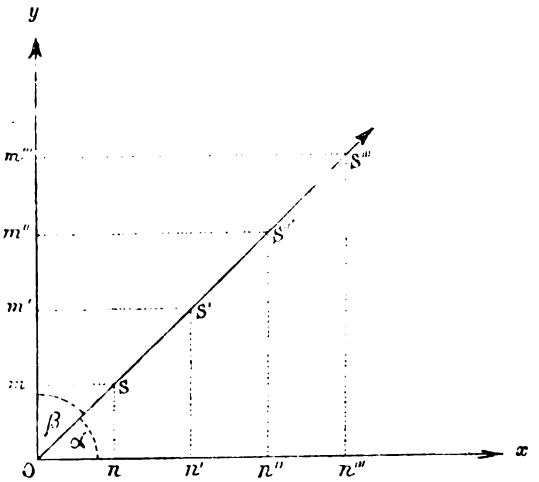


FIG. A.

Les forces qui agissent sur un corps P se mesureront aux distances parcourues par ce corps. Si P est soumis à une force dirigée suivant l'axe des y, il viendra occuper dans les unités de temps successives les points m, m', m'', m''', etc., à partir de l'origine o. Mais si, dès le début, P est aussi soumis à une force dirigée suivant l'axe des x, il tendra à venir occuper les positions n, n', n'', n''', etc., situées sur cet axe. Sollicité simultanément par deux forces qui se croisent à angle droit, le corps P se trouvera transporté au bout des différents temps t, t', t'', t''', etc., aux extrémités s, s', s'', s''', etc., des diagonales des rectangles construits sur les droites om, on; om', on'; om'', on'', etc. Si les deux forces sont égales, les distances parcourues seront les mêmes, les figures construites sur les droites om, on; om', on', etc., seront des carrés, et les trajectoires os, os', os'', etc., formeront avec les deux axes un angle de 45°; si les forces sont inégales, on aura par exemple $om > on$ et l'angle α formé avec l'axe des x augmentera, si $om < on$, il diminuera et vice versa; plus α diminue, plus aussi $om < os$ et réciproquement.

Appelons a la longueur atteinte sur l'axe des y, et a' la longueur obtenue sur la diagonale par l'intervention d'une force dirigée suivant l'axe des x. La différence z des deux lignes donnera la mesure de l'allongement subi par a pour devenir a', soit $z = a' - a$.

On peut déterminer a', soit au moyen de ses deux coordonées, soit par le théorème de Pythagore. Avec le dernier procédé, plus rapide, on voit que a' est l'hypoténuse d'un

Digitized by Google

Quant à la torsion elle-même, elle est due à des causes internes, inaccessibles pour le moment à nos investigations; car on ne peut l'attribuer à aucune cause initiale extérieure. En éclairant de toutes les manières la fleur pendant sa floraison, ou en la mettant dans l'obscurité, on n'exerce aucune action sur la torsion. Un pied de *G. Tetrahit* var. *Reichenbachii* et un pied de *G. Ladanum*, placés sur un clinostat maintenu en marche pendant dix jours, offrirent au bout de ce temps des fleurs épanouies absolument normales, tandis qu'elles constituaient au début de l'expérience des boutons dans lesquels les verticilles étaient à peine ébauchés. La pesanteur se trouve donc également exclue.

En s'allongeant, les filets sont retenus dans leur développement par le labiole corollaire qui est encore replié en quinconce sous le labre. Ils effectuent donc une deuxième courbure qui est deux fois plus forte pour les étamines inférieures que pour les supérieures (fig. 35). Les dernières n'ont qu'à faire parcourir à leurs anthères un chemin qui correspond à 90° pour

triangle rectangle dont la base c se détermine par l'angle de torsion, qui est donné (90°), et dont la hauteur b est la hauteur du cylindre (fig. B).

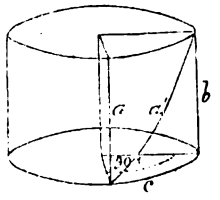


FIG. B.

On a pour la base

$$c = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$$

et pour l'hypoténuse

$$a' = \sqrt{\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Dans le cas particulier donc

$$c = \frac{3,14 \times 0,06}{2} = 0,0942$$

$$a' = \sqrt{0,0942^2 + 0,07^2} = \sqrt{0,00887364 + 0,0049} = \sqrt{0,01377364} = 0,11736.$$

Enfin : $z = 0,1173 - 0,07 = 0,0473$.

Digitized by Google

retrouver la position normale; chez les secondes, c'est à un angle de 180° que correspond la route à parcourir.

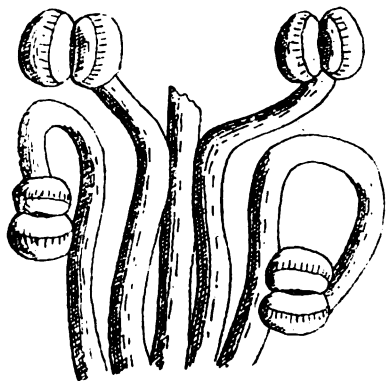


FIG. 35.
Vue d'ensemble de l'androcée des *Galeopsis* au moment de la seconde courbure des filets.

Les mouvements qui rendent aux étamines leur position définitive s'effectuent au moment où la corolle s'ouvre, et l'androcée occupe alors la position décrite au commencement de ce chapitre.

C'est ainsi que se trouve résolue la question de l'ouverture pseudo-transversale des anthères. La solution a été partiellement indiquée par Mirbel et Vaucher, et bien comprise par Schnizlein [1]. Nous différons cependant d'avis avec Schnizlein sur un point. Pour lui, la position transversale est amenée par l'action combinée d'une flexion et d'une torsion : « theils Biegung, theils Drehung ». Nous croyons, au contraire, que les deux mouvements sont très distincts et indépendants l'un de l'autre. Il ne s'agit ici que de la seconde flexion des étamines, celle dans laquelle toutes les convexités de courbure sont tournées vers l'axe de la fleur, car la première flexion, où toutes les convexités sont extérieures, était inconnue de Schnizlein. Eh bien, cette flexion-là se produit chez un très grand nombre de Labiées; elle est imposée à l'étamine qui doit s'arranger de façon à pouvoir se loger dans le petit espace réservé pour elle dans le bouton : elle s'infléchit donc en avant. Redressons l'étamine et nous verrons que naturellement rien ne sera changé dans les rapports de position qui existent entre l'anthère et le filet.

[1] Voyez l'historique de cette partie pour les indications bibliographiques concernant ces auteurs.

Digitized by Google

La torsion, au contraire, est un mouvement localisé sur la partie apicale différenciée du filet ; il n'a rien à faire avec la flexion, s'effectue avant elle et est comparable à la rotation de 90° d'un cylindre autour de son axe.

Avant de quitter l'étude de l'androcée, remarquons que, en étudiant le développement de l'androcée sur le clinostat, nous avons pu nous faire une appréciation de la théorie de Peyritsch sur les causes de la zygomorphie florale des Labiées [1], théorie basée sur des indications antérieures de Hofmeister [2]. Peyritsch ayant étudié une quantité de pélories actinomorphes, fut frappé du fait qu'elles étaient toutes terminales. Le botaniste autrichien crut pouvoir déduire de là que l'actinomorphisme est dû à l'action de la pesanteur s'exerçant également sur tous les verticilles qui se développent sur un axe vertical. Au contraire, le zygomorphisme proviendrait, selon lui, de l'inclinaison de cet axe sur l'horizon et de l'action unilatérale de la pesanteur sur les fleurs. A l'occasion de nos expériences sur les étamines, nous avons soustrait de très jeunes corolles à l'action de la pesanteur, alors que la zygomorphie n'était pas encore indiquée autrement que par le processus organogénique lui-même. Or, la corolle s'est développée suivant le type bilabié, à plan de symétrie longitudinal médian, d'une façon parfaitement normale. Dans aucun cas, le développement, distrait de l'action de la terre, ne s'est produit d'une façon pélorique. D'où l'on doit conclure que le zygomorphisme des Labiées est dû à des causes héréditaires.

CHAPITRE XXIII.

STRUCTURE DU GYNÉCÉE.

Au moment où nous les avons laissés, les ovaires s'étaient cloisonnés transversalement pour former un tétrachaine. Ce tétrachaine porte un style terminal, qui ne tarde pas à devenir gynobasique par le développement considérable des carpelles. Primitivement, le style est recourbé en avant. Peu à peu cependant, il se redresse et, comme l'avait déjà remarqué

[1] Peyritsch, *Ueber Pelorien bei Labiaten*, I, pp. 15-18. (Sitzungsber der k. k. Akad. der Wissensch. in Wien, t. LX, 1869.)

[2] Hofmeister, *Allgemeine Morphologie der Gewächse*, 1868, p. 581.

Digitized by Google

Vaucher [1], fait presque toujours à sa base un, plus rarement deux tours de spire sur lui-même. A l'état adulte, ces tours de spire persistent assez souvent; le style s'élève alors de là entre les adelphies staminales contre le plafond du tube corollaire et devient adhérent à droite et à gauche avec les adelphies staminales, au point où ces dernières se dissolvent. A partir de ce point, il continue à accompagner les étamines et dépasse même celles-ci, entre et en arrière desquelles s'étalent ses branches.

Le style est recouvert par un épiderme lisse à cellules très allongées, de section carrée. Il contient un parenchyme incolore, ou coloré en violet, ainsi que l'épiderme, par son suc cellulaire. Au centre, on trouve deux faisceaux libéro-ligneux grêles. Ces faisceaux se séparent au-dessous des deux branches du style; chacun d'eux se rend dans une branche et la parcourt jusqu'au-dessous du sommet. Les branches sont assez peu papilleuses, et quoiqu'elles jouent le rôle de stigmates, on voit souvent des grains polliniques être attachés en quantités sur le style au-dessous des branches et y germer.

Les ovaires, d'abord verts, prennent, pour se transformer en nucules, une teinte brune ou chagrinée. Leur forme extérieure est vaguement tétraédrique dans le sous-genre *Tetrahit*. La base du tétraèdre correspond à la face supérieure; elle est légèrement inclinée vers le centre du gynécée, d'où il résulte que l'arête intérieure est plus courte que les deux extérieures. Tous les angles sont arrondis. L'arête intérieure est arrondie; les arêtes extérieures sont assez aiguës. L'insertion des nucules s'opère par une aréole basilaire plus ou moins triangulaire. Les plus grosses atteignent $3 \times 2,5$ millimètres de surface en section longitudinale, mais il y en a de beaucoup plus petites. Cette aréole est pratiquée directement dans la nucule.

Dans le sous-genre *Ladanum*, les nucules sont plus petites et ne dépassent guère $2,5 \times 1,5$ millimètres de surface en section longitudinale. La face supérieure est petite et suffisamment inclinée vers le centre du gynécée pour que la structure tétraédrique devienne très obscure. De plus, la nucule ne s'arrondit pas, en se bombant, immédiatement après l'insertion, comme dans l'autre sous-genre, mais a d'abord une forme cylindrique, de sorte que l'aréole

[1] Vaucher, *Histoire physiologique des plantes d'Europe*, t. III, p. 648.

Digitized by Google

d'insertion termine un petit goulot. Ce goulot reste longtemps d'une couleur plus claire que le reste de la nucule. L'arête interne est assez aiguë, ainsi que l'angle qui est à son sommet.

Le tétrachaine est entouré en avant par une lame du torus qui constitue le nectaire; cette lame se prolonge et se redresse en avant pour former une masse capitale conique; le nectaire reste blanc, tandis que les ovaires sont verts, puis bruns.

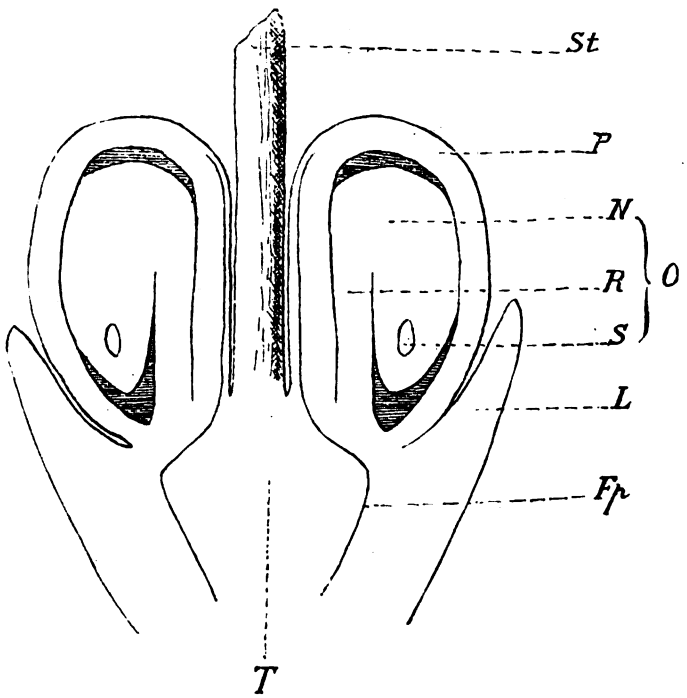


FIG. 36.

Dissection du jeune gynécée chez le *G. Tetrahit* montrant la disposition des ovules. — *St*, style; P, péricarpe; O, ovules dont la courbure est déjà achevée, comprenant un nucelle monochlamydé N, un sac embryonnaire S et un raphé ventral R; T, torus; L, lames latérales du nectaire; *Fp*, cordons libéro-ligneux péricarpiques.

Si l'on dissèque le gynécée très jeune, on trouvera dans chaque akène un ovule orthotrope; mais cette orthotropie disparaît presque immédiatement par le fait que l'ovule se courbe vers la face dorsale de l'ovaire et devient complètement anatrope. Pendant que la courbure s'opère, il se forme à la base du nucelle, soit au hile, un bourrelet circulaire qui se développe rapidement de façon à l'envelopper complètement : c'est l'unique tégument de l'ovule qui est mono-

Digitized by Google

chlamydé [1]. Nous avons donc maintenant dans chaque akène un ovule anatrope dont le raphé est ventral, dont le funicule est assez long et dont le sommet micropylaire est arrondi ou en pointe (fig. 36).

Il ne pénètre aucun cordon libéro-ligneux dans le funicule, et le raphé n'en possède pas non plus. Une coupe transversale de cet organe démontre à la périphérie une assise épidermique à peine différenciée, qui entoure une masse homogène de parenchyme à éléments polyédriques, un peu allongés dans le sens de l'axe et pourvus de gros noyaux grisâtres (fig. 37).

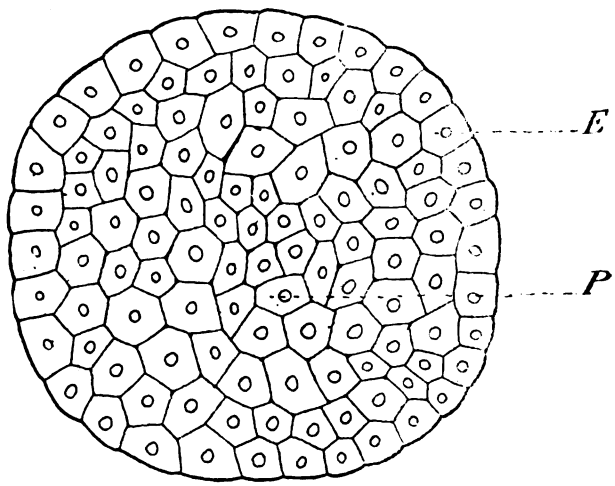


FIG. 37.
Section transversale du raphé chez le *G. Tetrahit*. — E, assise épidermoïdale; P, parenchyme fondamental.

La structure du nucelle et du tégument n'offre absolument rien de spécial : c'est toujours un parenchyme non différencié et homogène. Même la « couche de revêtement », si fréquente en général dans la primine [2], fait complètement défaut. A notre avis, cette espèce de stasimorphie de la primine est due au fait que ses fonctions sont remplies par le péricarpe. Le péricarpe, qui a une structure histologique compliquée et montre une haute division du travail physiologique, a rendu inutiles, pour ainsi dire, les différenciations dans le tégument. Cela est si vrai que, d'après M. Baillon [3], le tégument serait des

[1] WARMING, *De l'ovule*. (ANN. SC. NAT., 6me série, t. V, 1878.)
[2] WARMING, *l. c.*, p. 235.
[3] BAILLON, *Monographie des Labiées Verbénacées, Éricacées et Ilicacées*. (HISTOIRE DES PLANTES, 1891, CXVIII, p. 3, en note.)

Digitized by Google

plus incomplets chez les *Lamium* et manquerait parfois presque complètement dans divers genres. Le sac embryonnaire est situé dans la partie inférieure (supérieure avant la courbure) du nucelle. Quoique nous ayons souvent eu l'occasion, en étudiant l'ovule, de voir tantôt les antipodes fixées au flanc du sac, tantôt, mais plus rarement, les synergides ou l'oosphère, nous ne sommes pas entré dans leur étude et ne pouvons, par conséquent, rien ajouter de nouveau à ce qu'ont dit du sac embryonnaire des Labiées MM. Warming [1], Vesque [2] et Westermaier [3], ni trancher les points en litige entre ces observateurs.

Nous avons dit que l'ovule, y compris le raphé et le funicule, étaient entièrement étrangers au système libéro-ligneux : il n'en est pas de même pour le torus. Ce dernier est parcouru par une grande quantité de cordons libéro-ligneux qui y trouvent en général leur terminaison. Quelques-uns cependant en ressortent. Ce sont d'abord les deux cordons du style, puis quatre faisceaux qui pénètrent chacun dans un akène et parcourent le péricarpe dans toute sa longueur, parallèlement et à côté du raphé.

Ce qu'il y a de singulier dans le torus, c'est qu'il est entièrement formé par un parenchyme homogène dont presque tous les éléments polyédriques contiennent de belles mâcles d'oxalate de chaux (fig. 38). Ces mâcles sont répandues partout, jusqu'aux extrémités des lames et de la masse capitale du nectaire ; seul l'épiderme en contient en plus grande quantité. Il est assez difficile de comprendre la signification de cette accumulation considérable de sel sur ce point particulier de la plante, alors que ces mâcles font défaut partout ailleurs [4].

[1] Warming, *l. c.*

[2] Vesque, *Nouvelles recherches sur le développement des phanérogames angiospermes*, pp. 358-360. (Ann. sc. nat., 6me série, t. VIII, 1879.)

[3] Westermaier, *Zur Embryologie der Phanerogamen, insbesondere über die sogenannten Antipoden.* (Nova Acta der k. Leop.-Car. Akad. der Naturf., t. LVII, 1890.)

[4] M. Kohl, dans sa description de la distribution topographique de l'oxalate de calcium dans les plantes, ne mentionne pas cette singulière localisation. Voy. Kohl, *Anatomisch-physiologische Untersuchung der Kalksalze und Kieselsäure in der Pflanze*, p. 35 et seq. Marburg, 1889.

Digitized by Google

Nous parlerons du jeune péricarpe à propos de l'enveloppe du fruit adulte, et passons directement à l'étude de ce dernier.

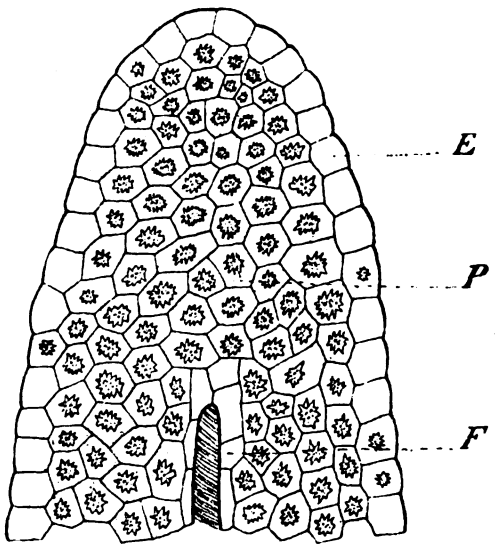


FIG. 38.
Section transversale de la masse capitale du nectaire chez le *G. Tetrahit*. — E, épiderme; P, parenchyme fondamental; F, terminaison d'un faisceau caulinaire.

Une section transversale d'une nucule quelconque (fig. 39) nous permet de distinguer un péricarpe, qui sert d'enveloppe à tout le fruit, un

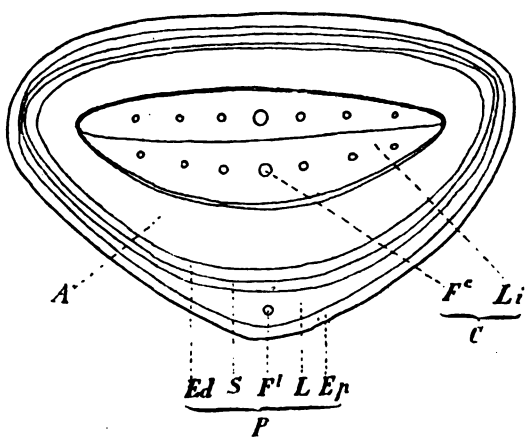


FIG. 39.
Section transversale d'ensemble d'une nucule du *G. Ladanum*. — P, péricarpe, comprenant un épicarpe *Ep*, un leptocarpe L avec un faisceau F*l*, un sclérocarpe S, et un endocarpe *Ed*; A, albumen; C, cotylédons, dont le limbe *Li* contient de nombreux faisceaux procambiaux F*c*.

Digitized by Google

albumen et deux cotylédons étroitement appliqués l'un contre l'autre. Si l'état du fruit n'est pas trop avancé, on reconnaîtra entre l'albumen et le péricarpe le parenchyme du tégument qui, en général, est résorbé plus tard. Une coupe longitudinale permet de voir les deux cotylédons et la radicule entièrement plongés dans l'albumen et fait constater en même temps que le goulot, situé à la base des nucules et assez saillant chez les *Ladanum*, est entièrement formé par le péricarpe.

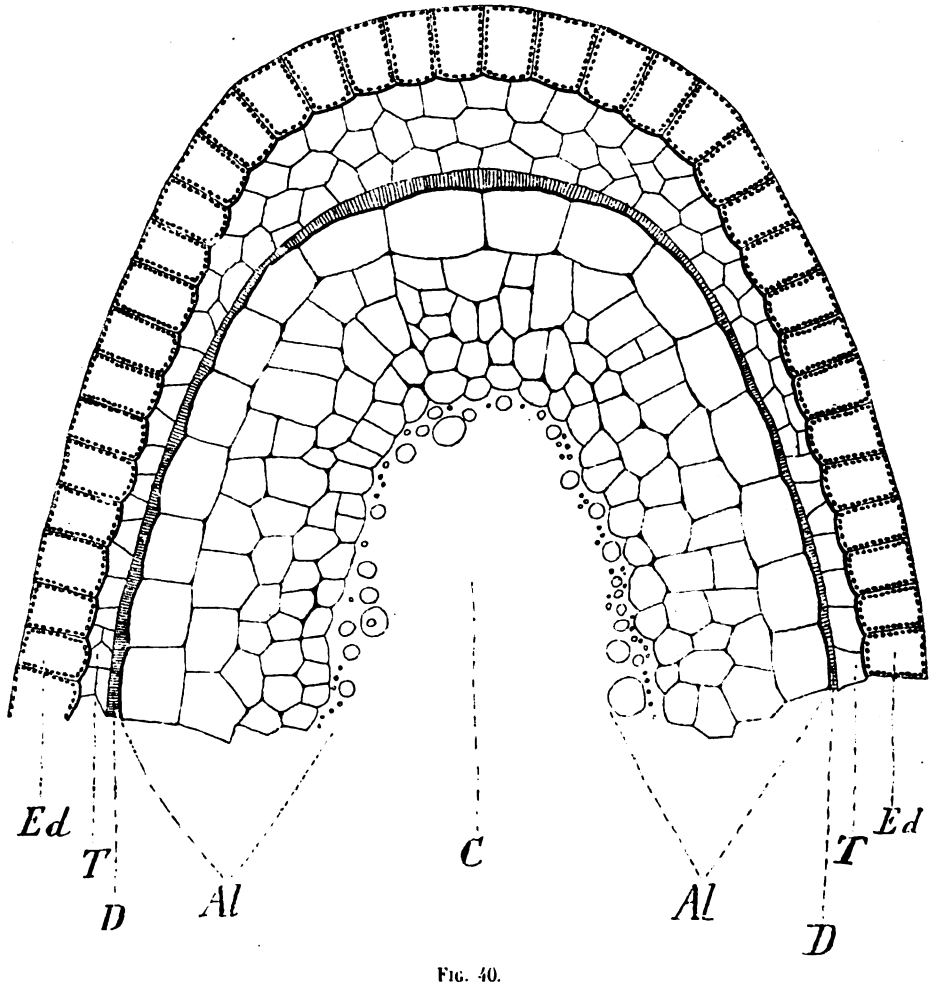


Fig. 40.
Section transversale d'une nucule du *G. Ladanum* dans la région de l'albumen. — Ed, endocarpe; T, restes du tégument; D, produits de résorption du nucelle et d'une partie du tégument; Al, albumen; C, cavité réceptrice de l'albumen.

Les cotylédons offrent la structure que nous avons étudiée dans le

Digitized by Google

chapitre qui en traite spécialement, avec quelques légères différences dues à leur âge moins avancé. Ainsi, les stomates ne sont pas formés, mais les cellules épidermiques accomplissent les divisions qui entraîneront leur constitution. Le mésophylle est entièrement différencié, mais les leucites sont encore incolores. Enfin les faisceaux libéro-ligneux sont tous à l'état procambial.

Immédiatement aux abords de l'embryon (fig. 40), on trouve du plasma et de grosses gouttes d'huile avec des granulations, en petits amas, de matières protéiques. Ce sont les produits de résorption de l'albumen qui sont directement digérés par l'embryon. L'albumen, riche en huile et en plasma, est constitué par un parenchyme à éléments plus ou moins allongés dans le sens du rayon. La couche la plus externe de ce parenchyme est formée par de grands éléments tabulaires qui se distinguent fort nettement du parenchyme interne. Le parenchyme du tégument, quand il existe encore, est constitué par de petits éléments polyédriques, délicats et incolores. Il s'appuie directement contre le péricarpe.

Dans le péricarpe, on peut distinguer trois régions : l'épicarpe, le mésocarpe et l'endocarpe, que leur genèse et leurs rapports morphologiques permettent d'homologuer directement avec les deux épidermes et le mésophylle des feuilles aériennes (fig. 41).

L'épicarpe est constitué par une seule assise d'éléments qui, sur une coupe tangentielle, ont une forme polygonale, tandis qu'ils offrent en section transversale la disposition de rectangles allongés radialement. Les parois extérieures et latérales sont très épaissies ; les parois internes, adossées au mésocarpe sont, par contre, fort minces. Ce que cet épicarpe a d'extraordinaire, c'est que les parois radiales et extérieures de la plus grande partie de ses éléments sont littéralement criblées d'énormes ponctuations. Sur les parois latérales, ces ponctuations ont plus ou moins la forme de carrés à angles arrondis et sont distribuées en files régulières qui ne laissent entre elles qu'un léger espace épaissi. Sur les parois extérieures, les ponctuations ont une forme circulaire, ellipsoïde, ou se prolongent en bâtonnets ; leur orientation est plus irrégulière et change souvent complètement d'une cellule à l'autre. Les parois internes, minces, sont complètement dépourvues d'ornements. Ce système de ponctuations épicarpiques n'était pas connu jusqu'ici chez les

Digitized by Google

Labiées [1]; il nous paraît entièrement inexplicable dans l'état actuel de nos connaissances. On serait tenté d'en trouver une raison mécanique dans l'ondulation des parois épidermiques, — par l'ingénieuse théorie de M. Ambronn, qui fait naître les ponctuations sur les points de moindre pression pendant le

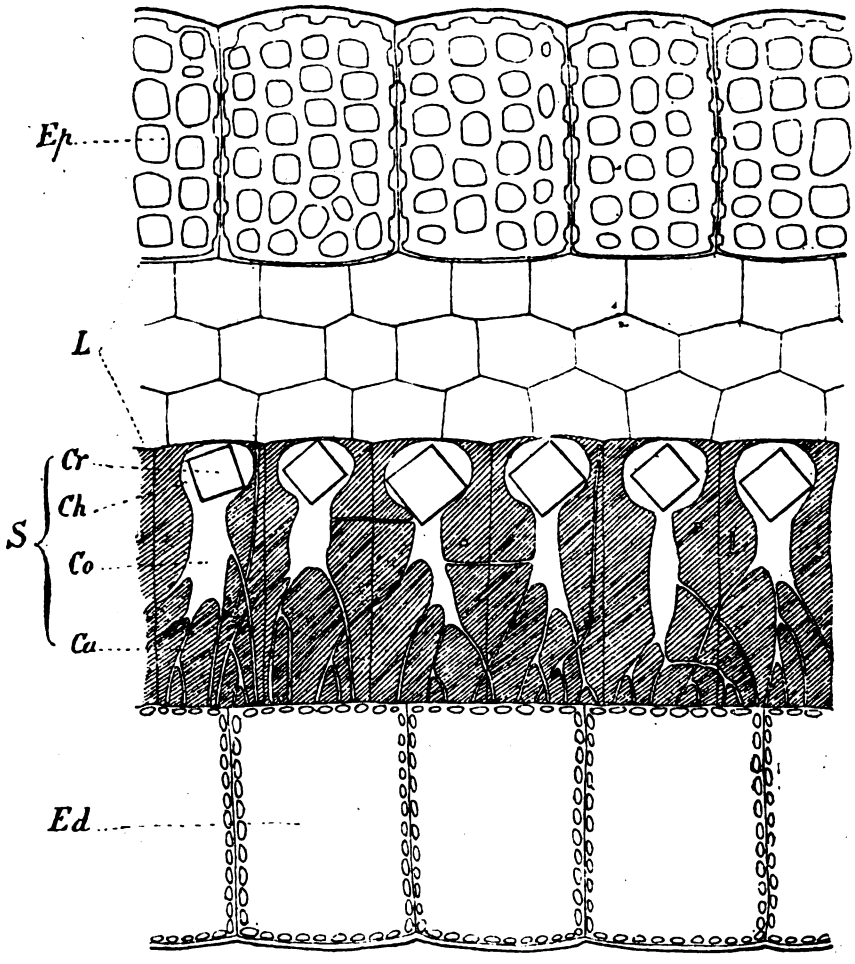


FIG. 41.

Section transversale du péricarpe sur une des faces latérales de la nucule chez le *G. Ladanum*. — *Ep*, épicarpe ponctué; L, leptocarpe; S, sclérocarpe dont le lumen se compose, pour chaque élément, de trois parties : la chambre sphérique *Ch* avec son cristal d'oxalate de chaux *Cr*, le corridor *Co* et la région canaliculaire *Ca*; *Ed*, endocarpe chlorophyllien.

[1] M. Kraus, dans son mémoire *Ueber den Bau trockner Pericarpien* (PRINGSHEIM'S JAHRBÜCHER, t. V, 1866-67, p. 87), ne signale en général de ponctuations ni dans l'épicarpe ni dans l'endocarpe.

Digitized by Google

développement des dites parois [1], — si l'on n'était arrêté par le fait que les éléments ne sont pas ondulés (fig. 48).

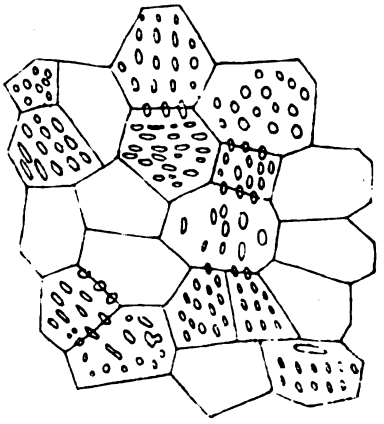


FIG. 42.
Section tangentielle de l'épicarpe adulte chez le *G. Ladanum*.

Les parois sont cellulosiques, car elles restent incolores dans une solution alcoolique de phloroglucine traitée par l'acide chlorhydrique ; elles se colorent en rose sous l'action du réactif genevois, et en bleu sous celle du chloro-iodure de zinc. Les éléments contiennent de l'amidon en assez grande quantité.

Le mésocarpe comporte deux tissus fort distincts : le leptocarpe et le sclérocarpe [2].

Le leptocarpe est l'équivalent du tissu spongieux des feuilles de l'appareil végétatif. Il est constitué par un parenchyme, fort de 2-5 assises, dont les éléments, petits et incolores, ont une section transversale hexagonale. L'assise hypodermique se distingue souvent par la grandeur plus considérable de ses cellules. Les éléments du leptocarpe se colorent en rose-brun par le réactif genevois et contiennent passablement d'amidon.

Dans l'arête interne des nucules, le leptocarpe prend un grand développement et constitue le corps même de l'arête; un petit faisceau libéro-

[1] AMBRONN, *Ueber Poren in den Aussenwänden von Epidermiszellen.* (PRINGSHEIM'S JAHRBÜCHER, t. XIV, 1883, pp. 82-110.)

[2] Nous essayons de rendre par le terme *sclérocarpe* la dénomination de ***Hartschicht***, usitée par les anatomistes allemands; celui de *leptocarpe* s'en dégage naturellement par opposition.

Digitized by Google

ligneux le parcourt en cet endroit dans toute sa longueur. Ce faisceau constitue une sorte de nervure médiane qui envoie à droite et à gauche quelques fins cordonnets, dont le bois comporte rarement plus d'une ou deux trachées, et qui innervient, très chichement il est vrai, le reste du leptocarpe. Ces cordonnets, quand on les rencontre, sont séparés du sclérocarpe par une seule assise de cellules plus ou moins aplaties radialement.

C'est aussi le leptocarpe qui forme entièrement le goulot si développé à la base des nucules des *Ladanum*. Ici encore, le parenchyme leptocarpique se différencie vers la périphérie, en allongeant considérablement ses éléments dans le sens du rayon.

Le sclérocarpe, qui est l'homologue de la couche palissadique dans les feuilles de l'appareil végétatif, est, de tous les tissus des *Galeopsis*, celui qui offre la structure la plus compliquée. Il ne comporte qu'une seule assise de cellules, qui ont la forme de rectangles allongés radialement, aussi bien sur des coupes transversales que longitudinales du péricarpe. Extérieurement, chaque élément s'adosse au leptocarpe par une paroi mince; cette paroi s'épaissit dans les angles, se rétrécit de nouveau sur les faces latérales, puis augmente graduellement et énormément d'épaisseur. De la sorte, les parois circonscrivent, dans la partie extérieure de la cellule, une chambre sphérique qui communique par un corridor avec la partie inférieure de l'élément. Cette chambre contient un énorme cristal cubique d'oxalate de calcium; ce cristal occupe presque toute la chambre et se trouve ordinairement accompagné d'amidon. Le corridor se continue jusqu'à la moitié ou au tiers inférieur de la cellule, en conservant son calibre ou en s'évasant légèrement au milieu, pour s'arrêter brusquement et donner naissance à un plexus de canaux qui vont aboutir, les uns à la face intérieure du sclérocarpe, du côté de l'endocarpe, les autres contre les éléments voisins. Il est plutôt rare de voir un canal quitter le corridor pour se rendre directement à la surface inférieure du sclérocarpe; en général, les canaux se bifurquent une ou plusieurs fois avant d'atteindre cette surface, et cela dans plusieurs plans, de sorte que l'on obtient toujours les mêmes images du plexus canaliculaire, que les coupes du sclérocarpe soient longitudinales ou transversales, pourvu seulement qu'elles soient radiales.

Digitized by Google

Ce qu'il y a d'extraordinaire dans ce plexus canaliculaire, c'est la disposition des canaux qui se dirigent obliquement vers la base des éléments voisins: on les voit toucher le bord de la cellule, être séparés de l'élément voisin par une membrane extrêmement fine, et être continués au delà de cette membrane par un canal qui poursuit la même direction en venant aboutir à la base interne du sclérocarpe. Si le canal venait rejoindre le lumen de l'élément voisin, il n'y aurait là rien que de très naturel: c'est ce que l'on peut remarquer dans tous les sclérenchymes ponctués ou canaliculés; mais ce qui est singulier, c'est que le canal qui correspond au lumen d'une cellule est continué dans la cellule suivante par un canalicule entièrement indépendant, qui reste quelquefois simple, mais se bifurque souvent plusieurs fois. On pourrait donc dire, sans paradoxe, que les éléments du sclérocarpe possèdent plusieurs lumens et qu'il a dû y avoir, pour une cellule, une série de centres distincts, dans lesquels s'est localisée de préférence la faculté d'épaissir des membranes.

Les corridors sont fréquemment reliés l'un avec l'autre par des canalicules transversaux, qui traversent les parois mitoyennes des lumens dans toute leur épaisseur. Ces parois mitoyennes sont aussi fréquemment parcourues par des canalicules longitudinaux ou à contours sinueux, que l'on rencontre alors dans des positions variées un peu dans toutes les directions.

Les éléments du sclérocarpe sont, en général, plus allongés dans les *Tetrahit* que dans les *Ladanum*. Ils diminuent toujours de longueur aux contours correspondant aux deux arêtes externes de la nucule. Par contre, ils s'allongent au sommet du culot, et c'est sur ce point-là que le système des canalicules atteint son plus haut degré de complexité (fig. 43).

La phloroglucine en solution alcoolique traitée par l'acide chlorhydrique, réagit en violet foncé sur la substance pariétale du sclérocarpe; le réactif genevois la colore en jaune-orange tournant au vermillon; elle devient jaune par la potasse caustique, ne réagit pas en face du chloro-iodure de zinc, et se dissout lentement dans l'acide sulfurique concentré, en passant par la série des teintes successives du jaune au brun.

Le sclérocarpe est donc lignifié. C'est l'assise mécanique qui donne de la résistance au péricarpe et lui permet de protéger effectivement la graine. Le

Digitized by Google

système de canaux qui lui est propre sert à établir une communication facile entre le leptocarpei nnervié par des cordonnets libéro-ligneux, et l'endocarpe qui est chlorophyllien, comme nous le verrons tout à l'heure. Il est fort naturel que le plexus canaliculaire atteigne son maximum de complication dans le goulot de la nucule ou à la base de celle-ci, attendu que c'est par ce point que les substances apportées par le système libéro-ligneux dans le torus peuvent le plus rapidement arriver à l'endocarpe et à l'embryon.

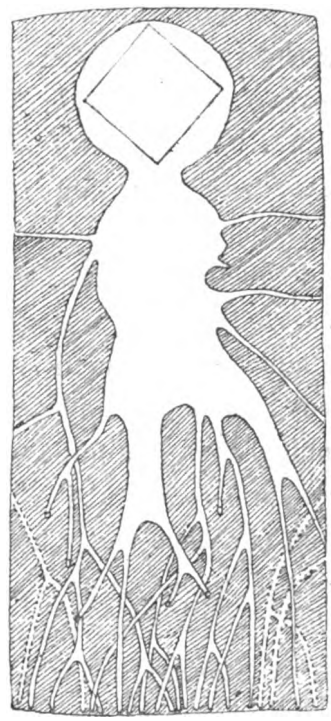


FIG. 43.
Cellule du sclérocarpe prise dans la partie basilaire d'une nucule du *G. Tetrahit*; les contours des lumens canaliculaires indépendants sont ponctués.

Quant à la signification du cristal d'oxalate de calcium situé dans la chambre sphérique des éléments sclérocarpiques, nous ignorons complètement ce qu'elle peut être. Comme ces cristaux ne se dissolvent pas pendant le développement de l'embryon, mais persistent comme partie intégrante des cellules, on ne peut pas y voir une réserve nécessaire au développement de la plantule [1].

L'endocarpe est constitué par des éléments de forme polygonale sur une

[1] KOHL, *Anatomisch-physiologische Untersuchung der Kalksalze und Kieselsäure in der Pflanze*, pp. 47 et seq. Marburg, 1889.

Digitized by Google

section tangentielle, et rectangulaire, allongée radialement, sur une coupe transversale. Les parois adossées au mésocarpe sclérocarpique sont extrêmement minces; il en est de même pour les parois latérales; seules les parois intérieures sont épaissies. Ces parois sont cellulosiques et se colorent en beau rose par le réactif genevois.

L'endocarpe ne contient pas d'amidon, mais ses éléments sont littéralement tapissés de gros chloroleucites, qui sont sans doute en relation avec l'alimentation de l'embryon, quoique leur position au-dessous du mésocarpe scléreux ne soit pas faite pour faciliter un travail d'assimilation. Cette chlorophylle joue en tous cas un rôle assimilateur utile avant la différenciation complète du manteau sclérocarpique.

Ce dernier, en effet, ne se distingue qu'assez tard. Primitivement, le péricarpe ne compte que l'épicarpe, un mésocarpe entièrement parenchymateux, fort d'une ou deux assises, et l'endocarpe. Ces éléments ne sont pas différenciés entre eux, si ce n'est l'endocarpe qui se distingue très vite par le calibre de ses éléments. Puis, pendant que le mésocarpe se divise, son assise la plus interne allonge ses éléments radialement jusqu'à ce qu'ils aient atteint la longueur de ceux de l'endocarpe. A ce moment-là, on voit déjà, dans le futur sclérocarpe, plusieurs petits cristaux, dont l'un plus grand que les autres constituera le cristal de la future chambre sphérique; on distingue aussi un noyau dont la position ne nous a pas paru déterminée. La sclérification commence par les parties latérales, et celles qui sont adossées à l'endocarpe, pendant que le gros cristal, fortement augmenté, émigre dans sa position définitive. Bientôt l'épaississement des parois est assez avancé pour empêcher le cristal de bouger : le sclérocarpe est constitué.

Nous n'avons rien remarqué dans cette évolution qui pût nous renseigner d'une façon plus détaillée sur la façon dont s'opère l'épaississement des membranes; en tous cas, en admettant la possibilité de la croissance par opposition, la structure micellaire des membranes doit être bien compliquée et le processus de raccordement des lamelles juxtaposées bien difficile aussi à se représenter, vu l'existence de lumens canaliculaires accessoires.

Les faits que nous venons de décrire concernant le sclérocarpe des *Galeopsis* sont si singuliers, qu'il sera à notre avis nécessaire de les soumettre

Digitized by Google

à une nouvelle étude. En particulier, les données que nous avons pu obtenir sur l'histogénie du tissu en question sont incomplètes; nous pensons qu'une nouvelle analyse histogénique soignée serait de nature à jeter beaucoup de lumière sur les anomalies que nous avons cru remarquer.

CHAPITRE XXIV.

BIOLOGIE DE LA FLEUR.

Nous nous sommes convaincu de l'exactitude de l'expérience faite par Severin Axell [1], qui consiste à faire fleurir des *Galeopsis* en défendant leur accès aux insectes; on obtient de la sorte une fructification normale.

H. Müller [2] a déjà décrit la façon dont s'opère l'autopollination [3]. Le sommet du style s'infléchit peu à peu en avant, à la fin de l'anthèse, et passe entre les anthères des étamines supérieures; il s'y frotte, se barbouille de pollen, et les ovules en sont fécondés peu après.

Mais la pollination normale, qui est tantôt croisée, tantôt directe — car la prépondérance de l'un des processus sur l'autre, dans un cas particulier, est un pur effet du hasard, — est opérée par les insectes. D'après nos observations, ce sont des Apides (*Bombus, Apis*) qui sont les hôtes habituels des fleurs de *Galeopsis,* mais nous ne doutons pas que des observations suivies fassent retrouver, non seulement les hôtes appartenant à des groupes différents, signalés par H. Müller et Godron, mais encore beaucoup d'autres.

Il faut bien admettre que la visite des insectes est d'une utilité réelle à la plante, malgré la possibilité de l'autopollination, sans quoi il devient impossible de comprendre la raison des arrangements spéciaux réalisés dans la fleur pour faciliter son accès aux Apides et leur confier son pollen.

Examinons ce qui se passe après qu'un *Bombus hortorum,* par exemple, s'est posé sur une corolle, et le fonctionnement des diverses parties s'expliquera de lui-même.

[1] Severin Axell, *l. c.*

[2] H. Müller, *Die Befruchtung der Blumen durch Insekten,* p. 314.

[3] On doit dire : *pollination, polliner,* et non : *pollinisation, polliniser.* Voy. Errera et Gevaert, *Sur la structure et les modes de fécondation des fleurs,* p. 25. (Bull. Soc. roy. bot. de Belgique, t. XVII, 1878.)

Digitized by Google

Tout d'abord, l'entrée de la gorge est indiquée par la tache labiolaire ou nectarosème, qui, par ses couleurs vives (jaune sur rose, brun sur blanc, jaune vif et violet sur jaune pâle), est bien faite pour attirer l'attention.

Le bourdon se fixe sur le labiole, et, enfonçant sa tête dans la gorge, vient l'appuyer à sa partie inférieure entre les deux apophyses labiolaires. Ordinairement, dans les formes parviflores, l'insecte pompe ainsi le liquide sucré, sécrété par le nectaire et accumulé au fond du tube. Mais les *Galeopsis* sont soumis à une hétéranthie marquée [1]; ils possèdent aussi, et en grande majorité, des formes grandiflores, à tube long et à gorge plus ouverte. Dans ce dernier cas, et toutes les fois que le tube est un peu long, la tête pénètre tout entière dans la gorge et le bourdon se retient à la base des apophyses avec ses pattes de devant.

Si nous étudions, après la visite d'un bourdon, une fleur dont les loges anthériennes étaient à peu près closes et remplies de pollen, nous les trouvons béantes, les opercules étant adossés l'un à l'autre et les utricules ayant perdu la plus grande partie de leur pollen.

Pour nous rendre compte du mécanisme de cette sortie du pollen, imitons artificiellement le mouvement de friction de la partie dorsale du corps du bourdon contre l'étamine. Introduisons donc lentement dans la gorge de la corolle un pinceau ou, mieux, une allumette entourée de coton, en observant bien une des anthères.

On voit d'abord les poils vecteurs de l'opercule supérieur s'embarrasser dans les rugosités du coton et y adhérer. Si l'on continue à pousser l'allumette, les poils vecteurs sont entraînés avec elle et l'opercule se rabat complètement en arrière; ce mouvement est suivi d'une légère secousse qui indique que l'opercule ne peut pas être rabattu plus loin. Cette secousse, souvent répétée par l'insecte qui butine, précipite vivement le contenu de l'utricule sur le coton de l'allumette, et dans le cas du bourdon, sur le dos de l'insecte.

Si nous retirons avec précaution l'allumette, le même phénomène se produit, mais en sens inverse pour l'opercule inférieur; de telle sorte que quand le bourdon s'est retiré, les deux utricules sont plus ou moins vidées.

[1] Briquet, *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 17.

Digitized by Google

Ordinairement, lorsque le bourdon butine du pollen, il est d'abord obligé de puiser du nectar au fond du tube pour humecter ce pollen. Mais, pendant qu'il allonge la tête dans la gorge et qu'il la retire, le pollen choit déjà sur son dos, de sorte qu'il ne trouve plus que les restes du contenu des loges, accrochés aux parois de l'utricule ou aux poils vecteurs de l'opercule. Dans bien des cas, par conséquent, le *Bombus* joue le rôle de voleur volé.

Se rendant ensuite sur une autre fleur, l'insecte couvre le style saillant au-dessus des étamines du pollen qu'il a sur le dos. Mais, ainsi que nous l'avons dit, le style et les anthères étant très rapprochés les uns des autres, il arrive constamment que, grâce aux brusques mouvements du bourdon, le propre pollen de la fleur en touche le style, ce qui produit l'autofécondation.

Tel est le mécanisme du transport du pollen par les Apides, transport qui nous explique maintenant la division du travail introduite dans le fonctionnement des loges anthériennes, les deux logettes se différenciant en utricule et en opercule. Il explique aussi la présence de cette torsion de 90° qui est nécessaire pour amener les opercules et leurs poils vecteurs dans une position favorable à leur mise en mouvement.

Il nous reste maintenant à examiner quelques dispositions accessoires jouant un rôle dans le fonctionnement de l'ensemble de la fleur.

Ce sont surtout les dispositions mécaniques affectées par la corolle pour supporter les chocs tels que la pluie et pour supporter le poids des innombrables insectes qui butinent journellement leur nectar et leur pollen. Nous avons étudié ces dispositions en décrivant la distribution des cordons libéro-ligneux dans la corolle. Ces cordons, parallèles à l'axe de la fleur, sont placés en cercle dans les parois du tube; ce dernier représente de la sorte un cylindre creux intérieurement, ce qui augmente sa capacité de résistance et son coefficient d'élasticité. Plus haut, avec l'élargissement de la gorge, on arrive au point où les insectes font agir tout leur poids : c'est la région des apophyses et du labiole; cette région exige donc, pour être solide, d'être reliée aux cordons dorsaux et ventraux du tube. Nous voyons, en effet, que les flancs de la gorge sont parcourus par des séries parallèles de cordons : ce sont les côtiers supérieurs et inférieurs qui sont

Digitized by Google

attachés aux cordons dorsaux essentiels, auxiliaires et marginaux, par de solides ligatures.

Le seul point qui paraisse un peu faible dans la disposition du squelette de la corolle, c'est la manière dont se comportent l'un vis-à-vis de l'autre les deux cordons dorsaux essentiels. Ces deux cordons, qui sont la clef de voûte de tout le système des cordons, ne sont reliés par des anastomoses de quelque valeur que dans le labre, tandis qu'ils n'ont presque pas de relations l'un avec l'autre pendant leur course dans le tube. Mais ce détail a peu d'importance, car les bourdons visiteurs ne pénètrent pas assez profondément dans la fleur pour exercer une pression considérable sur les parois latérales de la gorge, ce qui amènerait alors assez facilement une rupture entre les deux cordons dorsaux essentiels.

La position stable des organes génitaux entre eux est obtenue par la formation des deux adelphies latérales, entre lesquelles passe le style, qui leur est adhérent au point de sortie de la gorge.

Cette disposition, ainsi que la distribution des cordons dans la voûte de la gorge, nous donnera la cause des petits mouvements des anthères que l'on observe lorsqu'un insecte se pose sur le labiole, ou lorsque l'on pose artificiellement un petit poids à cheval entre les apophyses.

Le premier de ces mouvements, extrêmement léger, concerne le labre. La traction opérée par la région des apophyses se transmet aux cordons dorsaux par l'intermédiaire des cordons côtiers. Mais le cordon côtier supérieur passe directement au-dessous des sinus séparateurs du labre et du labiole, et se trouve relié au labre par les cordons latéraux (*ll*). Il en résulte chez le labre une légère oscillation autour de la dépression qui le sépare du tube.

Plus important est le mouvement en avant des anthères, qui se produit lorsque l'on heurte les adelphies au-dessous de leur point de libération d'avec le tube corollaire. Les anthères sont immédiatement projetées en avant : les filets oscillent sur la partie supérieure des adelphies comme pivot. Ce mouvement, qui s'opère dès que la tête du bourdon touche les adelphies, contribue à faciliter la projection du pollen en rapprochant les anthères du corps de l'insecte.

Digitized by Google

Nous dirons maintenant deux mots, par anticipation, d'une fleur étudiée plus loin, au n° 9 de nos observations tératologiques, où l'on en trouvera la description. Nous avons recueilli, dans les environs immédiats de l'endroit où la plante a été observée (près de Heidelberg, Grand-Duché de Bade), une quantité de fleurs semblables en tous points à celle-ci, sauf qu'elles possédaient une coloration plus normale du calice et de la corolle. La disposition des fleurs ne peut guère laisser de doute sur leur signification. Les lobes corollaires, repliés les uns sur les autres, les étamines rapprochées sur le style, leur pollen normal, le gynécée bien développé mais à style inclus, enfin les boyaux polliniques se développant normalement sur le style : tous ces caractères accusent une cleistogamie prononcée. A la faveur de cette cleistogamie, les individus développés tard dans l'année — et c'est le cas pour le *G. Tetrahit* qui persiste quelquefois jusqu'au mois de décembre — ont une fécondation assurée. Mais jusqu'à quel point ce phénomène est-il répandu ? A-t-il une signification biologique ou est-il simplement une manifestation tératologique ? Ce sont là des questions qui nécessiteront encore des études ultérieures. Il resterait sans doute aussi à voir jusqu'à quel point la fructification peut aller. On doit convenir toutefois que si les grands froids ne surviennent pas trop rapidement, cette fructification a des chances de pouvoir s'accomplir entièrement.

Les transitions vers la gynodiœcie, que M. Moewes [1] croit avoir constatées dans le genre *Galeopsis*, sont, à notre avis, aussi douteuses que les fleurs cleistogamiques précitées. Dans un genre où les irrégularités dans le développement de la fleur sont assez fréquentes, est-on autorisé à interpréter une plante comme passant à l'état gynodioïque, parce qu'une ou deux de ses fleurs ont un androcée stasimorphique ? Sans vouloir trancher la question, nous croyons qu'en tout cas de nouvelles études sont encore ici nécessaires pour interpréter correctement des faits épars et auxquels, jusqu'à présent, on n'a prêté qu'une médiocre attention.

[1] Moewes, *Ueber Bastarde von Mentha arvensis und Mentha aquatica, sowie die sexuellen Eigenschaften hybrider und gynodiöcischer Pflanzen*, p. 19 (*Engler's Bot. Jahrbücher*, t. IV, 1883).

Digitized by Google

CHAPITRE XXV.

TÉRATOLOGIE DE L'APPAREIL FLORAL.

Comme on a pu le voir dans l'historique de ce chapitre, les cas tératologiques observés jusqu'ici par les auteurs dans le genre *Galeopsis* sont de deux ordres. Les uns sont des pélories pentamères et tétramères, embrassant le calice, la corolle et l'androcée; ils ont été décrits avec plus ou moins de détails par Schultes (1814), Fincke (1841), Vaucher (1841), de Mélicocq (1846), Metsch (1852), Weck (1854), Buchenau (1857) et Meigen (1891). L'autre est une synanthie terminale, dont la mention est due à A.-P. de Candolle (1827); aucun auteur ne l'a observée depuis lui, et nous en avons en vain cherché nous-même un second exemple. Cet auteur dit avoir observé, dans certains pieds de *Galeopsis*, une fleur terminale formée par la soudure de deux fleurs voisines : cette fleur est plus grande qu'à l'ordinaire et presque régulière; son calice, sa corolle et ses étamines offrent, en fait de pièces, tous les nombres possibles, depuis le nombre « naturel » (cinq ou dix pièces?) jusqu'au double de celui-ci. Il serait superflu, d'après cette laconique description, de faire des hypothèses sur le mode de formation de cette monstruosité, attendu que la multiplication des pièces d'une fleur peut provenir de beaucoup d'autres phénomènes que d'une synanthie, et il ne ressort pas de la description que l'interprétation de A.-P. de Candolle soit la vraie.

Nous sommes en mesure, grâce à un heureux hasard, de compléter d'une façon satisfaisante la tératologie de la fleur des *Galeopsis*. Ce qu'il y a de plus intéressant à constater dans ces monstruosités, ce sont les déviations considérables que peuvent introduire des causes accidentelles dans l'œuvre de l'hérédité. Ces déviations peuvent sans doute être en partie considérées comme ataviques, mais le plus grand nombre d'entre elles sont bien les effets d'un désordre complet qui a régné dans le développement des verticilles, et ne peuvent être ramenées à des types ancestraux hypothétiques.

Il aurait été fort utile de jeter quelque lumière sur les causes de ces

Digitized by Google

déformations. Malheureusement nos observations ont été faites en grande partie en voyage, nous avons dû tailler en morceaux les individus possédant les fleurs les plus curieuses et les introduire dans un flacon d'esprit de vin pour les réétudier plus tard à loisir. Dans ces conditions, nous n'avons guère pu aborder les questions si difficiles de l'origine de ces monstruosités. A défaut des méthodes organogéniques ou autres, nous avons cependant pu refaire dans certains cas, par raisonnement déductif, la marche ou les principales phases de la marche que la fleur a dû suivre dans son développement.

Un fait sur lequel nous pouvons insister, c'est que les cas de pélorie, quelle que soit la région où ils se sont manifestés, n'étaient nullement limités à une fleur terminale, mais se produisaient sur des angles d'inclinaison très variés par rapport à l'horizon. C'est là un phénomène qui contredit la théorie de Peyritsch que nous avons mentionnée dans un précédent chapitre (p. 142).

Les échantillons étudiés ont été récoltés, le 3 novembre 1889, dans une forêt située au sud du village de Mauer, près de Heidelberg (Grand-Duché de Bade). La végétation phanérogamique avait en grande partie disparu depuis plusieurs semaines, tuée par les froids d'octobre. Dans une clairière seulement, les rayons du soleil, pénétrant entre les branches dépouillées de feuillage des hêtres, sont venus réveiller l'activité de la vie cellulaire chez certains individus d'une grande colonie de *G. Tetrahit*. A la base des verticillastres, dont les nombreux calices ont déjà presque tous perdu leurs nucules, il s'est formé de nouveaux bourgeons floraux. Le développement de ces bourgeons s'est accompli dans des circonstances toutes particulières. Il a été souvent interrompu par des abaissements de température considérables, dus à des pluies froides et persistantes. L'apport des matériaux nécessaires à l'accroissement des jeunes cellules, après leur division, s'est effectué également d'une façon spéciale, car certaines parties de la tige semblent être complètement mortes. Enfin, la position anormale de ces nouveaux bourgeons les a soumis, dès le début, à des systèmes de pression et de tension qui ont dû amener des changements considérables dans la symétrie florale.

Nous avons choisi, parmi de nombreuses modifications tératologiques, un

Digitized by Google

certain nombre de cas remarquables dont nous faisons suivre ici l'analyse. Ces types sont, en partie, reliés par des transitions, et nous avons étudié la plupart d'entre eux sur plusieurs fleurs [1].

1. Le calice est normal, mais à dents un peu moins longues que la moyenne; il est entièrement vert et les cordons n'y sont que peu visibles. La corolle est blanche, avec des parties jaunes, surtout au milieu des lobes; le labre est aplati; au labiole, les deux lobes latéraux et le moyen sont normaux, mais dépourvus d'apophyses. Les étamines, au nombre de quatre, sont rassemblées sous le labre corollaire. Les filets sont normaux et offrent une différenciation apicale, mais il n'y a pas de torsion. Les parois des anthères sont uniformément colorées en jaune brun, et ratatinées. Les loges sont entièrement vides. Les opercules, dépourvus de poils vecteurs, restent appliqués sur les utricules. Les deux ovaires sont divisés perpendiculairement par une cloison et contiennent des ovules bien conformés; toutefois ils présentent extérieurement une surface arrondie en cylindre et portent des poils multicellulaires et des glandes stipitées. Le style est terminal; c'est une épaisse colonne qui ne tarde pas à se diviser en deux branches recouvertes de tissus hyalins papilleux. L'une de ces branches est droite, l'autre est arquée et bilobée à l'extrémité.

Résumé : *Calice normal; épanodie de la corolle; stasimorphie et stérilité de l'androcée, stasimorphie générale du gynécée avec bifurcation d'une des branches du style.*

2. Le calice est normal, jaunâtre. La corolle est jaunâtre, mais rouge ou lavée de rose sur les bords et à la base des divisions. Le labre corollaire est creusé intérieurement en gouttière étroite; ses marges sont rectilignes. Le lobe moyen du labiole est également creusé en gouttière intérieurement; il est fort étroit et porte un petit appendice à droite, mais est dépourvu d'apophyses; les deux lobes latéraux sont bien développés. Les extrémités des quatre lobes sont placées sur un même plan perpendiculaire à l'axe de la fleur. Des quatre étamines, une seule a les loges de l'anthère atrophiées et ratati-

[1] Voy. sur la classification et la nomenclature des monstruosités : Masters, *Vegetable Teratology*, London, 1879; et Penzig, *Pflanzenteratologie*, t. I, pp. XI-XX. Gênes, 1890.

Digitized by Google

nées, les autres ont des parois turgescentes; toutes sont vides intérieurement. Il n'y a pas de différenciation apicale des filets, et, par conséquent, la torsion nécessaire pour amener les anthères à la position transversale n'a pas lieu. Les opercules sont dépourvus de poils vecteurs. Le style est gynobasique, d'un violet foncé. Les ovaires et les ovules sont normaux. Les étamines sont incluses et atteignent la base du lobe supérieur. Le style est saillant.

RÉSUMÉ : *Calice normal (chlorotique); épanodie de la corolle tendante à une pélorisation tétramère; stasimorphie de l'androcée avec stérilité partielle; gynécée normal.*

3. Le calice est normal, coloré en brun-pourpre foncé. La corolle possède quatre divisions non différenciées, égales, non épanouies, colorées en rouge brun foncé; absence d'apophyse au labiole dégénéré. Les filets des quatre étamines sont courts. Les loges anthériennes sont colorées en brun-pourpre. Les opercules n'ont point de poils vecteurs. Du reste, les étamines n'ont pas même dans leurs loges une fente de déhiscence et n'offrent ni torsion ni différenciation apicale du filet. Les loges ne contiennent pas de pollen. Les ovaires sont bien conformés, glabres, verts; les ovules sont normaux. Le style est allongé, un peu saillant hors de la corolle, hyalin et verdâtre.

RÉSUMÉ : *Calice normal; chromatisme accentué et pélorisation tétramère parfaite de la corolle; stasimorphie et stérilité de l'androcée; gynécée normal.*

4. La fleur est petite. Le calice est normal, mais à dents moins acuminées que d'ordinaire; il est vert en dedans, vert coloré de rose en dehors; les dents sont colorées en rouge-pourpre extérieurement. Le tube de la corolle est excessivement court. Les divisions de la corolle sont colorées en vert teinté de rose extérieurement, sauf les bords qui sont d'un rouge-carmin. Le labre est presque avorté; il est bien plus court que les lobes latéraux et moyen du labiole. Les sinus séparateurs des lobes corollaires sont abondamment fournis de longs poils multicellulaires. Les deux lobes latéraux sont plus grands que de coutume. Le lobe moyen du labiole est étroit, allongé, un peu émarginé à l'extrémité, frangé et creusé en profonde rainure sur la ligne médiane. La position oblique, par rapport à la

Digitized by Google

verticale, que le plan de symétrie de la corolle a prise sous l'influence de pressions latérales inégales, a fait dévier les deux lobes latéraux, l'un de 20° vers le bas, l'autre de 20° vers le haut. Une déviation correspondante s'observe de droite à gauche pour le labre, et de gauche à droite pour le lobe moyen du labiole, sans que l'on puisse attribuer aucune de leurs transformations à l'action déplacée de la pesanteur. Par contre, on pourrait peut-être (?) voir un effet de ce genre dans le fait que le lobe latéral, dévié de 20° vers le bas, est tourné vers le sol et est sensiblement plus grand que l'autre. Les étamines sont insérées assez bas dans le tube; leurs filets sont très courts; elles sont profondément incluses. Trois d'entre elles ont des loges jaunes et ratatinées. La quatrième a encore des parois turgescentes; toutes les quatre sont vides intérieurement. Les filets n'ont subi ni torsion, ni différenciation apicale. Les opercules sont dépourvus de poils vecteurs. Les deux ovaires ne sont pas divisés par une paroi transversale; ils sont verts et se prolongent dans deux branches du style, vertes également, épaisses, massives, courbées vers l'extérieur et arrondies au sommet.

Résumé : *Calice normal; corolle atteinte de virescence partielle, compliquée de l'atrophie du labre (apilarie), la distrophie des lobes latéraux, et l'ectopie du lobe moyen du labiole; stasimorphie et stérilité de l'androcée; stasimorphie du gynécée.*

5. Le calice est normal, mais atteint de chlorose. La corolle est entièrement verte; son tube est extrêmement long et étroit, rétréci au sommet, puis s'élargissant brusquement en dessous pour former une poche volumineuse. Cette poche porte le labiole; le labre se détache directement de la partie supérieure du tube. Le lobe moyen du labiole est plus grand que les autres, il est parallèle au labre et plus ou moins blanchâtre. Les étamines sont portées par de longs filets qui n'offrent ni différenciation apicale, ni torsion. Les loges des anthères n'offrent ni fente de déhiscence, ni poils vecteurs, ni différenciation en opercules et en utricules; elles ne contiennent pas de pollen; elles sont turgescentes et hyalines. Le style est à deux branches et gynobasique; les deux ovaires sont normalement cloisonnés et contiennent quatre ovules.

Résumé : *Calice normal (chlorotique); stasimorphie de la corolle, avec*

Digitized by Google

formation d'une poche au sommet du tube et ectopie du labre et du labiole ; stasimorphie et stérilité de l'androcée ; gynécée normal.

6. La fleur est petite et se rapproche de celle décrite sous le n° 5. Elle en diffère tout d'abord par une poche non volumineuse, se rapprochant beaucoup de la gorge du tube, telle qu'on la trouve dans les cas normaux. Ensuite, les lobes de la corolle sont absolument blancs et identiques les uns aux autres. Ils sont au nombre de quatre, arrondis au sommet et disposés en croix. Les étamines ont un court filet avec une ébauche de fente de déhiscence sur les loges anthériennes. Tout le reste est comme dans le n° 4.

Résumé : *Calice normal ; pélorisation tétramère parfaite de la corolle ; stasimorphie et stérilité de l'androcée ; stasimorphie du gynécée.*

7. Encore le même cas général que dans le n° 4, mais la corolle est très petite, avec un lobe latéral réduit et plus court que son homologue. Le style à deux branches est au contraire porté par deux ovaires normaux ; il est longuement saillant. Tout le reste concorde avec la description du n° 4.

Résumé : *Calice normal ; rachitisme de la corolle compliqué de la distrophie d'un lobe latéral et de l'ectopie du lobe moyen du labiole ; stasimorphie et stérilité de l'androcée ; gynécée normal.*

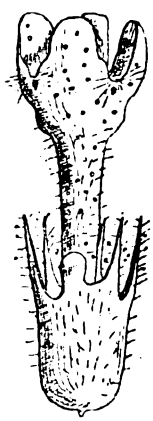


Fig. 44.
Pélorisation tétramère de la corolle avec hexamérie du calice chez le *G. Tetrahit*.

8. La fleur (fig. 44) est entourée de nombreuses bractéoles, dont l'une est soudée par un bord avec le calice entre le sépale impair postérieur et le latéral gauche. Entre les deux lobes calicinaux inférieurs apparait une

Digitized by Google

sixième pièce, de nature énigmatique, différente des autre pièces calicinales. Ces dernières sont longuement acuminées, tandis que celui-ci offre de chaque côté une concavité assez marquée, puis s'élargit vers le sommet en s'arrondissant. Cet appendice est conné sur une longueur un peu plus grande avec le sépale latéral inférieur gauche qu'avec le droit : il est possible, par conséquent, qu'il ne représente qu'un diverticulum formé à un âge très peu avancé du verticille. Toutes ces pièces sont vivement colorées en carmin foncé sur les bords; elles portent des glandes stipitées et des poils. Le corps même du calice est d'un vert jaunâtre, teinté çà et là de carmin. Sa forme se rapproche beaucoup plus du type campanulé que dans le calice normal. La corolle offre un long tube jaune, portant des glandes stipitées et des poils simples. Ce tube s'élargit bientôt en entonnoir bombé et porte quatre lobes égaux disposés en croix. Les lobes sont jaunes, parsemés de petites taches de carmin circulaires; ils sont arrondis au sommet. Les sinus séparateurs ovés sont vivement colorés de carmin à la base. Les lobes opposés étant parallèles, la tétramérie de la corolle est encore plus remarquable que celle des *Mentha* et des *Preslia,* car il n'y a pas même d'émargination au lobe supérieur; toutes les différenciations du labre, labiole, apophyses, etc., ont disparu. Le style est hyalin, peu divisé, surplombant deux ovaires cloisonnés à quatre ovules normaux. Les étamines entourent ce style en le surplombant un peu; les anthères sont portées par de longs filets, n'offrant ni différenciation apicale, ni torsion; elles offrent une fente de déhiscence et sont différenciées en utricules et en opuscules, mais sont dépourvues de poils vecteurs; elles contiennent quelques grains de pollen ratatinés.

Résumé : *Pleiophyllie des bractéoles, adhérence de l'une d'entre elles au calice; hexamérie du calice, avec ectopie de la sixième pièce supplémentaire; pélorisation tétramère parfaite de la corolle; stasimorphie et stérilité de l'androcée; gynécée normal.*

9. Le calice est normal, mais atteint de chlorose. La corolle est entièrement verte. Le tube en est long, les lobes sont repliés les uns sur les autres d'après la disposition quinconciale et sans différenciation aucune. Les quatre étamines sont égales, portées par des filets de longueur médiocre et ramassées sur les deux branches du style. Ces dernières sont largement ouvertes, lui-

Digitized by Google

santes, papilleuses, hyalines. Le style gynobasique surmonte un tétrachaine régulier, à ovules normaux. Des quatre étamines, les deux supérieures ont des filets qui ont subi une différenciation apicale, mais pas de torsion; leurs loges ne portent point de poils vecteurs, mais sont différenciées en opercule et en utricule, ce qui n'était pas le cas dans les numéros précédents. Les utricules sont actuellement vides, mais sur les bords des opercules enroulés en arrière, on aperçoit quelques grains de pollen normaux. Des deux étamines inférieures, celle de droite est dans le même état que les supérieures; celle de gauche porte sur ses opercules des poils vecteurs, elle a subi la torsion de 90° et les deux utricules contiennent un abondant pollen normal. Les filets des étamines sont très poilus. Le style porte des grains de pollen, et sur ses branches plusieurs ont germé et développé des boyaux.

Nous avons déjà parlé plus haut (p. 160), à propos de la biologie florale, de cette fleur, remarquable par sa signification physiologique probable, et qui n'est peut-être pas monstrueuse.

10. Le calice est coloré en brun-pourpre foncé. Le sépale supérieur est presque avorté, de même que le latéral gauche; on ne peut reconnaître leur position que par la présence des cordons qui devraient les desservir et qui aboutissent à deux petits mamelons. Les trois autres dents sont bien développées et rejetées à droite. La corolle se compose de quatre lobes. En bas, le lobe moyen est vert, papilleux, arrondi et indivis à son extrémité. Puis, à droite, on trouve un grand lobe, arrondi et finement frangé sur son pourtour; il est coloré en carmin foncé qui s'arrête net à la ligne qui rejoint les deux sinus séparateurs latéraux. A gauche, se trouvent deux petits lobes dont le supérieur recouvre l'inférieur; ils sont creusés en rainure intérieurement, et munis sur la côte dorsale correspondant à cette rainure, d'un volumineux faisceau libéro-ligneux, semblable à un cordon calicinal. Toutes ces pièces sont colorées en brun-pourpre, papilleuses, et ornées çà et là extérieurement de poils bitricellulaires. Le tube de la corolle est inclus. Les étamines incluses sont au nombre de quatre, à filets courts, insérés exactement sur le prolongement des sinus corollaires. Les anthères ont des loges volumineuses colorées en rouge-pourpre. Les tissus en sont turgescents et papilleux à la surface. Il n'y a ni différenciation apicale des filets, ni torsion,

Digitized by Google

par conséquent. Les loges elles-mêmes sont pleines, mais il n'y a pas eu formation de pollen; elles n'offrent ni fente de déhiscence, ni poils vecteurs. Les deux ovaires ne sont pas divisés par une cloison transversale et portent des ovules atrophiés. Ils sont verts et se prolongent dans deux styles également verts, épais, recourbés en dehors et arrondis au sommet. Les irrégularités de la corolle se trouvent expliquées par la position normale des étamines; elles consistent dans un développement exagéré du lobe latéral droit avec innervation évasée des filets libéro-ligneux; il y a alors rejet sur la gauche des deux lobes supérieurs, fondus en un seul, réduction de leurs dimensions avec nervation centrale; enfin, réduction de dimensions du latéral gauche avec nervation centrale.

Résumé : *Stasimorphie très avancée de la dent calicinale supérieure et de la latérale gauche; asymétrie générale de la corolle compliquée de la virescence et de la stasimorphie du lobe moyen inférieur, de l'hypertrophie, de l'ectopie et du chromatisme du latéral droit, de la stasimorphie et de la métatopie du supérieur et du latéral gauche; stasimorphie et stérilité de trois étamines, tandis que la quatrième est normale; stasimorphie et stérilité du gynécée.*

Fig. 45.
Pélorisation pentamère de la corolle avec sépalodie du lobe moyen antérieur et pentamérie de l'androcée chez le *G. Tetrahit*.

11. Le calice est très petit; ses cinq dents sont d'un brun-pourpre, tandis que le corps du calice lui-même est vert. Les deux dents latérales et les deux inférieures sont sensiblement plus courtes et moins saillantes. L'impaire postérieure est au contraire large, très proéminente et ornée sur les bords de denticules accessoires. Le calice tout entier est couvert de

Digitized by Google

nombreux poils simples et capités; il est rendu compliqué par la concrescence de plusieurs bractéoles. La corolle (fig. 45) présente une structure remarquable. Le labre n'existe plus; il est remplacé par deux lobes qui ne sont autres que les deux pétales supérieurs du diagramme normal. Ces deux lobes sont égaux, arrondis, teintés de carmin sur les bords et placés symétriquement à droite et à gauche du plan de symétrie de la fleur. Au-dessous, également symétriques, viennent les deux lobes latéraux, aussi teintés de carmin sur les bords. Enfin, vient l'impair inférieur qui est entièrement transformé en sépale. Il est lancéolé et terminé par une longue pointe très acuminée; il offre un cordon libéro-ligneux central moins accentué que dans le calice, il est vrai; il est vert dans sa partie élargie et d'un brun foncé vers l'extrémité. Outre les poils qu'il a en commun avec les autres lobes de la corolle, il possède de nombreuses glandes stipitées qui sont caractéristiques pour le calice et font ordinairement défaut aux autres verticilles dans les fleurs normales. L'androcée comporte cinq étamines, dont l'impaire postérieure correspond au rayon d'insertion du sépale impair du calice et vient se placer entre les deux lobes corollaires supérieurs. Les filets sont très courts, glabres, et n'offrent pas de différenciation apicale (pas de torsion, par conséquent). Les anthères sont vides, les tissus flasques, en partie desséchés et jaunes; les loges ne sont pas différenciées en utricule et opercule; elles offrent une ébauche de fente de déhiscence, mais pas de poils vecteurs. Le gynécée a subi des transformations remarquables. Les ovaires se présentent sous la forme d'un petit renflement, sans cloisons perpendiculaires et sans ovules, conné sur ses bords avec l'anneau du tube corollaire. Le renflement ovarien supporte deux colonnes concrescentes par le dos. L'une d'entre elles est légèrement infléchie vers l'extérieur et porte alors, sur une partie élargie, une loge anthérienne vide, flasque, sans fente de déhiscence et sans poils vecteurs. L'autre colonne s'aplatit peu à peu, perpendiculairement à sa ligne de suture, s'élargit graduellement de façon à former une lame verte qui dépasse l'autre colonne, puis se recourbe vivement à gauche pour se terminer en une pattelette rouge-pourpre, à contours arrondis. Cette lame porte latéralement de longs poils raides, composés de cinq à six grandes cellules.

Digitized by Google

RÉSUMÉ : *Rachitisme du calice ; pélorisation pentamère de la corolle, compliquée de la sépalodie du lobe moyen inférieur ; stasimorphie et stérilité de l'androcée; staminodie d'un des ovaires, épanodie et stasimorphie du second ovaire : tous deux stériles.*

12. Le calice est régulier, mais le tube est plus globuleux que d'ordinaire, rouge ; les cinq dents sont courtes, vertes, recourbées en dehors ; le tout est abondamment garni de poils et de glandes stipitées. La corolle comporte quatre lobes, tous roses, ou rouges à l'intérieur. Le supérieur est émarginé, non différencié en labre. Le latéral droit est très développé et de même taille que le supérieur. Le latéral gauche est très court et presque avorté. L'inférieur est presque parallèle au supérieur et aussi long que lui. Si l'on étudie le tube en partant des lobes, on voit qu'il commence d'abord à s'élargir graduellement sur un certain parcours, comme pour former une cloche, puis qu'il s'infléchit brusquement sur lui-même à gauche, de façon à donner une volumineuse gibbosité. La ligne d'enfoncement est marquée d'un trait coloré en pourpre foncé, tandis que le reste de la corolle est vert lavé de rose. Les quatre étamines sont incluses, ont des filets très courts qui n'offrent ni différenciation apicale, ni torsion. Les anthères sont vides, flasques, sans fente de déhiscence, sans poils vecteurs. Les ovaires, au nombre de deux, sans cloisonnement transversal, portent en lieu et place des styles deux proéminences en forme de bec, vertes, tournées en dehors et un peu poilues. Les ovules sont avortés.

RÉSUMÉ : *Calice normal; corolle soumise à une épanodie, compliquée d'ectopies désordonnées ; stasimorphie et stérilité de l'androcée ; stasimorphie épanodique et stérilité du gynécée.*

13. Le calice et normal, mais plus conique que d'ordinaire, d'un brun-pourpre, à cinq dents ordinaires, vertes vers le bas et pourpres aux extrémités. Corolle à quatre lobes, d'un brun-pourpre très foncé, couverts de poils blanchâtres uni- ou bicellulaires. Le tube, qui descend d'abord coniquement, se fait brusquement plus étroit et jaunâtre. Les lobes latéraux et l'inférieur sont égaux et portent sur leur face interne une vive tache blanche de chaque côté. Le supérieur est frangé à l'extrémité et poilu sur sa face interne. Les étamines sont remplacées par des staminodes caractéristiques

Digitized by Google

par leur absence de filet. Ils se composent de deux lobes qui représentent les deux loges des anthères normales. Entre chaque sinus des lobes de la corolle se trouve un de ces staminodes, auquel aboutit un assez large ruban libéro-ligneux. Outre ces quatre staminodes, on en voit un cinquième à la base du lobe supérieur de la corolle; il est déjeté un peu latéralement du côté gauche. Ce staminode, malgré sa position latérale, — position probablement due aux tractions mécaniques qu'il a subies pendant son développement, — est l'homologue de la cinquième étamine des pélories pentamères. Il présente vis-à-vis des autres une légère différence. Les quatre staminodes latéraux offrent des lobes à surface plissée dans le sens longitudinal; la surface des deux lobes du staminode impair est lisse et se fait en outre remarquer par son bichromatisme : la partie inférieure est d'un blanc mat, la partie supérieure est d'un jaune orangé foncé. Ces lobes sont desservis par un ruban libéro-ligneux spécial. A droite et à gauche de ce dernier se trouvent deux autres rubans qui passent dans le lobe supérieur de la corolle et s'y évasent en s'anastomosant. Un système d'anastomoses transversales entre les sept rubans principaux existe déjà, du reste, dans le tube de la corolle. A l'intérieur de la fleur, on trouve un tétrachaine absolument normal, portant un style gynobasique recourbé en avant, largement divisé en deux branches, ressemblant à un gros boyau blanc.

Résumé : *Calice normal; épanodie de la corolle tendante à la pélorisation tétramère*; *apparition à l'androcée d'une cinquième pièce postérieure impaire avec réduction de toutes les pièces à des staminodes lobés; gynécée normal.*

14. Le corps du calice est normal, coloré en rose. Les cinq dents sont plus courtes qu'à l'ordinaire, vertes, abondamment pourvues de poils et de glandes. La corolle est tétramère, actinomorphe, verte à l'intérieur et rose vers l'extrémité des lobes; tous les lobes sont arrondis et égaux, portant quelques glandes stipitées. Dans chaque sinus séparateur se trouve une anthère, incluse, sans filet; les anthères sont droites, ont une ébauche de fente de déhiscence, sont dépourvues de poils vecteurs, les unes vides et ratatinées, les autres un peu turgescentes, mais toutes dépourvues de pollen. Les deux ovaires ne sont pas cloisonnés par une paroi transversale; les ovules sont avortés, le style a pris la forme décrite au n° 12.

Digitized by Google

RÉSUMÉ : *Calice normal; pélorisation tétramère et virescence partielle de la corolle ; stasimorphie avancée et stérilité de l'androcée ; stasimorphie épanodique et stérilité du gynécée.*

15. Le calice est entièrement normal, à dents très allongées et longuement acuminées. Le tube de la corolle est très court, très renflé. Les lobes sont courts, au nombre de cinq. Le cinquième est réduit, il est inséré à gauche du lobe impair inférieur qui n'est pas différencié comme d'ordinaire. On peut donc le considérer, soit comme une vraie pièce corollaire réduite et concrescente avec le lobe moyen inférieur, soit encore comme un diverticulum de ce dernier. Cette dernière interprétation est la vraie, car l'étamine inférieure gauche ne se trouve point insérée entre le lobe en question et le lobe moyen inférieur, comme cela devrait être le cas si nous avions affaire à une vraie pièce corollaire, mais bien entre ce dernier et le lobe latéral. Il ne représente, par conséquent, aucun des cinq lobes du diagramme normal, mais simplement un diverticulum latéral gauche du lobe impair inférieur. Les quatre étamines ont des filets très courts, sans différenciation apicale ni torsion, à anthères vides, sans fentes de déhiscence, sans poils vecteurs. Les ovaires sont très développés, fort papilleux et entièrement couverts, en outre, de longs poils multicellulaires. Ces ovaires atteignent la hauteur des lobes de la corolle; ils sont dominés par un style gynobasique, recourbé en avant et terminé par deux branches verticales situées sur le prolongement l'une de l'autre. Les ovaires sont fortement gibbeux du côté extérieur; les deux achaines antérieurs sont bien plus développés que les postérieurs. La branche inférieure du style est velue à l'extrémité.

RÉSUMÉ : *Calice normal; tétramérie plus ou moins pélorique de la corolle, avec ramification latérale du lobe moyen ; stasimorphie et stérilité de l'androcée; hypertrophie du gynécée.*

16. Le calice est régulier, coloré en brun-pourpre. La corolle a un tube très court, plus court que les dents calicinales. Les quatre lobes sont tous d'un rouge-brun, sauf le supérieur qui est un peu jaunâtre. Ils sont creusés en gouttière à leur face intérieure, dépassent peu les dents calicinales, sont papilleux, égaux entre eux, parallèles, et n'offrent aucune espèce de diffé-

Digitized by Google

renciation. Des quatre étamines, les deux supérieures sont concrescentes avec le tube de la corolle, et à filets très courts; les loges anthériennes sont flasques, ne contiennent pas de pollen, sont dépourvues de fentes de déhiscence et de poils vecteurs. Les deux inférieures offrent des loges qui sont dans le même état que les supérieures, mais elles ne sont pas soudées au tube de la corolle. Leur filet est trois à quatre fois plus long que celui des étamines supérieures, et elles sont concrescentes avec l'ovaire inférieur par la base. Les deux ovaires ne sont pas cloisonnés transversalement : ils sont globuleux à la base et se prolongent en une courte colonne qui bientôt se divise en deux lobes foliacés aplatis, lancéolés et longuement acuminés. Chacun d'eux est parcouru par un cordon central; ils sont couverts de poils et de glandes stipitées, tandis que les ovaires eux-mêmes sont glabres. Les ovules sont avortés (fig. 46).

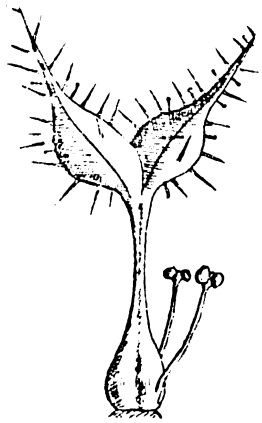


FIG. 46.
Sépalodie des carpelles chez le *G. Tetrahit*.

RÉSUMÉ : *Calice normal; pélorisation tétramère et chromatisme hétérologue de la corolle; stasimorphie générale et stérilité de l'androcée; concrescence des deux étamines inférieures avec le carpelle inférieur et adesmie de ces deux étamines d'avec la corolle; stasimorphie et stérilité du gynécée avec sépalodie des carpelles dans leur partie supérieure.*

17. Le calice est anormal, rouge, à cordons primaires et cordons de ceinture bien marqués. Les dents sont au nombre de quatre; la cinquième (l'impaire postérieure) fait défaut. A sa place, on trouve une profonde lacune,

Digitized by Google

de chaque côté de laquelle descend un faisceau libéro-ligneux. La dent n'est indiquée au fond de la lacune par aucune protubérance, le sinus est absolument arrondi. La corolle a un tube court, quatre lobes non différenciés, très étroits et colorés en rouge-brun-pourpre foncé. Les quatre étamines ont des filets très courts, sans différenciation apicale, sans torsion; les anthères sont dépourvues de fente de déhiscence, elles n'ont pas de poils vecteurs; elles ne contiennent pas de pollen. Les ovaires, les ovules et le style sont normaux.

Résumé : *Avortement de la pièce impaire postérieure du calice; pélorisation tétramère de la corolle; stasimorphie et stérilité de l'androcée; gynécée normal.*

18. Le calice a un tube étroit et atteint de chlorose; les cinq dents, colorées en brun-pourpre foncé, sont pleuridiées, c'est-à-dire qu'elles portent, les unes d'un côté seulement, les autres des deux côtés, un ou plusieurs appendices secondaires dans lesquels se rend un faisceau libéro-ligneux détaché du cordon central de la dent. Les dents du calice sont en partie soudées avec de nombreuses bractéoles dont elles sont entourées comme d'un involucre. Une des dents est atteinte de chlorose, pétaloïde, parsemée seulement çà et là de petites taches pourprées. Elle porte seulement des poils, tandis que les dents voisines portent des poils et des glandes stipitées. Elle est dépourvue de cordon central, arrondie à l'extrémité, creusée en gouttière sur sa face intérieure, et porte sur un des côtés un petit diverticulum arrondi. Des quatre lobes de la corolle, trois sont virescents; ils sont assez grands, égaux entre eux et largement arrondis à l'extrémité. Le quatrième (supérieur) est représenté seulement par une petite proéminence rose et couverte de poils, située au milieu du sinus séparateur des deux lobes latéraux. Deux des quatre étamines sont libres (les inférieures). Les deux autres alternent avec le lobe atrophié et sont soudées ensemble pour former une synandrie. La pièce ainsi engendrée est un peu plus large que le tube corollaire atrophié; elle est glabre et séparée du tube de la corolle sur toute sa longueur. Elle supporte cinq pièces plus petites. A gauche et à droite, ce sont les deux anthères, comprenant chacune deux loges. Toute torsion étant impossible, les loges sont parallèles; elles offrent bien une fente de déhiscence, mais ne

Digitized by Google

sont point différenciées en utricule et opercule, et ne portent pas de poils vecteurs. Leurs tissus sont flasques, et elles sont vides. Entre ces deux anthères apparaît une cinquième pièce impaire; cette pièce, rétrécie à son point de naissance, s'élargit bientôt en massue; elle est d'un rouge sale comme les deux anthères et offre une surface papilleuse, sans différenciation aucune. Cette pièce n'est autre chose que l'équivalent de la cinquième étamine du diagramme pélorique. Les deux ovaires sont vides, n'offrent pas trace de cloisonnement transversal et se fondent en une courte colonne droite qui, au lieu de deux styles, porte deux folioles. Ces deux folioles sont parcourus par un cordon central, mais les cordons latéraux sont rudimentaires. La forme générale des deux folioles est ovée; ils sont atteints de chlorose, tachetés de carmin çà et là, et parsemés de poils simples et capités.

Résumé : *Concrescence du calice avec des bractéoles, pleuridisation asymétrique des dents calicinales et pétalodie de l'une d'entre elles; virescence et épanodie tétramère de la corolle, compliquée de l'atrophie de la pièce supérieure; pentamérie générale de l'androcée, concrescence des trois étamines supérieures en une synandrie distincte, stasimorphie et stérilité des quatre anthères inférieures, et avortement complet de l'anthère dans l'étamine impaire supérieure; phyllodie et stérilité du gynécée.*

19. Ici nous ne trouvons plus de distinction entre le calice et la corolle. Ces deux verticilles sont remplacés par un périanthe unique, replié vers l'intérieur de la fleur à tous les sinus séparateurs des lobes, et formant un arc irrégulier. En commençant par la première pièce gauche latérale 1, nous trouvons une dent pourvue d'un cordon médian fortement accentué : c'est une vraie dent calicinale. La pièce 2 est une dent affectant aussi la forme de celles du calice, mais sensiblement plus courte et moins longuement acuminée; elle est parcourue par un cordon central qui est loin d'offrir la vigueur des cordons du calice normal. La pièce 3 est presque deux fois plus large à la base que la précédente; elle porte d'un côté une pleuridie obtuse et de l'autre côté deux diverticulums arrondis. Le cordon central très accentué qui parcourt cette pièce jusqu'à son extrémité longuement acuminée, envoie des ramifications dans ces trois embranchements secondaires.

Digitized by Google

La pièce qui suit, et qui a aussi la forme d'une dent calicinale, semble, au premier abord, avoir la même structure que la précédente et porter sur un côté un diverticulum aigu. Mais ce diverticulum, au lieu d'être attaché à son organe mère par un cordon libéro-ligneux secondaire, offre, sous ce rapport, une indépendance complète. Il est desservi par un gros cordon qui descend tout le long du tube de la corolle, parallèlement à celui de la pièce 3. Nous considérons donc le pseudo-diverticulum en question, non comme une pleuridie, mais comme une pièce de premier ordre, concrescente avec le n° 4 et auquel nous attribuons le n° 5. La pièce 6 a la forme et la structure d'une dent calicinale, ainsi que la pièce 7. Entre les pièces 7 et 8, le tube du périanthe forme un pli dirigé vers l'intérieur, pli beaucoup plus volumineux que ceux relevés entre les pièces précédentes. Sur ce pli vient s'insérer une étamine à filet court, sans différenciation apicale, sans torsion; les loges de l'anthère ont des fentes de déhiscence, mais ne sont pas différenciées en utricule et en opercule : elles n'ont pas de poils vecteurs et ne contiennent pas de pollen; leurs parois sont flasques et papilleuses. La pièce 8 est pétaloïde et large; ses bords vont d'abord en divergeant pour se réunir ensuite en décrivant un arc régulier; elle est un peu bombée au sommet. La pièce n° 9, qui suit, est une dent très longue, sépaloïde; elle est parcourue par un cordon central, très vigoureux, qui s'aplatit peu à peu en ruban à la base de la dent. Enfin, la dernière pièce, n° 10, est pétaloïde, analogue au n° 8, mais légèrement plus étroite et moins longue; elle porte, insérée au-dessous du sinus plissé qui la sépare de la pièce n° 1, une étamine conformée exactement comme la précédente. Les plis situés à droite et à gauche de la pièce n° 9 ne sont pas plus proéminents que leurs voisins inférieurs, mais ils se rapprochent l'un de l'autre au-dessous de la pièce jusqu'à se toucher. C'est sur ces deux plis que vient s'insérer une grosse colonne aplatie, provenant de la réunion de deux filets d'étamines, et qui porte, en effet, quatre loges anthériennes rapprochées par paires et adossées les unes aux autres. Ces loges sont dans le même état de développement que les précédentes. Plus bas, la colonne se réunit avec le tube du périanthe; un volumineux ruban la remplace alors et descend jusqu'au réceptacle. Au centre de la fleur, on trouve deux ovaires aplatis, contenant des ovules

Digitized by Google

rudimentaires; les ovaires ne sont pas cloisonnés complètement; ils sont surmontés par deux petits crochets divergents, qui représentent les deux lobes du style. Le tube du périanthe est plutôt court, et toute la fleur est d'une couleur assez sombre.

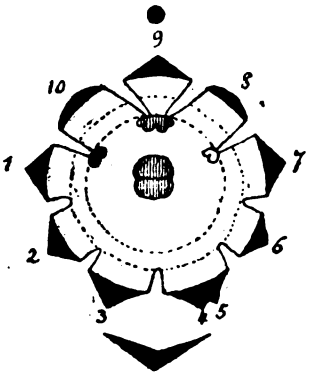


FIG. 47.
Diagramme d'une fleur de *G. Tetrahit* à périanthe monocyclique décamère.

Cette monstruosité est la plus remarquable de toutes celles qui nous sont connues chez les Labiées. Elle est si régulière qu'il est facile de la rattacher au type normal par une explication qui est la seule possible et qui s'impose si l'on approfondit le diagramme que nous en avons donné à la figure 47. Les deux verticilles extérieurs, au lieu de naître l'un après l'autre, sont nés presque simultanément. Si l'on suppose que, à ce moment, les pièces du calice ont subi de l'extérieur une vive pression, l'effet produit a dû être de les repousser entre les pièces de la corolle. L'anneau de soulèvement des pièces de la corolle a dû alors se confondre avec celui du calice pour emporter simultanément les pièces de ces deux verticilles : on obtient de la sorte un périanthe unique. Le nombre des pièces insérées sur un cercle étant de dix au lieu de cinq, et la place manquant pour leur entier déploiement, il en est résulté une quantité de plis, formés par le tube du périanthe, et dirigés vers le centre de la fleur. Ces plis sont au nombre de neuf et non de dix, réduction due à la concrescence exagérée des pièces 4 et 5; ils sont surtout remarquablement longs sur la voûte dorsale du tube, et c'est naturellement le long de ces plis que s'est opérée la concrescence du périanthe et des étamines, dont les deux latérales supérieures sont même adelphiques. La

Digitized by Google

sépalodie des trois lobes inférieurs de la corolle résiste naturellement à toute tentative d'explication.

RÉSUMÉ : *Concrescence générale des pièces du calice et de la corolle pour former un périanthe unique à dix pièces ; cette concrescence est évidemment due à la métaphérie centripète des pièces calicinales ; concrescence presque complète du sépale inférieur droit avec le pétale impaire ; concrescence des deux étamines supérieures entre elles et avec la ligne de suture des plis provenant des sépales postérieurs gauche et droit avec le sépale impaire ; sépalodie du pétale inférieur gauche ; sépalodie du pétale inférieur droit ; sépalodie du pétale impaire ; stasimorphie et stérilité de l'androcée ; stasimorphie et stérilité du gynécée.*

20. Le calice est frappé de chlorose ; il est dépourvu de cordon de ceinture : ce fait est en relation avec la structure particulière que nous présente ce verticille. La partie supérieure se compose de deux grandes dents acuminées, traversées chacune par un cordon libéro-ligneux central et soutenues par deux cordons latéraux qui courent le long de leurs marges extérieures. Séparées par deux profonds sinus, viennent ensuite les deux dents latérales inférieures qui sont sensiblement plus courtes et pleuridiées sur les côtés. La dent impaire est avortée ; à sa place, on trouve une petite proéminence mucronée qui sépare les dents latérales, et dans laquelle viennent se terminer les cordons secondaires internes de ces dernières dents. La corolle est blanche, à tube court, à lobes tous égaux, arrondis, disposés suivant le type tétramère. Les quatre étamines postérieures ont des filets dépourvus de différenciation apicale et de torsion. Les loges n'ont ni fente de déhiscence, ni poils vecteurs, ni pollen. L'ovaire comprend deux carpelles sans ovules, sans cloisons transversales.

RÉSUMÉ : *Calice chlorotique dépourvu de cordon de ceinture ; atrophie de la dent calcinale impaire, rachitisme et pleuridisation des pièces calcinales latérales inférieures ; péiorisation tétramère de la corolle ; stasimorphie et stérilité de l'androcée et du gynécée.*

21. Toutes les pièces des verticilles de cette fleur sont vertes, parsemées de taches de carmin, et garnies, en médiocre quantité toutefois, de poils simples et de glandes stipitées. Extérieurement, nous trouvons un calice

Digitized by Google

composé de cinq pièces foliacées, parcourues chacune par une nervure médiane. Toutes sont libres jusqu'à la base. Alternant avec celles-ci, on voit cinq pièces foliacées, à nervure médiane moins forte, et libres jusqu'à la base : ce sont les pièces de la corolle. L'androcée se compose de cinq pièces foliacées alternant régulièrement avec les précédentes, mais beaucoup plus petites. Leur nervure médiane est peu accentuée ; elles sont longuement pétiolées et libres jusqu'à la base. Enfin, présentant des surfaces perpendiculaires au plan de symétrie de la fleur, on trouve deux feuilles minuscules, glabres, possédant une nervure centrale et réunies à la base en une petite colonne : ce sont les carpelles.

Résumé : *Desmodie et phyllodie générales et parfaites de tous les éléments de la fleur ; pentamérie du verticille staminal.*

22. Le calice est normal ; ses cinq dents sont d'un rouge-pourpre. La corolle possède quatre lobes égaux, étroits. Les étamines sont au nombre de cinq ; les deux inférieures sont complètement libres, leur long filet parcourant tout le tube ; leurs loges anthériennes sont concrescentes en un seul corps, vides, dépourvues de poils vecteurs ; les filets sont dépourvus de différenciation apicale. Les trois étamines supérieures forment une monadelphie ; c'est une lame large, glabre, réunie avec le lobe supérieur de la corolle à la base de celui-ci, et qui, vers son sommet, se divise en trois bras. Les deux bras latéraux portent chacun deux loges anthériennes, qui n'ont naturellement pas subi de torsion ; elles sont dépourvues de poils vecteurs et de fente de déhiscence. Le bras médian porte une anthère dans laquelle les deux loges sont fondues en une seule, avec fente de déhiscence médiane rendue verticale par l'absence de torsion ; il n'y a pas de différenciation apicale au bras médian ; cette loge unique ne porte pas de poils vecteurs. Au centre de la fleur se trouvent deux feuilles concrescentes par leurs pétioles : l'une est plus grande et porte une dent de chaque côté ; l'autre, la plus petite, est entière : ce sont les deux feuilles carpellaires (fig. 48).

Fig. 48.
Phyllodie du gynécée chez le *G. Tetrahit*.

Digitized by Google

RÉSUMÉ : *Calice normal; pélorisation tétramère de la corolle; pentamérisation de l'androcée; adesmie des filets des deux étamines inférieures et fusion de leurs loges en une seule qui est stasimorphique et stérile; concrescence des trois étamines supérieures en une monadelphie à trois bras terminaux; stasimorphie et stérilité des loges sur les deux bras latéraux; réunion des deux loges du bras médian en une seule qui est stasimorphique et stérile; phyllodie et stérilité conséquente du gynécée.*

23. Le calice et la corolle sont concrescents, mais, cette fois, non plus en un seul verticille comme au n° 68, mais en formant une spire (fig. 49).

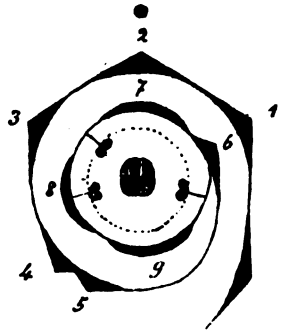


FIG. 49.
Diagramme d'une fleur de *G. Tetrahit* présentant un spirolsme du calice et de la corolle par concrescence.

Le calice comporte cinq pièces, de même que la corolle, de sorte que le passage du calice à la corolle s'opère entre le sépale latéral droit et le pétale latéral droit. Le calice proprement dit porte d'abord trois dents normales garnies de poils simples et capités. Puis vient une pièce terminée par deux pointes et parcourue par deux cordons parallèles. Entre ces deux cordons primaires, on n'aperçoit pas de cordons secondaires; ce sont deux sépales concrescents. Les cordons primaires et secondaires de toutes ces pièces sont réunis par un cordon de ceinture. Ce cordon de ceinture vient encore recevoir les deux cordons secondaires qui suivent la pièce double dont nous venons de parler. Ici commence le second tour de spire avec une pièce volumineuse qui, dans la fleur, forme le lobe supérieur de la corolle. Ce lobe porte à gauche une dent qui, par un bord ondulé, va rejoindre la pièce double du calice. Le cordon de ceinture en remonte le bord sur un tiers de sa longueur, puis il descend brusquement rejoindre le cordon primaire de

Digitized by Google

la dent, qui la parcourt jusque près du sommet. Tout en ayant la forme d'une dent, cette pièce n'est autre que le lobe latéral gauche de la corolle, frappé de sépalodie, et concrescent avec le lobe supérieur de la corolle sur toute sa longueur. La seconde partie du gros lobe est formée par un véritable pétale arrondi et légèrement pleuridié au sommet, dans lequel s'innerve un système de nervures pétaloïdes, c'est-à-dire presque dépourvues de tissus mécaniques et très finement anastomosées. C'est au milieu de ce pétale, vers sa base, que vient s'insérer la dernière pièce portée par le second tour de spire; la spire est par conséquent fermée. Dans le sinus qui sépare la pièce 6-7 de la pièce 8, se trouve une étamine à filet extrêmement long, à loges anthériennes sans fente de déhiscence, sans pollen, sans poils vecteurs, n'ayant pas subi de torsion. Le lobe 8 est arrondi et porte à sa base, au milieu, une étamine semblable à la précédente, mais supportée par un filet plus court et plus épais. Le sinus largement arrondi situé entre les nos 8 et 9 n'héberge aucune étamine. Le dernier lobe (9) est assez large et émarginé au sommet; il porte à son point de jonction avec la pièce 7 une étamine semblable aux précédentes, à long filet. Au centre, on trouve deux carpelles bien orientés, à cloisons transversales normales, contenant quatre ovules bien conformés, le tout surmonté d'un style gynobasique longuement saillant. Cette monstruosité remarquable n'est pas absolument nouvelle pour les Labiées, M. Magnus en a déjà signalé un cas analogue chez le *Salvia Candelabrum* Boiss., mais incidemment et sans le décrire [1].

Résumé : *Spiroïsme du calice et de la corolle par concrescence; concrescence des deux pièces calicinales inférieures; sépalodie du pétale latéral droit, et concrescence de ce dernier avec le pétal supérieur droit; suppression de l'étamine supérieure droite et fusion des deux lobes corollaires supérieurs en un seul, à nervure médiane unique; métaphérie de l'étamine inférieure gauche contre le pétale latéral gauche; stasimorphie et stérilité de l'androcée; gynécée parfaitement normal.*

24. Le calice est entièrement pétalodisé; tous les lobes sont arrondis et passablement épais; les trois supérieurs sont sensiblement plus grands que les deux inférieurs, dont un présente un prolongement singulier en forme de

[1] Magnus. in *Verhandl. des bot. Ver. der Prov. Brandenburg*, XVIII, p. 92, 30 jun. 1876.

Digitized by Google

bec. Le système des nervures offre un mélange intéressant des deux genres de disposition, tels qu'on les trouve réalisés dans la corolle et dans le calice normaux. En effet, la répartition des nervures dans les lobes du verticille que nous étudions est entièrement celle de la corolle. On distingue un tronc central qui va en s'amincissant jusque près du bord du limbe, et porte à droite et à gauche des branches latérales plus ou moins longues et plus ou moins ramifiées. Outre cela, on distingue parfois des troncs secondaires parallèles aux bords du lobe. Or, nous avons vu que, dans le tube du calice normal, on trouve cinq cordons primaires qui partent de la base du tube pour aboutir à l'extrémité des cinq dents; qu'un cordon de ceinture, courant sous les sinus séparateurs des dents, relie ces cinq cordons primaires; enfin, que cinq cordons secondaires partent de la base pour aboutir dans le cordon de ceinture au-dessous de chaque sinus séparateur. Ici cet ordre n'est point observé. Les cordons primaires ne se distinguent guère des autres et s'arrêtent sur deux des lobes au cordon de ceinture, tandis qu'ils pénètrent directement dans les trois autres. Dans tous les segments correspondant aux lobes, les cordons secondaires sont disposés irrégulièrement : ici il y en a deux, là trois, ailleurs quatre. Une conséquence de cette irrégularité, c'est la disposition désordonnée du cordon de ceinture qui se compose d'une série de petits arcs montants et descendants, inégaux. Ce calice pétaloïde ne porte ni glandes, ni poils. A l'intérieur, on trouve une corolle à cinq lobes, dont les deux supérieurs seuls sont bien développés, tandis que les trois inférieurs sont très atrophiés. Dans les cinq sinus se trouvent cinq étamines, sans différenciation apicale, sans torsion, à anthères dépourvues de pollen, de fentes de déhiscence et de poils vecteurs. Au centre, les deux carpelles sont transformés en deux feuilles nerviées, portant des glandes stipitées.

Résumé : *Pétalodie du calice, avec nervation pétaloïde des lobes et nervation imparfaitement calicoïde du tube ; atrophie des trois lobes inférieurs de la corolle ; pentamérisation, stasimorphie et stérilité de l'androcée ; phyllodie et stérilité du gynécée.*

25. Le calice possède ses cinq sépales libres jusqu'à la base; il est entouré d'un involucre de bractéoles. La corolle est entièrement pélorisée (fig. 50); elle est glabre, d'un blanc rosé, à lobes égaux, plus étroits à la base qu'au

Digitized by Google

sommet où ils sont tous élégamment et également marginés. Dans chaque sinus vient se placer une étamine. Les cinq étamines sont égales, à filets de longueur moyenne, mais sans différenciation apicale; les anthères sont droites, dépourvues de poils vecteurs, de fentes de déhiscence et de pollen. Les carpelles sont entièrement avortés et représentés par deux petits mamelons au fond du tube corollaire.

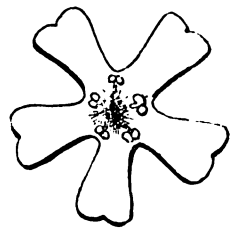


FIG. 50
Pélorisation pentamère parfaite de la corolle et de l'androcée chez le *G. Tetrahit*.

RÉSUMÉ : *Adesmie des pièces calicinales ; pélorisation pentamère parfaite de la corolle ; pentamérisation de l'androcée, compliquée de stasimorphie et de stérilité ; atrophie complète du gynécée.*

26. La disposition du calice et de la corolle est la même qu'au n° 23, seulement toutes les pièces de la corolle, qui sont au nombre de cinq, sont pétaloïdes. En outre, on trouve à l'androcée cinq étamines; l'impaire postérieure est libre, fixée à la base du tube, les autres sont concrescentes avec le tube de la corolle. Les loges contiennent de rares grains de pollen, mais les filets n'ont ni différenciation apicale, ni torsion; de plus, il n'y a ni loges, ni fente de déhiscence, ni poils vecteurs. Au centre, on trouve deux carpelles courts, munis chacun d'un crochet velu qui représente les deux stigmates, à ovules rudimentaires.

RÉSUMÉ : *Spiroïsme par concrescence du calice et de la corolle ; pentamérisation de l'androcée avec stasimorphie et stérilité ; adesmie de l'étamine impaire supérieure ; stasimorphie et stérilité du gynécée.*

27. La singulière monstruosité que nous étudions ici en dernier lieu, a été observée sur le même *G. dubia* var. *dubia*, qui nous a présenté les feuilles chorisées examinées dans un chapitre précédent. Toutes les parties inférieures de la plante sont régulières. Brusquement, à un verticillastre normal, en

Digitized by Google

succède un anormal. Dans ce verticillastre, les deux cimes sont placées à l'aisselle de feuilles chorisées; mais tandis que les fleurs de l'une sont typiquement disposées et organisées, l'autre ne présente que cinq fleurs, parmi lesquelles les quatre inférieures seules sont normales. La fleur médiane, qui est la première d'une cime bipare, présente comme première particularité une orientation diagonale de son plan de symétrie. L'observateur étant placé dans l'axe de la tige et tourné vers la feuille mère de la cime, le labre corollaire se trouve placé à droite et la partie inférieure de la fleur à gauche. Le plan de symétrie descend donc en biais de droite à gauche. Le calice tubuleux, vert et couvert de poils et de glandes stipitées, porte six dents dont trois sont opposées au labre corollaire et trois aux parties inférieures de la corolle; la nervation du tube calicinal, sauf l'augmentation due à la dent surnuméraire, n'offre rien que de normal. La corolle est la partie la plus singulière de cette fleur. Le labre a la forme ordinaire d'un casque; le bord terminal en est relevé et découpé en six pleuridies irrégulières et aiguës au sommet. Au lieu d'un labiole, nous en trouvons deux, symétriquement disposés à droite et à gauche de l'axe de symétrie de la fleur, et réunis à leur partie basilaire. Le labiole de droite possède un lobe latéral et une apophyse à droite, et celui de gauche un lobe latéral et une apophyse à gauche, mais il n'y a pas de lobes dans le sinus séparateur des deux labioles; les lobes latéraux sont normaux. C'est sur les deux apophyses médianes que s'opère la réunion des deux labioles; les deux invaginations forment donc un corps bombé unique, exactement médian. Les lobes médians des deux labioles sont entièrement conformés comme dans les fleurs normales. L'androcée comporte cinq étamines au lieu de quatre; la cinquième est située à droite; son filet est libre sur sa longueur presque entière; elle vient s'attacher au fond du tube en un point situé sur la ligne de jonction des deux labioles. Les anthères de toutes ces étamines ont la structure ordinaire et sont garnies de pollen bien constitué. Les nucules sont au nombre de huit, correspondant à quatre carpelles. Le style est terminé par quatre branches. Enfin la course des faisceaux libéro-ligneux dans le tube est parfaitement normale (fig. 51).

Il est impossible d'indiquer la valeur morphologique de ces différentes formations : un seul fait est certain, c'est que nous avons affaire ici à une

Digitized by Google

fleur unique; la disposition rigoureusement régulière du système libéro-ligneux de la corolle et des quatre étamines normales, exclut toute espèce de synanthie. Nous croyons constater, pour la première fois, la production de plusieurs labioles dans la famille des Labiées. Des monstruosités analogues ont été signalées chez les Orchidées par Morren, sous le nom de *cheilomanie,* mais le labelle des Orchidées et le labiole des Labiées n'étant nullement homologues, nous préférons à ce terme celui de *bilabiolie* ou *plurilabiolie,* qui exprime exactement le phénomène.

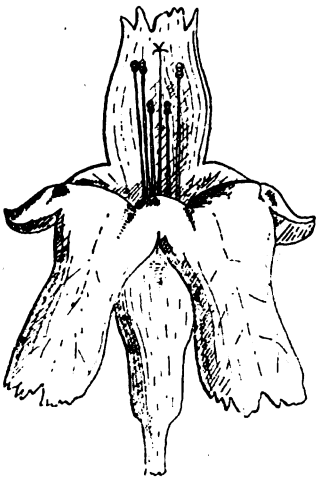


FIG. 51.
Bilabiolie de la corolle chez le *G. dubia.*

RÉSUMÉ : *Orientation diagonale de droite à gauche de l'axe de symétrie floral; hexamérie du calice; bilabiolie de la corolle; pentamérie métaschématique de l'androcée et adesmie de la cinquième étamine d'avec le tube corollaire; tétramérie du gynécée, avec quatre branches au style et huit nucules.*

CHAPITRE XXVI.

CONCLUSIONS.

L'étude monographique des appareils végétatif et floral dans le genre *Galeopsis* nous a fourni, dans une très large mesure, les données générales que nous désirions avoir pour base dans nos recherches d'anatomie comparée chez les Labiées.

Digitized by Google

Tout d'abord, la possibilité d'établir une série de systèmes histologiques basés sur la structure et sur la fonction des éléments, nous paraît parfaitement claire. Ce point est important, attendu qu'une classification histologique disposée d'après cette méthode, facilite au plus haut degré l'étude des végétaux. Poursuivant parallèlement la différenciation histologique et la division du travail physiologique, on fait pour ainsi dire la synthèse de la morphologie et de la physiologie. Les avantages de cette méthode sont tels qu'en zoologie elle est universellement admise; nous ne voyons aucune raison pour n'en pas faire autant en botanique.

Mais il s'en faut de beaucoup que les éléments constituants des divers systèmes dans les différents membres soient toujours homologues, ou morphologiquement équivalents dans un même membre. Il existe, par exemple, dans la tige des *Galeopsis,* des colonnes de collenchyme angulaires sous-épidermiques; ces colonnes forment un important appareil de soutien : elles appartiennent au système mécanique. A la limite externe des faisceaux libéro-ligneux du sous-genre *Tetrahit*, il existe aussi, au moins à un certain âge, des plaques de collenchyme; les éléments de ces plaques se développent et ont une structure définitive analogue à celle des éléments des colonnes sous-épidermiques, ils protègent et soutiennent le liber : ils appartiennent donc aussi au système mécanique. Mais l'origine, l'évolution et la position qu'ils occupent vis-à-vis des systèmes environnants sont complètement différentes dans les deux tissus. Nous avons donc un exemple dans lequel la similitude de fonctions entraine la similitude de structure, alors que la valeur morphologique primitive des éléments était bien différente.

Renoncerons-nous pour cela à l'établissement de systèmes basés sur la structure et sur la fonction?

Évidemment non, et pour deux raisons. La première, c'est que les avantages offerts par la méthode des systèmes fonctionnels et structuraux sont amplement suffisants pour balancer les inconvénients qu'amène la séparation des tissus de même valeur morphologique, ou la réunion de tissus ayant une valeur morphologique différente. La seconde, c'est qu'il s'en faut de beaucoup que les questions d'homologie et d'équivalence morphologique soient toutes résolues au point de permettre l'établissement d'un schéma de classification

Digitized by Google

applicable à la première dicotylée venue; nous en sommes même encore si loin que, dans bien des cas, les interprétations que l'on fait ne peuvent avoir que la valeur d'un point de vue individuel.

Par conséquent, si nous avions à choisir entre les deux conceptions, l'une qui synthétise l'anatomie et la physiologie, la seconde qui les isole entièrement l'une de l'autre, c'est, à l'inverse de M. Strasburger [1], à la première que nous donnerions la préférence.

Heureusement, ces deux tendances également légitimes ne sont pas si opposées qu'il n'y ait moyen de traiter un sujet suivant l'une, sans être obligé de négliger entièrement l'autre. A ce propos, il nous semble que l'exemple des zoologistes, qui a été pour quelque chose dans les récentes transformations de l'anatomie végétale, vaudrait certainement la peine d'être suivi jusqu'au bout. Un zoologiste, par exemple, parlera chez les Vertébrés du crâne comme formant un système mécanique dont les différentes parties sont étroitement liées entre elles par des relations de structure histologique et de fonctions; mais il ne manquera pas d'ajouter què ces parties ont une valeur morphologique très différente, que les unes sont d'origine dermique, que les autres sont homologues d'arcs branchiaux, etc., bref, que sous l'unité du système anatomique et physiologique se cachent des éléments de valeurs morphologiques disparates.

Il en est depuis longtemps de même dans l'étude des membres extérieurs des plantes. Personne n'est surpris de ce que l'on ait donné les noms de carpelles et d'étamines à des organes floraux d'après leur structure et leur fonction, quoique l'on sache très bien que ces organes ont la même valeur morphologique qu'une feuille. Ou appellera-t-on pétale une étamine dans un genre parce qu'elle est homologue dudit pétale dans le reste de la famille? Non, mais on s'exprimera de façon à faire comprendre le rapport morphologique qui lie les deux organes considérés.

On peut donc dénommer et classer les tissus et les cellules d'après leur structure et leur fonction, et indiquer ensuite, par un qualificatif approprié,

[1] Strasburger, *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen*, pp. VI et seq. (Histologische Beiträge, III, 1891.)

Digitized by Google

leur valeur morphologique lorsque cela est nécessaire, utile ou même possible. Ce procédé nous paraît tellement bien correspondre à l'état de nos connaissances touchant la structure des végétaux et ses relations avec leurs fonctions, que nous n'hésitons pas à en faire usage. Désignant, par exemple, le tissu mécanique permanent sous le nom de *stéréome,* nous parlerons suivant les cas d'un *stéréome épidermique,* ou *cortical,* ou *péricyclique,* ou *ligneux,* etc., etc.

Avant de résumer par systèmes tectoniques et fonctionnels la structure des *Galeopsis,* nous voulons encore dire quelques mots des régions morphologiques dans lesquelles ils se répartissent.

Épiderme. — Ce tissu aérien n'a pas d'équivalent direct dans la racine; c'est l'assise mère de la coiffe et de l'assise pilifère qui lui est homologue.

Écorce. — L'écorce se poursuivant directement de la racine dans la tige, l'homologie de cette région dans les deux membres est évidente; il en est de même le pourmésophylle de la feuille. Nous adoptons, avec M. Strasburger [1], le nom de *phlœoterme* pour désigner l'assise la plus interne de l'écorce, qui peut produire un endoderme, une gaine amylifère, etc.

Cylindre central. — Le cylindre central comprend un *tissu fondamental central* ou *moelle,* une région *périphérique* ou *péricycle;* ces deux régions sont plus ou moins reliées par les *rayons médullaires* et emprisonnent des *cordons fasciculaires.* Dans la racine terminale, il n'y a pas de région médullaire, attendu que le centre est occupé par une lame vasculaire diarche; le tissu fondamental est donc représenté par le péricycle (péricambium) et les bandes de parenchyme qui séparent la lame vasculaire des deux îlots libériens. Dans les racines de second ordre, on trouve, au contraire, une médulle centrale.

Dans la tige, nos recherches nous ont démontré qu'il fallait bien distinguer les assises *extralibériennes* du liber. Le liber est essentiellement caractérisé par la présence de *tubes criblés* et de *cellules compagnes.* Les assises extralibériennes sont dépourvues de ces éléments. On nous objectera sans

[1] Strasburger, *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen,* pp. 309-310. (Histologische Beiträge, III, 1891.)

Digitized by Google

doute que ce n'est pas là une preuve absolue, attendu que dans d'autres familles on trouve en plein liber des régions entièrement dépourvues de tubes criblés et de cellules compagnes; que ce qui se passe dans l'intérieur du liber peut fort bien se reproduire à sa périphérie, et que, par conséquent, lesdites assises ne sont pas nécessairement homologues du péricambium radical. Nous reconnaissons la remarque comme très fondée; aussi étayerons-nous notre interprétation d'autres arguments. Dans tous les cas où il nous a été donné de pouvoir poursuivre la genèse des assises situées entre le liber et le phlœoterme, nous les avons vues prendre naissance dans une assise de parenchyme située à la face interne du phlœoterme. Dans la racine, cette assise se différencie directement par la taille de ses éléments et devient le péricambium; dans la tige très jeune, elle est difficile à distinguer; dans le pétiole et dans la feuille, on la reconnaît de nouveau facilement. De plus, si l'on poursuit le passage de la racine à la tige pendant la période primaire, on constate que l'assise caulinaire est la continuation directe de l'assise radicale. L'homologie nous paraît maintenant bien établie. Mais le sort des éléments qui naissent de l'assise péricyclique est très différent dans la racine et dans les organes aériens. Dans les racines, elle devient sans division un *péricambium* qui joue le rôle d'*assise rhizogène*. Dans les organes aériens, elle subit des fractionnements qui débutent par une cloison tangentielle, suivie de cloisonnements radiaux. La zone ainsi formée reste telle quelle et ne peut se distinguer histologiquement du parenchyme libérien dans le sous-genre *Ladanum*. Dans la tige du sous-genre *Tetrahit*, une partie de ces éléments se sclérifie et construit un *stéréome péricyclique* faiblement développé et presque exclusivement adossé au liber des faisceaux angulaires, où il renforce l'endoderme. Dans les renflements moteurs des *Tetrahit*, pour des raisons spéciales réclamées par les fonctions des renflements, la zone péricyclique est collenchymateuse avec développement de stéréides isolées. Ce développement collenchymateux se reproduit dans le pétiole et dans la feuille. *Les assises extralibériennes des organes aériens* — qu'elles restent indemnes, qu'elles forment des stéréides ou qu'elles deviennent collenchymateuses — *et le péricambium sont donc des tissus homologues* par leur origine et leur topographie. Par suite, nous abandonnons les termes de

Digitized by Google

stéréome libérien, collenchyme libérien, etc., dont nous avons fait usage antérieurement, et retirons également les réserves que nous avons exprimées sur les indications de M. Morot [1].

Les renseignements anatomiques détaillés que nous possédons sur les familles voisines des Labiées au sujet des tissus en question, sont fort peu nombreux.

M. Hovelacque a considéré, comme nous l'avions fait jusqu'à maintenant, les formations mécaniques extralibériennes comme étant du liber primaire. Le savant anatomiste français s'est basé, pour prouver son interprétation, sur le fait que, dans les plantes qu'il a étudiées, les îlots grillagés primaires touchaient directement l'endoderme : il n'y avait donc entre le liber et l'écorce aucune place pour un tissu péricyclique. Autant que nous avons pu le voir jusqu'ici, les tubes grillagés ne se sclérifient jamais [2]; il y a donc là un caractère précieux pour reconnaître les îlots grillagés dans les massifs sclérifiés. Or, il se trouve qu'en réalité, d'après M. Hovelacque [3], il existe des Rhinanthacées (*Tozzia*, *Bartsia*) dans lesquelles le liber se sclérifiant entièrement, sauf toujours les tubes criblés, on peut admirablement constater que les îlots grillagés les plus extérieurs sont en contact direct avec le parenchyme cortical [4]. Les mêmes faits se reproduiraient dans les Orobanchées, les Lathrées, les Bignoniacées et les Utriculariées [5]. Il y a là, comme on voit, une con-

[1] *Les Labiées des Alpes maritimes*, p. 7.

[2] Cette expérience, qui est aussi celle de M. Hovelacque, est confirmée par M. Lecomte d'une manière très positive. Voy. Lecomte, *Contribution à l'étude du liber des Angiospermes*, l. c., p. 218.

[3] Hovelacque, *Caractères anatomiques généraux des organes végétatifs des Rhinanthacées et des Orobanchées*, pp. 4-5. (Bulletin de la Soc. d'études scient. de Paris, 11me ann., 2me semestre, 1889.)

[4] Cependant, dans les figures que M. Hovelacque a données de cette région de la tige chez le *Bartsia alpina*, on ne voit pas les îlots grillagés occuper la position que leur assigne l'auteur, mais se placer toujours à une certaine distance de l'assise corticale la plus interne. Voy. figures 334 et 335 de l'ouvrage cité ci-dessous.

[5] Voyez, pour plus de détails, le magnifique volume que M. Hovelacque a consacré à l'étude de ces divers groupes, volume extrêmement précieux comme point de départ pour les recherches d'anatomie comparée approfondie chez les Gamopétales : *Recherches sur l'appareil végétatif des Bignoniacées, Rhinanthacées, Orobanchées et Utriculariées*. Paris, 1888.

Digitized by Google

tradiction dans nos résultats, contradiction qui appelle des travaux renouvelés pour éclaircir ce point obscur de l'anatomie des Gamopétales.

Au surplus, les groupes dans lesquels la question de l'homologie des éléments extralibériens aériens et du péricambium radical est vivement discutée sont encore nombreux et même de beaucoup les plus nombreux. M. Lignier, par exemple, a récemment, dans un fort beau travail, indiqué l'absence de tissus péricycliques aériens dans des groupes de plantes bien différents de ceux qui nous occupent : les Calycanthées, Mélastomacées et Myrtacées [1]. Il indique que dans l'hypocotyle des Calycanthées [2] « les premiers îlots grillagés se sont formés contre la gaine protectrice », et il en conclut qu' « il n'existe donc pas de péricycle entre les faisceaux cotylédonaires et la gaine protectrice ». Mais dans une note insérée au bas de la page et dans laquelle il rappelle que M. Hérail a indiqué un péricycle dans ce même membre, il considère ce péricycle comme « formé par les éléments extérieurs du liber », et il ajoute : « A l'époque qui nous occupe, ces éléments ont, en section transversale, un aspect parenchymateux. Plus tard, ils formeront un massif mécanique fibreux ». Il n'en faut pas davantage pour reconnaître le même processus d'évolution des éléments péricycliques que nous avons examiné dans ce travail; car les tubes criblés ne se cloisonnent en prosenchyme ni ne se sclérifient, d'où il résulte que les éléments extérieurs adossés à la gaine et visés dans cette note n'ont pu, à notre avis, être constitués par les îlots grillagés primaires.

Enfin, il est très probable que dans beaucoup de cas le cloisonnement de la région péricyclique caulinaire se trouvera être presque simultané avec la formation des îlots procambiaux. D'après le peu que nous savons à ce sujet, il semble que ce soit le cas pour les plantes à stéréome péricyclique développé; la simultanéité du développement trouve alors une explication plausible dans le rôle de protection que doit jouer ce stéréome à l'égard du jeune liber [3].

[1] O. Lignier, *Recherches sur l'anatomie comparée des Calycanthées, des Mélastomacées et des Myrtacées.* (Archives botaniques du nord de la France, IV, 1887.)

[2] O. Lignier (*l. c.*, p. 22).

[3] Cette opinion a été émise il y a longtemps déjà par M. Russow. Nous ferons remarquer que la priorité de l'interprétation des éléments stéréiques extralibériens comme n'appartenant pas au liber, revient à cet auteur ingénieux, qui l'a nettement affirmée longtemps

Digitized by Google

Dans ces cas-là, l'étude des éléments constitutifs du tissu à tous les âges, de sa disposition dans les régions intermédiaires entre la racine et la tige, ainsi que la comparaison avec les groupes voisins, amèneront nécessairement à reconnaître la vraie valeur morphologique de ce stéréome.

Il nous reste maintenant à résumer notre monographie en systèmes tectoniques et fonctionnels donnant une image de la structure moyenne des Labiées. Les groupements que nous faisons se rattachent en partie aux travaux antérieurs sur le sujet [1].

I. Système dermique.

1. *Épiderme.* — Éléments périphériques des organes aériens peu épaissis, cellulosiques, munis d'une cuticule mince; protègent les tissus sous-jacents et en diminuent la transpiration.

2. *Indument.* — Éléments *épidermiques*, uni- ou pluricellulaires, sessiles ou portés par un coussinet pluricellulaire (*épidermique* et parfois en partie *cortical*), cellulosiques, recouverts d'une cuticule plus ou moins perlée et parfois plissée, peu épaissis; exagèrent les fonctions de l'épiderme sur l'appareil végétatif, le calice et l'extérieur de la corolle (poils tecteurs); remplacent dans une faible mesure l'absence de nectarostège dans le tube de la corolle; servent sur les anthères à mouvoir les opercules (poils vecteurs).

avant que MM. van Tieghem et Morot eussent développé leur théorie péricyclique. Voyez à ce sujet les considérations, intéressantes au plus haut degré, que M. Russow a consignées dans ses deux ouvrages : *Vergleichende Untersuchungen über die Leitbündel-Kryptogamen*, p. 171 (Memoires de l'Acad. impér. des sciences de St-Pétersbourg, 7me série, t. XIX, 1872), et *Betrachtungen über das Leitbündel und Grundgewebe*, pp. 12 et 13. Dorpat, 1875. — M. van Tieghem a appliqué pour la première fois sa théorie péricyclique dans un article intitulé : *Sur quelques points de l'anatomie des Cucurbitacées* (Bull. Soc bot. de France, t. XXIX, 1882, p. 280). Elle a été exposée d'une manière générale (peut-être même la généralisation et les homologations ont-elles été trop rapides) dans un mémoire spécial de M. Morot : *Recherches sur le péricycle* (Ann. sc. nat., 6me sér., t. XX, pp. 217-309). — L'explication de M. Russow répond aux objections à la théorie péricyclique que l'on a tirées de la simultanéité de développement des éléments péricycliques et du procambium, et qui ont été présentées par M. d'Arbaumont dans une *Note sur le péricycle* (Bull. Soc. bot. de France, t. XXXIII, 1886).

[1] Voy. surtout : Schwendener, *Das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monokotylen*. Leipzig, 1874. — G. Haberlandt, *Die physiologischen Leistungen der Pflanzengewebe* (dans Schenk's Handbuch der Botanik, t. II, pp. 557-693). — G. Haberlandt, *Physiologische Pflanzenanatomie*. Leipzig, 1884.

Digitized by Google

3. *Derme.* — Éléments *corticaux* plus ou moins subérisés, remplacent l'épiderme dans la racine après la chute de l'assise pilifère.
4. *Coiffe*, à l'extrémité de la racine, protégeant le point végétatif.

Il n'y a pas formation d'un *périderme* chez les *Galeopsis*.

II. Système absorpteur.

1. *Assise pilifère* des racines; ce tissu, ainsi que le précédent, est d'origine *épidermique*, mais ne peut pas être homologué avec l'épiderme aérien; c'est le dermocalyptrogène qui, dans la racine, est l'équivalent de ce dernier tissu.

III. Système assimilateur.

1. *Palissades.* — Éléments *corticaux*, allongés perpendiculairement à la surface de l'épiderme, chlorophylliens et assimilateurs par excellence, occupant la partie supérieure du mésophylle dans les feuilles.
2. *Parenchyme.* — Éléments *corticaux*, parenchymateux ou un peu rameux, moins chlorophylliens et moins assimilateurs que les précédents, occupant dans l'écorce des tiges surtout les parties centrifuges, placées à l'extrémité des cornes dans le pétiole, constituant la partie inférieure du mésophylle ou le mésophylle entier dans les feuilles, formant le mésophylle entier dans le calice.
3. *Endocarpe.* — Éléments *épidermiques*, quadratiques, très chlorophylliens, constituant l'appareil assimilateur du fruit.

IV. Système conducteur.

1. *Gaine amylifère.* — Éléments *corticaux phloeotermiques* parenchymateux, emmagasinant et charriant par osmose et diffusion des hydrates de carbone (amidon, sucre, etc.), riches en chloroleucites; présente dans le pétiole, dans la feuille et dans la jeune tige, où elle se transforme tôt ou tard en endoderme.
2. *Faisceaux conducteurs.* — Composés d'éléments *fasciculaires*. Au nombre d'un bipolaire, central, dans les racines terminales primaires; de plusieurs circummédullaires dans les racines latérales; de quatre au sommet de l'hypocotyle; de huit dans l'épicotyle, dont quatre réparateurs et quatre foliaires; aux nœuds les foliaires sortent deux par deux dans les pétioles, tandis que les réparateurs se divisent pour donner de nouveau un réparateur et un faisceau foliaire; dans la période secondaire, les faisceaux angulaires se fusionnent deux par deux, et plus tard tous ensemble par la formation d'arcs interfasciculaires. Les deux faisceaux entrant dans le pétiole se rencontrent plus ou moins rapidement, ils envoient à gauche et à droite un petit faisceau dans chaque corne. Dans la feuille, ils sont ramifiés suivant le type penné simple. Dans le calice, on compte cinq faisceaux principaux allant jusqu'à l'extrémité des dents, des faisceaux secondaires et un faisceau de ceinture reliant les précédents et passant sous les sinus interdentaires. Dans le tube de la corolle, ils sont distribués

Digitized by Google

comme suit (cas le plus complexe): sur la voûte : quatre cordons staminaux, deux dorsaux essentiels, deux dorsaux auxiliaires, deux dorsaux marginaux, ces derniers reliés par deux cordons de jonction; sur les flancs : des cordons côtiers inférieurs et supérieurs et les cordons latéraux du labre. Le style est parcouru par deux faisceaux longitudinaux, et l'arête externe des nucules en contient un logé dans le leptocarpe, lequel se ramifie un peu à droite et à gauche.

a. *Bois.* — Partie *ligneuse*, conductrice de l'eau, de sels en solution et d'hydrates de carbone; située en dedans du liber dans les organes aériens, radialement à côté de lui dans les racines.

α. *Appareil vasculaire.* — Trachées annulaires et déroulables dans le bois primaire; vaisseaux ponctués dans le bois secondaire.

β. *Appareil accumulateur.* — Parenchyme cellulosique contenant, suivant l'époque et le lieu considérés, de l'eau, du sucre, de l'amidon, des chloroleucites, etc.; éléments dressés formant un ilot intraxylaire entourant la région trachéale, puis s'avançant de là en rayons uniséries à travers le bois en touchant aux vaisseaux ponctués dans le bois secondaire (rayons dits « médullaires »); se lignifiant plus ou moins dans le bois secondaire.

b. *Liber.* — Partie *libérienne*, conductrice des matières protéiques adossée extérieurement au bois dans les organes aériens placée radialement à côté de lui dans les racines.

α. *Appareil vasculaire.* — Tubes criblés appartenant au type *Cucurbita*, et cellules compagnes formant des ilots plus ou moins développés.

β. *Appareil accumulateur.* — Parenchyme cellulosique allongé contenant de l'amidon et des substances ternaires; parcouru radialement par des rayons de parenchyme plus court qui prolongent les rayons de parenchyme du bois (rayons dits « médullaires »).

3. *Moelle.* — Contenant de l'eau et des choroleucites amylogènes dans le jeune âge, disparaissant rapidement dans les *Tetrahit;* à parois persistantes dans le sous-genre *Ladanum*; existant dans les jeunes racines latérales.

V. Système aérifère.

1. *Canaux.* — Toujours schizogènes, très développés dans la partie spongieuse du mésophylle foliaire, dans le parenchyme assimilateur caulinaire des *Tetrahit* et le mésophylle calicinal; parcourant le collenchyme cortical des renflements moteurs chez les *Tetrahit;* au centre de la tige, dans ce dernier sous-genre, ce système est représenté par la lacune centrale.

Digitized by Google

2. *Stomates.* — Éléments *épidermiques* appartenant au type dicotylé ordinaire, entourés de plusieurs cellules annexes, rares sur la tige, présents sur les deux faces des cotylédons et sur la page inférieure des feuilles aériennes normales.

VI. Système squelettaire.

1. *Collenchyme.* — Squelette vivant, de valeur morphologique très inégale.

   a. *Collenchyme angulaire.* — Éléments *corticaux* appartenant au type du collenchyme concave, groupés en colonnes dans les quatre angles de la tige, l'extrémité des cornes dans le pétiole et les régions hypodermiques des nervures foliaires s'étendant dans l'écorce aux nœuds et surtout dans les renflements moteurs des *Tetrahit*, où l'on trouve aussi du collenchyme convexe; appareil de soutien des organes appelés à subir un accroissement intercalaire.

   b. *Collenchyme extralibérien.* — Éléments *péricycliques* formant des lames adossées au liber dans les pétioles, les feuilles et les renflements moteurs des *Tetrahit*, appartenant au type du collenchyme concave; appareil de soutien et de protection du liber.

   c. *Collenchyme intraxylaire.* — Éléments *ligneux* formant, aux dépens du parenchyme intraxylaire, des lames protectrices de ce parenchyme dans les nervures foliaires, appartenant au même type de collenchyme que les précédents.

2. *Sclérocarpe.* — Squelette mort, constituant l'appareil de résistance à la pression du péricarpe; éléments *corticaux* homologues du mésophylle palissadique foliaire, inégalement sclérifiés sur les faces et à leur extrémité interne, à parois parcourues par de nombreux canalicules.

3. *Stéréome.* — Squelette mort, constituant un appareil de résistance à la flexion et à la traction, de valeur morphologique très inégale.

   a. *Stéréome extralibérien.* — Éléments *péricycliques*, fibriformes, lignifiés, à ponctuations allongées en fente et dirigées à gauche; pièces de renforcement de l'endoderme, surtout développées vis-à-vis du liber angulaire, dans le sous-genre *Tetrahit*.

   b. *Stéréome ligneux.* — Éléments *ligneux* (libriformes), surtout développés dans le bois secondaire, offrant les mêmes caractères que les précédents, formant dans la racine, la tige, le pétiole, le limbe foliaire et le calice, le principal appareil statique de la plante; constituant les terminaisons spinescentes des bractéoles et des dents calicinales.

4. *Assise anthérienne à épaississements.* — Éléments *corticaux* hypodermiques, donnant d'abord une certaine solidité aux sacs anthériens, jouant ensuite le rôle d'appareil de déhiscence.

Digitized by Google

5. *Endoderme.* — Éléments *corticaux phlœotermiques*, parenchymateux, subérisés, formant un manchon continu autour du cylindre central, dans la racine et les entre-nœuds caulinaires; appareil de soutien et de protection du liber, empêchant les communications entre ce dernier tissu et le tissu assimilateur cortical.

VII. Système dynamique des renflements moteurs.

1. *Moelle.* — Éléments de grande taille emmagasinant de l'eau sous une forte pression dans les renflements moteurs des *Tetrahit.* La moelle joue aussi un rôle dynamique dans la croissance des jeunes entrenœuds, mais, à ce moment-là, cette fonction est commune à un bon nombre d'autres tissus.

VIII. Système excrétoire.

1. *Glandes.* — Éléments *épidermiques*, uni- ou pluricellulaires, subsessiles ou stipités; peuvent se présenter sur tous les organes aériens.
2. *Épithème dentaire.* — Éléments *corticaux*, parenchymateux, incolores, dans lesquels aboutissent au sommet des dents foliaires les terminaisons du système conducteur, Cet épithème touche directement les stomates aquifères (éléments *épidermiques*) par lesquels s'excrète, à certaines époques, l'excès d'eau apportée par le système conducteur.
3. *Épithème nectarifère.* — Éléments *épidermiques* du nectaire floral, émettant une liqueur sucrée, dont les insectes sont friands.

IX. Système oxalifère.

1. *Parenchyme du torus*, dont presque tous les éléments contiennent une mâcle en oursin.
2. *Chambres apicales des scléréides palissadiques du sclérocarpe*, contenant chacune un gros cristal cubique d'oxalate de calcium.

X. Système histogénique.

1. *Méristèmes* des organes aériens et souterrains aux points végétatifs.
2. *Dermatocalyptrogène* à l'extrémité de la racine, homologue de l'épiderme caulinaire.
3. *Appareil desmogène.* — Cambium (*fasciculaire* à l'intérieur des faisceaux, *péricyclique* en dehors de ceux-ci) produisant un bois centripète et un liber centrifuge; *assise péricyclique* caulinaire et foliaire, formant les arcs cambiaux interfasciculaires; *tissu fondamental* dans les racines primaires, produisant des arcs de méristème intralibériens et extraligneux.

Digitized by Google

4. *Appareil rhizogène.* — Éléments *péricycliques* parenchymateux; dans la racine le péricambium, et dans les organes aériens tous les éléments péricycliques non sclérifiés.

XI. Système sexuel.

1. *Appareil sexuel mâle.* — Tétrades de grains de pollen dissociés, nés de cellules mères (*corticales*), à l'intérieur d'une émergence; grains à trois plis longitudinaux.

2. *Appareil sexuel femelle.* — Oosphère et synergides nées par division d'un noyau primitif dans une cellule différenciée (*corticale*) du nucelle (émergence), c'est-à-dire dans le sac embryonnaire.

3. *Appareil protecteur des éléments sexuels mâle et femelle.* — Sac embryonnaire fortement cutinisé.

4. *Appareil transmettant aux éléments sexuels les matières nutritives* (fonctions probables [1]). — Synergides; même origine que l'appareil sexuel femelle.

XII. Système embryogénique.

1. *Cellule mère de l'embryon.* — OEuf.

2. *Appareil nutritif.* — Albumen.

XIII. Système conjonctif.

Sous ce titre, nous groupons les tissus suivants qui n'ont pas de fonction permanente *définie* ou qui n'ont qu'une valeur représentative : moelle âgée; parties non chlorophylliennes de l'écorce dans la racine, la tige, le pétiole, la feuille, la corolle, les étamines, le péricarpe et le style; raphé, tégument de l'ovule, partie du nucelle environnant le sac embryonnaire.

Attirons, en terminant, l'attention sur deux ou trois particularités qui feront toujours du genre *Galeopsis* un des groupes les plus intéressants des Labiées : les renflements moteurs du sous-genre *Tetrahit*, la structure singulière du péricarpe et la torsion apicale des anthères qui, jusqu'à ce jour, a valu à l'androcée des *Galeopsis* une diagnose erronée dans tous les ouvrages descriptifs.

[1] Voy. Westermaier, *Zur Embryologie der Phanerogamen, insbesondere über die sogenannten Antipoden.* (Nov. Act. der k. Leop.-Carol. Akad., t. LVII, 1892).

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

Systématique.

CHAPITRE XXVII.

BIBLIOGRAPHIE SYSTÉMATIQUE DU GENRE *GALEOPSIS*.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de résumer d'une façon aussi complète que possible les travaux de nos prédécesseurs sur la systématique du genre qui nous occupe.

Ceux qui savent, par expérience, le temps qu'exige la connaissance approfondie de la littérature d'un genre polymorphe, nous sauront sans doute gré d'avoir énuméré les sources que nous avons consultées, et dont plusieurs étaient entièrement tombées dans l'oubli.

Nous suivons l'ordre chronologique, qui fera voir les progrès accomplis depuis Linné, et qui montrera que beaucoup de questions agitées encore aujourd'hui, l'ont été depuis fort longtemps. Cette liste n'a été établie qu'à partir de Linné, les travaux des auteurs précédents n'offrant qu'un très médiocre intérêt; elle ne mentionne pas non plus les plantes signalées par des signes, des lettres, etc., mais dépourvues de noms.

1. Linné, *Genera plantarum,* n° 487, 1737. — Linné établit le genre *Galeopsis,* déjà adopté par Tournefort antérieurement.

2. Linné, *Species plantarum,* éd. 1, pp. 579-580, 1753. — Linné décrit deux espèces, les *G. Tetrahit* et *Ladanum.* La première espèce n'offre pas d'ambiguïté. Dans la seconde, la diagnose se rapporte plutôt à ce que l'on a appelé plus tard *G. intermedia,* tandis que les synonymes cités indiquent ce qu'Ehrhart a appelé *G. angustifolia.* Il est donc

Digitized by Google

évident que Linné ne distinguait point spécifiquement ces deux groupes, tout en les connaissant. Nous ne reviendrons donc plus sur la question oiseuse, mais discutée jusque dans ces derniers temps, de savoir ce que Linné entendait sous le nom de *G. Ladanum*. Une troisième espèce linnéenne, le *G. Galeobdolon*, se rapporte au genre *Lamium*. Le *G. hirsuta* L. est devenu le *Stachys hirta* dans la seconde édition du *Species*.

3. Allioni, *Stirpium præcipuarum nicaeensium enumeratio*, p. 44. Paris, 1757. — Allioni décrit dans cet opuscule un « *Galeopsis* caule piloso, calicibus labio corollae superiore longioribus ». Ce *Galeopsis* n'est autre que le *Stachys hirta* L., mais Allioni ne le signale que par la phrase ci-dessus, sans lui appliquer la nomenclature binaire. C'est donc par un lapsus que Bentham a attribué à Allioni un *G. hirta*, et c'est à tort que ce synonyme fictif du *Stachys hirta* a été copié par les autres auteurs.

4. Martyn, *Plantæ cantabrigienses*, 1763. — C'est dans cet ouvrage que Hudson aurait fait pour la première fois mention de son *G. villosa*, d'après Babington, cité par M. Ascherson (*Flora der Prov. Brandenburg*, I, p. 526). Ce livre n'étant pas à notre disposition, nous avons prié M. J.-C. Baker, à Kew, de bien vouloir vérifier l'exactitude de cette affirmation. Suivant les obligeants renseignements du botaniste anglais, l'ouvrage en question est une simple énumération de noms de plantes sans diagnoses, dont il n'y a pas lieu de tenir compte, et qui, de plus, ne contient pas de citation du *G. villosa*.

5. Miller, *Gardener's Dictionary* (art. *Galeopsis*), 1768. — Miller décrit le *G. speciosa*. Dans des éditions subséquentes du même ouvrage, il a signalé un *G. orientalis* qui est le *Stachys spinulosa* Sibth. et Sm., et un *G. hispanica* qui est un *Stachys* douteux.

6. Crantz, *Stirpes austriacæ*, pars 2, 1769. — Range les *G. Tetrahit* et *Ladanum* dans le genre *Lamium;* ce qui s'explique sans doute par l'imperfection des connaissances d'alors concernant la structure florale des *Galeopsis*.

7. Linné, *Mantissa plantarum altera*, p. 411, 1771. — Linné fait du *G. speciosa* de Miller, qui était le *G. Tetrahit* β du *Species*, un *G. Tetrahit* var. *cannabina*.

Digitized by Google

8. Thunberg, *Prodromus plantarum capensium*, 1772-75. — Décrit un *G. hispida* qui est devenu le *Stachys Thunbergii* Benth.

9. Leers, *Flora herbornensis*, p. 133, 1775. — Leers publie son *G. dubia*.

10. Pollich, *Flora palatina*, II, p. 149, 1777. — Réédite sous le nom de *G. cannabina* le *G. dubia* Leers.

11. W. Curtis, *Flora londinensis*, fasc. VII, 1777-1787. — Reproduit le *G. speciosa* Mill. sous le nom de *G. verticolor*.

12. Reichard, *Flora moeno-francofurtana*, II, p. 8, 1778. — Réédite sous le nom de *G. segetum* le *G. dubia* Leers.

13. Hudson, *Flora anglica*, éd. 2, 1778, p. 256. — Après avoir passé sous silence le *G. villosa* dans la première édition de sa flore (1762), Hudson le publie dans l'édition de 1778, sans tenir compte des noms antérieurs de Leers et Pollich.

14. Villars, *Prospectus de l'histoire des plantes du Dauphiné*, p. 21, 1779. — Décrit un *G. intermedia*.

15. Gilibert, *Flora lithuanica inchoata*, II, pp. 82-83, 1781. — Répartit les *Galeopsis* de Linné en deux genres : *Ladanum* et *Tetrahit* avec les espèces suivantes : *Ladanum luteum* (*G. dubia*), *L. purpureum* (*G. Ladanum*), *Tetrahit purpurascens* (*G. Tetrahit*), *T. grandiflorum* (*G. speciosa*). La distinction primitive de ces deux genres est due à Dillen, et Reichenbach n'a fait que la reproduire en créant dans le genre *Galeopsis* les sous-genres *Ladanum* et *Tetrahit*. — Nous ne connaissons ces créations de Gilibert que d'après Ledebour (*Fl. ross.*, III, pp. 419-421), car l'ouvrage de l'auteur lyonnais manque dans les bibliothèques botaniques de Genève.

16. Allioni, *Flora pedemontana*, 1785. — Voir, au sujet d'un *Galeopsis* fictif attribué à cet auteur, le n° 3.

17. Lamarck, *Encyclopédie*, II, pp. 600-601, 1786. — Donne le nom de *G. parviflora* au *G. intermedia* Vill., et celui de *G. ochroleuca* au *G. dubia* Leers.

18. Villars, *Histoire des plantes du Dauphiné*, II, pp. 386-388, 1787. — Récapitule son *G. intermedia* et désigne du nom de *G. prostrata* le *G. dubia* Leers.

Digitized by Google

19. Roth, *Tentamen florœ germanicae*, I, p. 254, 1788. — Réédite le *G. dubia* Leers sous le titre de *G. grandiflora*, et le *G. speciosa* Mill. sous celui de *G. cannabina*.

20. Moench, *Methodus plantas horti bot. et agri marburgensis, etc.*, pp. 394-397, 1794. — Moench rejette le nom de *Galeopsis* et le remplace par celui de *Tetrahit*, usité autrefois par Dillen, avec trois espèces : *T. longiflorum* (*G. dubia*), *T. Ladanum* (*G. Ladanum*), *T. nodosum* (*G. Tetrahit.*)

21. Willdenow, *Species plantarum*, III, pp. 91-93, 1800. — Outre les deux espèces linnéennes, Willdenow admet les *G. grandiflora* et *cannabina* de Roth.

22. Hoffmann, *Deutschland's Flora*, II, p. 8, 1804[1]. — Désigne du nom de *G. latifolia* le *G. intermedia* Vill. et décrit le *G. angustifolia* Ehrh. que son auteur avait publié en exsiccata.

23. Gmelin, *Flora badensis*, II, pp. 619-625, 1806. — Décrit une belle forme nouvelle, appelée trois ans plus tard *G. pubescens*, par Besser; le nom de *G. cannabina* que lui donne Gmelin doit malheureusement être rejeté, car il a été appliqué avant lui à des formes différentes par Linné, Pollich et Roth.

24. Besser, *Primitiæ florœ Galiciæ*, II, p. 27, 1809. — Décrit sous le nom de *G. pubescens*, l'espèce déjà signalée par Gmelin sous l'appellation incorrecte de *G. cannabina*.

25. Schultes, *Observationes botanicae*, n° 829, 1809. — Décrit sous le nom de *G. canescens*, une variété curieuse du *G. Ladanum*.

26. de Clairville, *Manuel d'herborisation en Suisse et en Valais*, p. 190, 1811. — Est un des rares anciens auteurs, sinon le seul, qui emploie le terme de *G. villosa* Huds.; depuis de Clairville, ce sont surtout MM. Ascherson et Crépin qui ont insisté sur l'application de ce nom.

27. Schultes, *Oesterreich's Flora*, II, pp. 150-154, 1814. — Décrit

[1] C'est par erreur que nous avons cité 1791 comme date de publication du *G. latifolia*. Hoffm. (*Labiées des Alpes maritimes*, p. 168). En effet, la première édition de cet ouvrage ne comporte qu'un seul petit volume pour les phanérogames, et l'auteur n'y distingue pas encore dans le *G. Ladanum* les *G. angustifolia* et *latifolia*.

Digitized by Google

un *G. neglecta* qui a été entièrement « neglectus » jusqu'à ce jour. La description en est si mauvaise qu'on ne peut savoir au juste quelle forme du *G. Tetrahit* Schultes a voulu désigner sous ce nom. Nous reviendrons, dans le texte descriptif, sur cette plante.

28. Fries, *Flora hallandica,* p. 100, 1818. — Décrit son *G. Tetrahit* var. *pallens.*

29. Reichenbach, *Zweiter Beitrag zur Flora von Dresden* (Flora V, 1822, pp. 35-36). — L'illustre floriste signale l'hétéranthie des *Galeopsis* et les applications que l'on doit faire de ce phénomène à la systématique du genre. Reichenbach, oubliant la présence des renflements moteurs, confond les *G. intermedia* Vill. et *parviflora* Lamk. avec le *G. pubescens* Bess.

30. Wallroth, *Schedulæ criticæ,* p. 302, 1822. — Réduit les *G. intermedia* Vill. et *G. angustifolia* Ehrh. au rang de variétés *latifolia* et *angustifolia* du *G. Ladanum* L.

31. Schlechtendal, *Flora berolinensis,* pp. 320-321, 1823. — Réédite le *G. pubescens* Bess. sous le nom de *G. Walterina,* et distingue dans le *G. Tetrahit* deux variétés : *arvensis* et *silvestris.*

32. Reichenbach, *Iconographia botanica,* I, p. 41, 1823. — Croit pouvoir faire du *G. Walterina* Schlecht. une var. *glandulosa* spéciale du *G. pubescens.*

33. von Boenninghausen, *Prodromus floræ monasteriensis,* p. 178, 1824. — Décrit sous le nom de *G. bifida* une race nouvelle et fort curieuse du *G. Tetrahit.*

34. Bluff et Fingerhut, *Compendium florae germanicæ,* II, p. 26, 1825. — Donnent le nom de *G. grandiflora* à une forme énigmatique du *G. Ladanum,* probablement la var. *canescens.*

35. Spenner, *Flora friburgensis,* II, p. 394, 1826. — Donne le nom de *G. versicolor* au *G. pubescens* Bess.

36. Wimmer et Graboswki, *Flora Silesiæ,* pars 2, II, pp. 190-193, 1828. — Adoptent les deux variétés du *G. Ladanum* de Wallroth et proposent, pour des raisons étymologiques, de donner au *G. Tetrahit* le nom de *G. tetrachista* (du verbe τετραχίζω).

37. Gaudin, *Flora helvetica,* t. IV, pp. 52-58, 1829. — Donne un

Digitized by Google

exposé fort remarquable des *Galeopsis* de la Suisse, qui, suivant lui, y sont au nombre de quatre. Il distingue dans le *G. Ladanum* deux sous-espèces : *angustifolia* et *latifolia,* la première avec une variété *exilis.* Le *G. ochroleuca* (*dubia*) possède, selon Gaudin, deux variétés : *minor* et *versicolor.* Outre le *G. Tetrahit,* il distingue encore le *G. pubescens* avec trois variétés : *minor, mollis* et *glandulosa.*

38. Reichenbach, *Flora germanica excursoria,* pp. 322-323, 1830. — Divise le genre *Galeopsis* en deux sous-genres : *Ladanum* et *Tetrahit,* d'après la présence ou l'absence de renflements moteurs. Il admet huit espèces. Le *G. canescens* Schultes serait différent du *G. canescens* Beck. : l'un serait satellite du *G. angustifolia,* l'autre du *G. Ladanum.* Reichenbach décrit encore une variété *Marrubiastrum* du *G. Ladanum* et une variété *teucrioïdes* du *G. Tetrahit.* Il crée un *G. acuminata* qui a donné lieu à d'interminables discussions.

39. Trachsel, *Botanische Bemerkungen* (Flora, X, 1830, p. 519). — Trachsel attaque Gaudin au sujet de la réunion des *G. angustifolia* et *Ladanum* (*intermedia*), en un même groupe spécifique. Il donne des caractères distinctifs exacts, mais que Gaudin avait aussi fort bien vus, ainsi que cela ressort des descriptions de ce dernier. Autour de Berne, Trachsel n'aurait pas observé de formes intermédiaires entre les deux groupes : c'est fort possible, mais cela ne prouve rien.

40. Lejeune et Courtois, *Compendium florœ belgicæ,* II, p. 239, 1831, et III, p. 380, 1836. — Admettent les deux variétés *arvensis* et *silvestris* Schlecht. du *G. Tetrahit;* pour eux, la première de ces variétés est synonyme du *G. acuminata* Reichb. Ils rabaissent le *G. bifida* Boenn au rang de variété du *G. Tetrahit.*

41. Schönheit, *Phytographische Bemerkungen* (Flora, XV, 1832, pp. 593-600). — Établit un *G. calcarea* et admet, à côté de celui-ci, cinq espèces qui sont les *G. angustifolia* Ehrh., *intermedia* Vill., *ochroleuca* Lamk. (*dubia*), *versicolor* Curt. (*speciosa*) et *Tetrahit* L. qui comprend trois variétés : *Tetrahit, bifida* et un α douteux.

42. Koch, *Röhling's Deutschland's Flora,* IV, pp. 270-276 (1833). — Donne l'exposé le plus correct du genre *Galeopsis* qui ait jamais été fait.

Digitized by Google

L'auteur admet en Allemagne six espèces : *G. Ladanum* L., *ochroleuca* Lamk. (*dubia*), *Tetrahit* L., *bifida* v. Boenn., *versicolor* Curt. (*speciosa*) et *pubescens* Bess. Le *G. Ladanum* contient (en laissant de côté les états d'hétéranthie) trois variétés : *latifolia, canescens, angustifolia.* Les descriptions sont irréprochables et détaillées; la synonymie est complète et parfaite.

43. Bentham, *Labiatarum genera et species,* 1832-1836. — Suppose pour la première fois l'existence d'hybrides entre les *G. Ladanum* et *ochroleuca* (*dubia*), ainsi que celle de produits correspondant à la formule : *Ladanum* × *Tetrahit.* Cette dernière formation, *a priori* très invraisemblable, n'a jamais été constatée jusqu'ici. Pour Bentham, le *G. pubescens* n'est qu'une forme du *G. Tetrahit,* vu qu'on lui trouve souvent des poils sétacés; il en est de même du *G. versicolor* (*speciosa*), à cause de la variabilité de ses fleurs. Nous verrons au n° 60, comment l'illustre auteur anglais a classé ses formes de *Galeopsis.*

44. Griesselich, *Botanische Notizen* (Flora, XIX, 1836, pp. 42-46). — Reconnait le *G. Tetrahit* et le *G. Ladanum,* mais ne voit rien de bien distinct dans ce qui entoure ces deux groupes. Griesselich pense que les variations de longueur de la corolle et des dents caliciuales, la forme du labiole et la coloration de la corolle ont plutôt un intérêt morphologique et biologique qu'une signification systématique. Il considère ensuite le *G. canescens* dans le groupe *Ladanum* comme l'homologue du *G. pubescens* dans le groupe *Tetrahit.* Sans doute le *G. ochroleuca* (*dubia*) ne serait pas identique au *G. Ladanum,* mais il serait bien voisin de ce dernier. Les *G. bifida* et *acuminata* ne seraient que des formes du *G. Tetrahit.* Le *G. pubescens* serait plus caractérisé. Enfin, Griesselich voit l'homologue du *G. ochroleuca* dans le *G. versicolor* pour le groupe *Tetrahit.* Notre chapitre de systématique synthétique indiquera ce qu'il y a de vrai et d'exagéré dans ces considérations.

45. Griesselich, *Versuch einer Statistik der Flora Baden's, des Elsasses* etc. (*Kleine botan. Schriften,* I, pp. 151-152, 1836). — Signale dans le *G. Ladanum* une var. *viridis* douteuse, et distingue dans le *G. Tetrahit* deux variétés appelées l'une *setoso-hispida* (= *G. Tetrahit*), l'autre *pubescens* (= *G. pubescens*).

Digitized by Google

46. Mutel, *Flore française,* III, pp. 28 et 29 (1836). — Mutel fait des *G. angustifolia* Ehrh. et *intermedia* Vill. des variétés *angustifolia* et *intermedia* du *G. Ladanum.* Il abaisse également les *G. acuminata* Reichb. et *pubescens* Bess. au rang de variétés *acuminata* et *pubescens* du *G. Tetrahit;* le *G. versicolor* Curt. devient une variété *grandiflora* du *G. Tetrahit;* les formes ordinaires du *G. Tetrahit* se répartissent en deux variétés, *genuina* et *bifida* (= *G. bifida* v. Boenn.).

47. Löhr, *Notizen über die Flora von Trier* (Flora, XX, 1837, p. 361). — Décrit une variété *glandulosa* du *G. Ladanum* qui n'est autre que le *G. intermedia* Vill.

48. Ortmann, *Beiträge zur Flora Böhmens* (Weitenweber's Beiträge zur gesammten Natur- und Heilwissenschaft, III, 1838, p. 217; reproduit par Schlechtendal dans les « Litteraturberichte » du *Linnaea,* XIII, p. 17). — Ortmann décrit son *G. urticaefolia,* attribué à tort à Tausch par plusieurs auteurs; cette plante est synonyme du *G. Tetrahit* var. *silvestris* Schlecht.

49. Fries, *Novitiarum florœ succicœ mantissa altera,* pp. 38-39. 1839. — Fries fait du *G. bifida* v. Boenn. une sous-espèce du *G. Tetrahit;* il y distingue deux variétés : *virens* et *pallens.*

50. Opiz, *Mein Naturalien- Tausch- Unternehmen am Schlusse des Jahres* 1839 (Flora, XXIII, 1839, *Intelligenzbl.,* n° 1, p. 13). — Cite, sous le n° 1075, un *G. tridentata* dont nous n'avons nulle part pu trouver la description.

51. Vaucher, *Histoire physiologique des plantes d'Europe,* III, pp. 647-650, 1841. — Considère le *G. ochroleuca* (*dubia*) comme intermédiaire entre les *G. Ladanum* et *Tetrahit.* L'auteur relève l'affirmation de Bentham, que la foule des variétés du genre *Galeopsis* serait due à la disposition des organes sexuels; cette disposition lui paraît, et avec raison, être analogue à celle d'une foule d'autres Labiées à labre corollaire voûté. Vaucher dit avoir vu, dans un été sec, le *G. Ladanum,* à la montée de la Forclaz au-dessus de Martigny (Valais), couvrir la route de ses petites fleurs blanches (??) et très peu nombreuses (?), et cette même plante, sur les bords des torrents qui descendent dans la vallée de Chamounix, présenter un tel développement et des feuilles tellement élargies, qu'on l'aurait facilement considérée comme

Digitized by Google

une espèce distincte; mais elle reprenait ses dimensions ordinaires dès qu'on descendait dans la plaine. Pour l'auteur, ces différences s'expliquent par la nature du sol (qu'il n'indique pas), mais il lui semble nécessaire d'admettre l'hybridité pour obtenir la formation des « variétés remarquables qui croissent mêlées dans le même champ, par exemple le brillant *Versicolor* avec le *Tetrahit* commun ». Pour ceux qui connaissent un peu les formes de *Galeopsis*, cette dernière phrase paraitra bien obscure. Selon Vaucher, le *G. Ladanum* aurait tellement besoin des cultures, qu'on ne le retrouverait jamais dans « les contrées sauvages où la main de l'homme n'a encore rien changé ». Le *G. Tetrahit* rechercherait de préférence les habitations et les terrains nouvellement défrichés; il serait la seule espèce qui se retrouverait dans l'intérieur de l'Asie.

52. C. Koch, *Catalogus plantarum quas in itinere per Caucasum, Georgiam, etc.* (Linnaea, XVII, 1843, p. 298). — Signale une var. *simplex* du *G. Ladanum* qui n'est que le *G. intermedia* Vill.

53. Scheele, *Beiträge zur deutschen und schweizerischen Flora* (Flora, XXVI, 1843, p. 667). — Se demande pourquoi quelques botanistes veulent voir dans le *G. intermedia* Vill. un hybride des *G. Ladanum* et *Tetrahit*, et insiste sur l'absence de renflements moteurs dans la plante en question. Le *G. bifida* serait une variété du *G. Tetrahit*, mais les autres espèces : *G. Ladanum, ochroleuca* (*dubia*), *Tetrahit, versicolor* (*speciosa*) et *pubescens* sont des groupes à caractères constants et tranchés.

54. C. John, *Ueber einige Pflanzen der Berliner Gegend* (Bot. Zeitung, I, 1843, pp. 691-692). — Assimile la variété *silvestris* Schlecht. du *G. Tetrahit* au *G. bifida* v. Boenn. John désigne sous le nom de *G. stricta* un intermédiaire entre les *G. Tetrahit* et *pubescens*.

55. Schultz, in *Bot. Zeitung*, II, 1844, p. 843. — Fait du *G. bifida* un *G. Tetrahit* var. *bifida* F. Sch., sans remarquer que cela avait été fait avant lui par Lejeune et Courtois, Schönheit, Mutel, et Scheele.

56. C. F. Hellwig, *Beobachtungen über einige abweichende Pflanzenformen der Sommerfelderflora* (Rabenhorst's botanisches Centralblatt für Deutschland, I, 1846, pp. 141-145). — Décrit d'une manière très détaillée les modifications que l'on trouve sur des échantillons intermédiaires aux *G. pu-*

Digitized by Google

bescens et *Tetrahit*. Les assertions de l'auteur concernant les formes du groupe *Tetrahit* dépourvues de renflements moteurs sont évidemment inexactes; si réduits que soient les échantillons, les renflements existent toujours, et sont faciles à constater anatomiquement. Hellwig considère son groupe *Tetrahit-pubescens* comme un groupe d'hybrides.

57. Visiani, *Flora dalmatica*, II, p. 213, 1847. — Crée une tribu des *Galeopsideae* essentiellement basée sur la déhiscence transversale des anthères, contenant le seul genre *Galeopsis* et placée entre les Stachydées et les « Léonurées ». Si réellement le caractère indiqué correspondait à la réalité, la création d'une tribu spéciale serait parfaitement justifiée; mais nous avons vu que ce n'était pas le cas. Visiani distingue dans le *G. Ladanum* trois variétés : *lalifolia, intermedia* et *angustifolia;* de même, dans le *G. Tetrahit*, il énumère les trois formes : *parviflora, major et pubescens.*

58. Bartling, *Index seminum horti acad. goettingensis*, 1848, p. 4. — Décrit une belle espèce nouvelle, le *G. pyrenaïca.*

59. Jordan, in *Catalogue du jardin de Dijon*, 1848, p. 19. — Décrit une forme remarquable du *G. speciosa* Mill. sous le nom de *G. sulfurea.*

60. Bentham, *Labiatae*, in DC., Prodromus, XII, 1848. p. 498, — Ne reconnaît que trois espèces : le *G. ochroleuca* Lamk. (*dubia*), le *G. Ladanum* L. avec deux variétés : *parviflora* et *spinosa*, le *G. Tetrahit* L. avec trois variétés : *parviflora, pubescens* et *grandiflora.*

61. C. Koch, *Beiträge zu einer Flora des Orients* (Linnaea, XXI, 1848, pp. 680-681).— Décrit un *G. glandulosa* qui est identique avec le *G. intermedia* Vill., et rabaisse, mais sans le discuter, le *G. acuminata* Reichb. au rang de variété du *G. Tetrahit.*

62. Bartling, dans les *Ann. des sciences nat.*, 3me série, XI, 1849, p. 256. — Reproduction du n° 58.

63. Jordan, *Einige neue Pflanzen der Flora Frankreichs* (Flora, XXXII, 1849, p. 452). — Reproduction du n° 59.

64. Jordan, *Plantae novae* (Linnaea, XXIII, 1850, p. 47). — Reproduction du n° 59.

65. Grenier et Godron, *Flore de France*, II, p. 684, 1852.— Decrivent la variété *arenaria* du *G. Ladanum.*

Digitized by Google

66. Willkomm, *Sertum florae Hispaniae* (Flora, XXXV, 1852, pp. 282-283). — Décrit une forme remarquable du *G. Ladanum* sous le nom de *G. carpetana* Willk. et Costa.

67. Grisebach et Schenk, *Observationes quaedam de plantis quas in itinere alpino 1851 suscepto, etc.* (Linnaea, XXV, 1852, p. 606). — Insistent de nouveau sur la séparation spécifique des *G. Ladanum* (*intermedia*) et *angustifolia*.

68. Metsch, *Darstellung einiger selteneren, besonders in der Grafschaft Henneberg einheimischen Varietäten und Formen von phaneroganischen Pflanzenarten* (Bot. Zeitung, X, 1852, p. 282). — Distingue dans le *G. pubescens* deux variétés : *genuina* et *mollis*.

69. Crépin, *Sur le Galeopsis Ladano-ochroleuca* (Bull. Acad. des scienc. de Belg., t. XX, 3me partie, pp. 58-59, 1853). — M. Crépin attire, pour la première fois, l'attention sur le groupe d'hybrides qui existe entre les *G. ochroleuca* (*dubia*) et *Ladanum*, et en expose les caractères avec sagacité.

70. Reuter, *Espèces nouvelles ou critiques* (Bull. soc. Hallérienne de Genève, II, 1854, p. 27). — Décrit sous le nom de *G. Reichenbachii* une remarquable variété du *G. Tetrahit*. Reuter distingue — outre le *G. angustifolia* — un *G. Ladanum* vrai, du *G. intermedia* : c'est un point sur lequel nous reviendrons dans notre chapitre de systématique synthétique.

71. Wirtgen, *Galeopsis Ladanum* L. *und G. ochroleuca* Lamk., *eine botanische Untersuchung* (Verhandl. des naturhistor. Vereins der preuss. Rheinlande und Westphalens, XI, 1854, pp. 437-448). — Redécrit le *G. Ladanum-ochroleuca* de M. Crépin. Examinant ensuite les rapports qui existent entre les deux espèces, Wirtgen ne les croit pas distinctes, vu la série de formes intermédiaires qui les relie. Quoi de plus naturel cependant que cette série intermédiaire après l'examen de l'hybridité qui en est la cause et que l'auteur lui-même reconnait ? Wirtgen parle d'un *G. Tetrahit-ochroleuca*. L'existence de ce groupe d'hybrides est pour nous extrêmement invraisemblable ; nous n'avons jamais vu un seul exemplaire, parmi des milliers, qui nous ait fait songer un instant à un semblable rapprochement.

72. Timbal-Lagrave, *Note sur une nouvelle espèce du genre Galeopsis*

Digitized by Google

(Bull. Soc. bot. de France, I, 1854, p. 214). — Signale sous le nom de *G. Filholiana* une belle variété pyrénéenne du *G. Ladanum*.

73. Jordan, dans Billot, *Annotations à la flore de France et d'Allemagne*, 1855, p. 21. — Décrit son *G. praecox* qui représente une race alpestre du *G. Tetrahit*.

74. Bamberger, *Bemerkungen über einige in meinem diessjährigen Verzeichniss aufgeführten pflanzen* (Flora, XXXIX, 1856, p. 736). — Décrit une variété *glandulifera* du *G. latifolia* Hoffm. (*intermedia*).

75. Wolfner, *Kritische Bemerkungen über mehrere neue, seltene oder zweifelhafte Pflanzen der Flora Böhmens* (Flora, XXXIX, 1856, p. 346). — Insiste sur la distinction du *G. urticaefolia* Ortm., dont il attribue la paternité à Tausch.

76. Koch, *Gynopsis Florae germanicae et helveticae*, ed. 2, II, 1857, pp. 489-490. — Résume son travail de 1833 sans rien y ajouter de nouveau, si ce n'est les noms spéciaux donnés aux états hétéranthiques et dont l'auteur s'était justement passé dans son premier article.

77. Boreau, *Flore du centre de la France*, 3e éd., 1857, pp. 525-527. — Signale un *G. elegans* qui est une forme robuste du *G. dubia*. Boreau reproduit à ce sujet l'aventureuse hypothèse, due à Wirtgen, d'une combinaison *Tetrahit-dubia;* il indique à tort le *G. pubescens* dans le centre de la France.

78. Reichenbach fil., *Icones florae germanicae et helveticae*, XVIII, 1858, pp. 16-18. — Distingue onze espèces. *G. ochroleuca* Lamk. (*dubia*), *latifolia* Hoffm. (*intermedia* Vill.), *canescens* Schultes, *angustifolia* Ehrh., *Reuteri*, remarquable espèce nouvelle des Alpes maritimes, *pyrenaïca* Bartl., *Tetrahit* L., *Reichenbachii* Reut., *bifida* v. Boenn., *versicolor* Curt. (*speciosa*) avec une variété *sulfurea* (*G. sulfurea* Jord.) et *pubescens* Bess.

79. Jordan in Billot, *Annotations à la flore de France et d'Allemagne*, juin 1858, p. 130. — Élève au rang d'espèce la variété *arenaria* G. et G. du *G. Ladanum*, sous le nom de *G. arvatica*.

80. Willkomm, *Pugillus plantarum novarum peninsulae pyrenaïcae* (Linnaea, XXX, 1859, pp. 120-137). — Décrit la var. *nana* du *G. pyrenaïca*.

Digitized by Google

81. Loret, *Glanes d'un botaniste* (Bull. Soc. bot. de France, II, 1859, p. 794). — Cite comme synonyme du *G. arvatica* Jord. le *G. divergens* Timb. Lagr. inédit.

82. de Rochebrune et Savatier, *Catalogue raisonné des plantes phanérogames croissant spontanément dans le département de la Charente*, 1860, p. 168. — On trouve dans ce catalogue « raisonné » l'observation suivante : « Dans tous les auteurs que nous avons consultés, nous voyons deux divisions établies dans le genre *Galeopsis*, à savoir : tiges non gonflées sous les nœuds et tiges gonflées sous les nœuds. Nous avons acquis la conviction et nous possédons des échantillons qui sont une preuve irréfutable de la non-valeur de ce caractère. Nos échantillons ont été cueillis dans un vaste champ couvert de *G. angustifolia*, et tous indistinctement présentent au point d'insertion des rameaux avec la tige principale des renflements volumineux d'un diamètre de 5 millimètres. Ces renflements ne sont point dus, comme on pourrait le croire, à une cause étrangère : nous nous sommes assurés qu'ils constituent un caractère parfaitement tranché et constant, caractère que nous considérons comme particulier au genre *Galeopsis* et comme ne devant pas servir à former deux groupes différents. L'abondance du *G. angustifolia* dans les moissons aurait dû contribuer à faire connaître cet état de la plante, mais il arrive presque toujours que les plantes les plus communes étant par cela même les moins étudiées, bien des faits restent inaperçus, et que la majorité des auteurs copient leurs devanciers, sans avoir voulu vérifier par eux-mêmes le plus ou moins de justesse de leurs observations. »

Les auteurs auraient avec raison pu s'appliquer à eux-mêmes leurs sages prescriptions au sujet de l'étude des plantes vulgaires. Tout commentaire sur leurs observations serait superflu : elles sont fausses d'un bout à l'autre; c'est à peine si l'on peut mitiger ce jugement, en supposant de la part des deux floristes quelque étrange série de confusions [1].

[1] Il se pourrait que Rochebrune et Savatier aient pris les brides épaissies qui relient les bases des pétioles et les parties collenchymateuses épaissies placées sur ces dernières pour des renflements moteurs, mais une confusion pareille semble presque incroyable.

Digitized by Google

83. Jordan, *Quelques mots sur le* Geranium purpureum Vill. *suivis de la description de deux plantes nouvelles des environs de Grenoble* (Bull. Soc. bot. de France, VII, 1860, pp. 606-608). — Jordan décrit sous le titre de *G. Verloti* une race alpestre du *G. Tetrahit;* il énumère ensuite et décrit très imparfaitement cinq autres formes : *G. alpicola, Gacognei, leucantha, Navieri et cerino-alba.*

84. Timbal-Lagrave in *Billotia*, 1861, pp. 18-20. — Décrit une remarquable sous-espèce du *G. villosa,* son *G. nepetaefolia* Timbal, et croit pouvoir identifier son *G. Filholiana* avec le *G. glaucescens* Reut. inéd. C'est une erreur, car le *G. glaucescens* Reut. ou *Reuteri* Reichb. f. est une espèce différente, endémique dans les Alpes maritimes.

85. Rapin, *Guide du botaniste dans le canton de Vaud,* 2e éd., 1862, pp. 465-466. — Abaisse les *G. praecox* Jord. et *Reichenbachii* Jord. au rang de variétés du *G. Tetrahit.*

86. Kanitz, *Reliquiae Kitaibelianae, III et IV, Iter marmarosiense,* etc. (Abhandl. der zcolog.-bot. Gesellsch. in Wien, XIII, 1863, p. 76). — Mentionne les noms de trois espèces de Kitaibel, avec localités, lesquelles formes n'ont jamais été décrites. Ce sont les *G. saligna, tuberosa* et *latifolia.*

87. Hagena, *Zur oldenburgischen Flora* (Bot. Zeitung, XXI, 1863, p. 387). — Rend compte d'expériences poursuivies pendant plusieurs années, dans lesquelles il a cultivé le *G. bifida* v. Bœnn. dans différentes conditions de terrain et d'exposition, et l'a trouvé absolument constant.

88. Timbal-Lagrave, *Excursion scientifique à Bagnères-de-Luchon* (Septième session du Congrès pharmac., 1863, p. 11). — Revient sur son identification des *G. Filholiana* Timb. et *glaucescens* Reut (*Reuteri*).

89. Martrin-Donos, *Florule du Tarn,* 1864, p. 565. — Décrit un *G. Laramberguei,* qui est une variété du *G. Ladanum,* mais que la description permet difficilement d'identifier.

90. Timbal-Lagrave, *Rapport sur l'herborisation faite à Esquierry* (Bull. Soc. bot. de France, XL, 1864, sess. extr., p. lxxxiii). — Décrit le *G. Ladanum* var. *amaurophylla* Timb.

91. Ascherson, *Flora der Provinz Brandenburg,* I, 1864, p. 526. -

Digitized by Google

Fait du *G. dubia* Leers un *G. Ladanum* var. *villosa*, avec une sous-variété *umbrosa*, et considère aussi le *G. bifida* v. Bœnn. comme une forme du *G. Tetrahit*.

92. Heidenreich, in *Bericht über die Versammlung des preuss. bot. Vereins in Tilsit am 6ten Juni 1865*, pp. 55-56. — Décrit avec soin l'hybride *G. pubescens* × *Tetrahit*, et lui donne le nom malheureux de *G. intermedia*, depuis longtemps en usage pour une autre plante.

93. Grenier, *Flore de la chaine jurassique*, 1865, pp. 627 et seq. — Donne le nom de *vulgaris* à la var. *silvestris* du *G. Tetrahit*. Il rabaisse au rang de variétés les *G. Reichenbachii* Rent. et *praecox* Jord., ce qui avait déjà été fait trois ans auparavant par Rapin.

94. de Vicq et Bruttelette, *Catalogue des plantes de la Somme*, 1865, p. 185. — Décrivent, sous le nom de *littoralis*, une forme du *G. Ladanum* var. *canescens*.

95. Schur, *Enumeratio plantarum Transilvaniae*, 1866, pp. 536-537. — Décrit une var. *subalpina* du *G. bifida* et du *G. versicolor* (*speciosa*), ainsi qu'une variété *setosa* du *G. pubescens*.

96. Kuntze, *Taschenflora von Leipzig*, 1867, pp. 110 et 111. — Fait du *G. dubia* un *G. Ladanum* var. *ochroleuca*. Dans le *G. Tetrahit* — outre les états d'hétéranthie qui sont décrits comme variétés et dont nous ne parlons pas — l'auteur allemand signale une var. *typica*, une var. *versicolor* (*G. speciosa*), une var. *bifida*, une var. *aspera* et une var. *pubescens* (*G. pubescens*).

97. Ardoino, *Flore des Alpes maritimes*, 1867, p. 299. — Décrit un *G. glaucescens* Reut. qui est synonyme du *G. Reuteri*.

98. Willkomm et Lange, *Prodromus florae hispanicae*, 1870, II, p. 439. — Résument leurs trouvailles en Espagne et décrivent un *G. dubia* Leers var. *brevifolia*, sur lequel nous reviendrons.

99. Verlot, *Catalogue des plantes vasculaires du Dauphiné*, 1872, p. 277. — Contient la description d'une curieuse variété du *G. Ladanum* par Perrier et Songeon, sous le titre de *G. Berteti*.

100. Godron, *Notice sur les explorations botaniques faites en Lorraine*, p. 79 (Mém. de l'Acad. de Stanislas, 1874). — Le perspicace botaniste

Digitized by Google

de Nancy observe que la variété à fleurs purpurines du *G. dubia* ne vient que dans le voisinage du *G. angustifolia*. Il a semé, dans son jardin, à l'automne de 1873, les variétés rose et jaune du *G. dubia;* le nombre des graines de la variété purpurine était prépondérant. L'expérimentateur n'a obtenu, de ces semis, qu'un seul pied, assez petit, à fleurs purpurines; tous les autres pieds ont donné des fleurs qui variaient beaucoup de grandeur et où le jaune dominait; sur beaucoup d'entre elles, la couleur purpurine laisse, à la base du labiole, tantôt de simples traces, tantôt des taches plus ou moins étendues. En résumé, les semis de Godron ont montré toutes les formes intermédiaires entre le rose et le jaune, mais c'est à la forme jaune que les intermédiaires ont de la tendance à revenir.

101. Timbal-Lagrave, in *Bull. soc. dauphinoise*, n° 205, 1874. — Mentionne, sans la décrire, une variété du *G. Ladanum* sous le nom de *G. orophila.*

102. Desétangs, *Note sur quelques plantes intéressantes* (Bull. Soc. bot. de France, XXIII, 1876, p. 203). — Décrit une remarquable variété du *G. Ladanum* sous le nom de *G. glabra;* cette variété s'est montrée absolument constante au semis pendant plusieurs années d'expériences.

103. Ludwig in *Verhandl. des bot. Vereins der Prov. Brandenburg,* XIX, 1877, p. 117. — Donne aux combinaisons hybrides *G. ochroleuca* (*dubia*) × *intermedia* et *ochroleuca* (*dubia*) × *angustifolia* les noms de *G. Haussknechtii* et *Wirtgeni.* Un seul nom suffit amplement pour désigner des formes que l'on ne peut presque pas distinguer.

104. Debeaux, *Recherches sur la flore des Pyrénées,* 1878, p. 101. — Décrit outre la var. *nana* Willk., deux variétés du *G. pyrenaïca :* les var. *genuina* et *mediterranea.*

105. Gremli, *Neue Beiträge zur Flora der Schweiz,* 1880, I, p. 20. — Rabaisse le *G. glabra* Desétangs au rang de variété du *G. angustifolia* Ehrh., sous le nom de var. *glabrescens.*

106. Saint-Lager, *Catalogue de la flore du bassin du Rhône* (Ann. de la Soc. bot. de Lyon, VIII, 1881, n° 2, pp. 626-627). — Donne au *G. Tetrahit* L. le nom de *G. nodosa,* et signale un *G. pallida* Jord. dont nous n'avons pu nulle part trouver la description. Le savant botaniste de Lyon opère quelques

Digitized by Google

rapprochements malheureux, sans doute faute de matériaux suffisants; ainsi, le *G. pyrenaïca* est subordonné au *G. ochroleuca* (*dubia*), le *G. sulfurea* est subordonné au *G. Tetrahit* avec le *G. glaucescens* (*Reuteri*) qui appartient au sous-genre *Ladanum*.

107. Brügger, *Beobachtungen über wildwachsende Pflanzenbastarde der Schweizer und Nachbar-Floren*, p. 102 (Jahresber. der naturforsch. Gesellschaft Graubunden's, 1881). — Signale un *G. speciosa* × *Tetrahit* provenant de Schröcken, dans le Verarlberg, qui nous est inconnu, mais n'a rien d'invraisemblable. M. Brügger donne, en outre, le nom de *G. Poolii* à un *Galeopsis* du Prätigau (Grisons) qui correspondrait à la formule : *pubescens* × *Tetrahit*, et qu'il a observé de 1856 à 1880. La dénomination de *G. Poolii* est inutile, puisqu'il existe déjà, pour l'hybride en question, les noms de *G. acuminata*, *G. stricta*, etc.; de plus, nous n'avons jamais vu d'exemplaires du *G. pubescens* provenant des Grisons, sauf de la vallée de Misocco et du val Bregell, dans la haute Valteline : l'interprétation de M. Brügger nous paraît donc douteuse. L'auteur a jugé à propos de ne donner aucun détail descriptif sur ses deux plantes.

108. E. Fick, *Flora von Schlesien*, 1881, p. 353. — Attribue le *G. Tetrahit* × *pubescens* à Lasch; nous n'avons pas su retrouver le travail de Lasch auquel il est fait allusion.

109. Borbas. *Békésmegye flórája*, p. 8 (*Értekezétek a term. tud. köréből, kiadja a M. T. Akadémia*, XI, 1881). — Signale une variété *leiotricha* du *G. speciosa*.

110. Burnat, in *Bull. soc. dauphinoise*, 1883, p. 428. — Établit la synonymie des *G. glaucescens* Reut. et *Reuteri* Reichb. f., et considère ce dernier comme une forme du *G. Ladanum*.

111. Haussknecht in *Mittheil. des bot. Vereins für Gesamtthüringen*, 1884, p. 8. — Considère le *G. bifida* v. Bœnn. comme une espèce autonome, parce qu'elle formerait avec le *G. Tetrahit* des hybrides stériles qu'il nomme *G. Ludwigii*. M. Haussknecht fait encore mention d'un *G. angustifolia* × *latifolia* trouvé par lui à Zeulenrode.

112. Timbal-Lagrave, in *Bull. soc. dauphinoise*, 1885, p. 575. — Décrit un *G. Ladanum* var. *campestris*.

Digitized by Google

113. Borbas, *Geographia atque enumeratio plantarum comitatus Castriferrei in Hungaria*, 1887-1888, pp. 220-221. — Décrit un *G. Frehi* qui nous est inconnu, et subordonne, à tort, le *G. urticaefolia* comme variété au *G. pubescens*. L'auteur décrit une variété *setulosa* du *G. pubescens;* c'est un état de la plante qui était connu depuis fort longtemps et avait été désigné autrefois par Metsch du nom de var. *mollis*, et par Schur, sous le nom de var. *setosa*. M. de Borbas décrit encore un *G. flavescens* qui est synonyme du *G. speciosa* à l'état micranthe.

114. Timbal et Marçais, dans les *Scrinia de Magnier*, n° 1513, 1887. — Décrivent sous le nom de *G. longiflora* une forme du *G. Ladanum* subsp. *intermedia* déjà connue depuis fort longtemps.

115. Saint-Lager, *Étude des fleurs de Cariot*, 8e éd., 1889, pp. 673-675. — Réduit définitivement le *G. sulfurea* Jord au rang de simple variété du *G. Tetrahit*.

116. R. Beyer, *Beiträge sur Flora der Thäler Grisanche und Rhêmes in den grajischen Alpen* (Wissensch. Beilage zum Programm des Andreas-Real-Gymnasiums zu Berlin, 1891). — Signale une variété *pumila* du *G. intermedia*, et une variété *nana* du *G. speciosa*.

117. J. Briquet, *Les Labiées des Alpes maritimes*, 1891, pp. 157-178. — Dans ce travail, où nous avons donné les principaux caractères morphologiques, anatomiques et biologiques du genre et de ses subdivisions, nous avons étudié les *G. Reuteri, Ladanum, pubescens, speciosa* et *Tetrahit*. Le *G. Ladanum* possédait huit variétés : *spinosa, Berteti, orophila, Kerneri, glabra, canescens, arenaria* et *carpetana*, qui toutes rentrent dans la sous-espèce *angustifolia*, tandis que la sous-espèce *intermedia* ne possédait pas de subdivisions. Le *G. pubescens* se divisait en deux variétés : *genuina* et *Carthusianorum*. Le *G. speciosa* comprenait deux sous-espèces : *speciosa* et *sulfurea*. Enfin, dans le *G. Tetrahit*, la sous-espèce *Tetrahit* possédait les six variétés *arvensis, silvestris, idiotropa, praecox, Verloti* et *Reichenbachii*, tandis que la sous-espèce *bifida* restait homogène.

118. J. Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, 1891, pp. 27-30. — Dans cette brochure, nous avons brièvement signalé et nommé

Digitized by Google

les formes suivantes, non mentionnées dans l'ouvrage précédent : *G. Ladanum* var. *Filholiana,* var. *odontata,* var. *calcarea,* var. *intermedia,* var. *abundantiaca ; G. dubia* subsp. *dubia ,* subsp. *nepetaefolia ; G. speciosa,* var. *sulfurea,* var. *hispidior Frivaldsky,* subsp. *pallida,* var. *pallida ; G. Tetrahit,* var. *lazistanica.*

Nous avons en outre, dans notre chapitre de systématique analytique, consulté ou puisé des renseignements dans les ouvrages suivants :

119. Baillon, *Monographie des Labiées* (Histoire des plantes, 1891, XCVII).

120. Balbis, *Miscellanea botanica,* 1804-1806, I.

121. Baxter, *British phanerogamous botany,* 1834-1843.

122. Bentham et Hooker, *Genera plantarum,* 1876, II, 2.

123. Brandza, *Prodromul florei Române,* 1879-1883.

124. De Notaris, *Repertorium florae liguricae* (Mémoires de l'Académie de Turin, 1844, VIII).

125. Dietrich, *Flora regni borussici,* 1833-1844.

126. Endlicher, *Genera plantarum,* 1836-1840.

127. Gremli, *Excursionsflora für die Schweiz,* 2e éd., 1874.

128. Kanitz, *Plantae Romaniae hucusque cognitae,* 1879-1881.

129. Ledebour, *Flora rossica,* 1846-1851, III.

130. Lloyd, *Flore de l'ouest de la France,* 1854.

131. C.-A. Meyer, *Verzeichniss der Pflanzen welche im Caucasus u. s. w. eingesammelt worden sind,* 1831.

132. Nees, *Plantae medicinales,* 1828.

133. Nees, *Genera plantarum florae germanicae,* 1843-1853.

134. Nyman. *Conspectus florae europeae,* 1881, fasc. III.

135. Nyman, *Ejusdem operis supplementum secundum,* pars 2, 1890.

136. Oeder, *Flora danica,* 1781-1845.

137. Palmstruch, etc., *Svensk Botanik,* 1802-1838.

138. Pancic, *Elementa principatus Bulgariae.*

139. Pancic, *Verzeichniss der in Serbien wildwachsenden Phanerogamen,* 1856.

Digitized by Google

140. Rouy, *Suites à la flore de France*, 1887, fasc. I.

141. Reuter, *Catalogue des plantes vasculaires des environs de Genève*, 1861.

142. Schlosser et de Farkas, *Flora croatica*, 1869.

143. Smith, *Flora britannica*, 1800, II.

144. Smith et Sowerby, *English botany*, 1790-1814.

145. Sturm, *Deutschland's Flora*, 1798-1849.

146. Thomé, *Flora von Deutschland*, 1889.

147. Trevelyan, *On the vegetation and temperature of the Faroë islands*. Florence, 1837 (extrait du Edinburgh new philosoph. Journal for January 1835).

148. Kuntze, *Revisio generum plantarum*, 1891, II, p. 521. — Nous avons constaté à notre étonnement, en recevant cet ouvrage, alors que notre monographie était entièrement terminée, que le genre *Galeopsis* devait cesser d'exister sous ce nom ! Un examen plus approfondi des raisons invoquées par l'auteur, nous a cependant rapidement convaincu de l'illégitimité complète des changements proposés par lui. M. Kuntze voudrait appeler *Ladanum* le genre *Galeopsis*, parce que Linné l'aurait ainsi désigné dans l'édition première du *Systema naturae* qui, selon M. Kuntze, est le point de départ des genres. En examinant ce *Systema* dans la bibliothèque de M. de Candolle, nous y avons constaté la citation d'une série de noms de genres appartenant aux Labiées et dépourvus de toute espèce de diagnose. Peut-on décorer un pareil travail du titre de *Genera* et le mettre à la base de notre nomenclature générique ? Le choix du genre *Ladanum* dans ce *Systema* nous paraît aussi très discutable. En effet, nous trouvons dans la même colonne un *Galeopsis* et un *Ladanum* D(illen) avec le *Tetrahit* D(illen) qui lui est accolé (en synonyme ?). Qu'est-ce que l'auteur suédois entendait par ces trois termes ? C'est ce que nous ignorons entièrement, vu l'absence de diagnose. Cependant, comme Linné a abandonné plus tard un certain nombre de genres dont les noms sont cités dans le *Systema*, il nous semble probable qu'il entendait plutôt indiquer les groupes des auteurs rentrant dans telle ou telle de ses classes qu'établir les genres eux-mêmes; c'est pour cette raison qu'il cite les

Digitized by Google

Ladanum et les *Tetrahit* de Dillen avec les *Galeopsis* [1]. On voit donc qu'un ouvrage dépourvu de diagnoses [2], qui donne lieu à des interprétations variées, lesquelles dépendent entièrement des conceptions individuelles de chaque auteur, ne saurait être considéré comme un *Genera* valable. Son adoption comme base de nomenclature serait une source d'obscurités et de discussions sans fin; aussi espérons-nous que les botanistes seront unanimes à rejeter l'innovation inutile de M. Kuntze. La tentative malheureuse de l'auteur allemand démontre une fois de plus la nécessité absolue de s'en tenir au *Genera plantarum*, comme point de départ de la nomenclature générique, ainsi que l'a recommandé M. Alph. de Candolle [3]. Les jugements que M. Kuntze porte du reste sur le genre « *Ladanum* » sont assez superficiels; il supprime le *G. dubia* Leers, en se basant sur les indications déjà anciennes de M. Ascherson, sans tenir compte des faits d'hybridité découverts auparavant et bien étudiés depuis; il qualifie, en bloc et sans preuves à l'appui, tous les groupes et formes de « *Ladanum* » de la dénomination générale de « *microspecies* »; nos sous-genres *Ladanum* et *Tetrahit* constituent donc, pour M. Kuntze, deux espèces : le *Ladanum dubium* et le *Ladanum Tetrahit*.

CHAPITRE XXVIII.

COLLECTIONS MISES EN OEUVRE POUR L'ÉTUDE DE LA SYSTÉMATIQUE DU GENRE *GALEOPSIS*.

Quoique le nombre des échantillons de *Galeopsis* que nous avons pu étudier soit assez considérable (plusieurs milliers), il s'en faut cependant de beau-

[1] Les interprétations diverses que M. Kuntze propose pour le *Galeopsis* du *Systema* sont autant d'hypothèses gratuites Pourquoi le *Galeopsis* du *Systema* ne serait-il pas le *Galeopsis* du *Genera*, et pourquoi les *Ladanum* et *Tetrahit* cités n'en seraient-ils pas synonymes? Il est permis de tout supposer avec des citations tronquées et l'absence de diagnoses; aussi ces suppositions sont-elles sans valeur.

[2] Dire, avec M. Kuntze, qu'une diagnose est implicitement donnée par Linné lorsqu'il répartit ses noms de genres dans des classes et des subdivisions de classe, c'est jouer sur les mots. Les diagnoses données et répétées implicitement sont celles des classes, des sous-classes, etc., et nullement des diagnoses génériques!

[3] A. de Candolle, *Nouvelles remarques sur la nomenclature botanique*, 1883.

Digitized by Google

coup que nous ayons tout vu, ou même vu tout ce qu'il eût été désirable et nécessaire d'examiner.

C'est ainsi que nous avons appris, après coup, par M. le Dr Ludwig de Greiz, l'existence, en Allemagne, de collections particulières, étendues, et excessivement riches en formes rares et intéressantes de notre genre. Néanmoins, nous croyons que les matériaux mis à notre disposition étaient suffisants pour nous faire une idée claire de la constitution systématique de notre genre. Aux monographes futurs, nos successeurs, d'étendre encore le champ que nous avons exploré!

Voici la liste des herbiers que nous avons étudiés; les abréviations entre parenthèses se rapportent au mode de citation de ces herbiers dans notre chapitre de systématique analytique.

Albertville.

1. Herbier Perrier (Flore d'Europe; la plus riche collection pour les Alpes françaises de Savoie).

Autun.

2. Herbier Gillot. — Communiqué une ou deux formes.

Berlin.

3. Herbiers du Musée royal :
   - *a.* Herbier général, — h. Berol. gen.
   - *b.* Herbier d'Europe, — h. Berol. eur.
   - *c.* Herbier Willdenow, — h. Willd.
   - *d.* Herbier Engler, — h. Engl.
4. Herbier Beyer (Flore d'Europe).

Breslau.

5. Herbier Callier (Flore d'Europe).

Bruxelles.

6. Herbiers du Jardin botanique de l'État :
   - *a.* Herbier général, — h. Brux. gen.
   - *b.* Herbier général, — h. Brux. belg.

Digitized by Google

Coïmbra.

7. Herbier Willkomm, — h. Willk. (appartenant à l'Université).

Gênes.

8. Herbiers de l'Université et de De Notaris.

Genève.

9. Herbiers de Candolle :

   a. Herbier du Prodrome, — h. DC. prodr.
   b. Herbier général postérieur au Prodrome, — h. DC. nov.

10. Herbiers Boissier :

   a. Herbier personnel de Boissier, — h. Boiss. propr.
   b. Herbier général postérieur à Boissier, — h. Boiss. nov.

11. Herbiers Delessert (Conservatoire botanique) :

   a. Herbier général, — h. Deless. gen.
   b. Herbier de France, — h. Deless. gall.
   c. Herbier helvétique, — h. Deless. helv.
   d. Herbier de Haller fil., — h. Hall. f.

12. Herbier Ayasse (Flore d'Europe).

13. Herbier Chenevard (Flore de Suisse).

14. Herbier Romieux (Flore d'Europe).

15. Herbier Briquet (Flore d'Europe).

Nant près Vevey (Suisse).

16. Herbiers Burnat :

   a. Herbier d'Europe, — h. Burn.
   b. Herbier des Alpes maritimes, — h. Alp. mar.
   c. Herbier Thuret, — h. Thur.
   d. Par l'intermédiaire de M. Burnat, nous avons eu en main des échantillons de M. Bicknell (Alp. mar.).

Nice.

17. Herbier du Musée (Flore du midi de la France).

Paris.

18. Herbier Hariot (échantillons de Désétangs).

Digitized by Google

Turin.

19. Herbiers du Musée royal de botanique :
    a. Herbier général, — h. Taur.
    b. Herbier d'Allioni, — h. All.
    c. Herbier de Lisa, — h. Lisa.

Uriages près Grenoble.

20. Herbier Arvet-Touvet. — Communiqué une ou deux formes.

Valeyres (Vaud, Suisse).

21. Herbier Barbey, comprenant l'herbier Reuter, — h. Barb.

Weimar.

22. Herbier Haussknecht.

Zürich.

23. Herbiers de l'École polytechnique :
    a. Herbier général, — h. Tur. gen.
    b. Herbier helvétique, — h. Tur. helv.
24. Herbier Jäggi (Flore d'Europe).
25. Herbier Käser (Flore d'Europe).

En résumé, nous avons tenu compte, en tout ou en partie, de 40 collections différentes.

CHAPITRE XXIX.

SYSTÉMATIQUE SYNTHÉTIQUE.

Nos études nous ont amené à reconnaître dans le genre *Galeopsis*, sept groupes nettement définis et non reliés les uns avec les autres par des formes intermédiaires non hybrides à l'époque actuelle : ce sont donc des espèces [1].

[1] Voy. Hackel, *Monographia Festucarum Europearum*, Cassel et Berlin, 1882, p. 44 et seq.; Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. VIII. — Pour abréger les citations suivantes, nous mentionnerons seulement leur numéros d'ordre du chapitre XXVII.

Digitized by Google

Si nous appliquons le critère de la différenciation morphologique et de la division du travail physiologique à ces sept espèces, pour nous rendre compte du rang hiérarchique qu'elles doivent occuper les unes par rapport aux autres, nous constatons de suite l'existence de deux sous-genres extrêmement tranchés. Dans l'un, la sensibilité géotropique et héliotropique se localise dans une partie déterminée des entrenœuds dont la structure histologique est profondément modifiée pour s'adapter étroitement à ses fonctions spéciales; dans ce sous-genre, le trichome se différencie en poils vecteurs et en poils sétacés, la tige acquiert la faculté de produire des bourgeons sériés, enfin l'appareil floral, par une série de petites modifications de détails, dénote une adaption plus avancée à la pollination par les insectes : c'est le sous-genre *Tetrahit*. Dans l'autre, c'est le contraire de ces caractères qui se manifeste, l'organisation est évidemment moins compliquée, le travail physiologique est moins divisé : tel est le sous-genre *Ladanum*.

Avant d'examiner le contenu de ces sous-genres, tâchons d'obtenir quelque lumière sur leur parenté avec les autres Stachydées, au milieu desquelles, par son organisation entière, doit se placer le genre *Galeopsis*.

On range volontiers le genre *Galeopsis* à côté des *Stachys* (122). La parenté de ces deux genres est indiscutable; ils sont fort voisins l'un de l'autre, mais cette parenté ne dépasse pas, croyons-nous, les limites des rapports étroits qu'affectent, en général, entre eux, les genres dans ce groupe de Stachydées à labre corollaire galéiforme. Les étamines latérales se déjetant souvent de côté, les loges des anthères souvent divergentes, la tectonique générale de la corolle, les nucules arrondies au sommet : tout cela nous paraît éloigner considérablement les *Stachys* des *Galeopsis*. La série *Lagochilus, Ballota, Roylea, Otostegia, Leucas, Leonotis, Phlomis*... diverge dans une direction qui exagère encore les différences constatées entre *Stachys* et *Galeopsis*. Les genres *Moluccella* et *Leonurus* sont également à écarter d'emblée, l'un à cause de son calice extraordinaire, l'autre à cause des colonnes de collenchyme supplémentaires dans la tige et de la tectonique générale de sa corolle qui se rapproche plutôt de celle des *Stachys*. Le genre *Wiedemannia* est évidemment un dérivé des *Lamium* à dent calicinale impaire postérieure différenciée. Par élimination, il reste donc le genre

Digitized by Google

Lamium. Ce genre est, en effet, celui qui, selon nous, se rapproche le plus des *Galeopsis*. Tout d'abord, la structure anatomique de l'appareil végétatif est sensiblement la même dans les deux groupes ; ensuite, l'appareil floral en diffère par des caractères très précis sans doute, et qui permettent une séparation nette des deux genres, mais d'une importance secondaire dans la détermination des affinités. La tectonique générale de la corolle se ressemble à tel point dans les *Ladanum* et les *Galeopsis*, que Linné avait appelé *G. galeobdolon* le *Lamium galeobdolon* (2), et que Crantz avait autrefois entièrement réuni les *Galeopsis* aux *Lamium* (6). Dans la corolle, c'est le même tube cylindrique longuement développé, s'évasant subitement à la partie supérieure pour former une vaste antichambre dont le plafond est parcouru par des cordons dorsaux essentiels et latéraux qui envoient de nombreux cordons pariétaux tapisser les flancs et donner à la gorge la solidité nécessaire. Les *Galeopsis* ont souvent des dents calicinales aristées qui manquent aux *Lamium*; ces derniers, ont sur les lobes latéraux du labiole, des pleuridies qui manquent aux *Galeopsis*, mais en revanche ceux-ci sont pourvus d'apophyses labiolaires. Le premier caractère n'étant pas constant chez les *Lamium*, il ne reste que le second, auquel s'ajoute la structure des anthères caractérisées par la torsion apicale de leur filet et la différenciation des loges en opercule cilié est en utricule. Un fait qui, même dans ce caractère d'une haute valeur différentielle, indique la parenté des deux genres, c'est la présence d'un indument hérissé sur les parois extérieures des anthères de la plupart des *Lamium*, indument qui représente le premier pas vers la haie vectrice de l'opercule anthérien chez les *Galeopsis*.

En résumé, nous pouvons conclure de cette étude que les *Galeopsis* représentent très probablement des dérivés du genre *Lamium*, chez lesquels une adaptation plus avancée à la pollination par les insectes a entraîné l'apparition des deux apophyses labiolaires, une torsion apicale de 90° dans les filets, la différenciation des loges en opercule et en utricule, enfin, la localisation de l'indument vecteur sur les lèvres de l'opercule.

Ajoutons que la distribution géographique des deux genres est la même, c'est-à-dire l'Europe et l'Asie extratropicale ; seul le genre *Lamium* se retrouve dans l'Afrique septentrionale.

Digitized by Google

Les relations génétiques des deux sous-genres *Ladanum* et *Tetrahit* sont sont peu compliquées. C'est évidemment le groupe *Ladanum* qui se rattache le plus étroitement aux *Lamium* et autres Stachydées par son organisation entière. De son côté, le groupe *Tetrahit,* avec sa tige munie de renflements moteurs, ne peut se rattacher aux phylums cités que par l'intermédiaire des *Ladanum.* Les *Tetrahit* sont donc des dérivés des *Ladanum* dont le caractère principal est que la zone apicale de croissance des entrenœuds, non seulement est devenue permanente, mais encore s'est différenciée en un organe spécialement adapté aux fonctions géo- et héliotropiques. Quant à la souche des *Tetrahit* parmi les *Ladanum,* l'induction est impuissante à en formuler une définition exacte. Les faits de parallélisme partiel entre les espèces des deux sous-genres — faits que nous examinerons à la fin de ce chapitre — permettent de proposer plusieurs hypothèses d'égale probabilité à ce sujet.

Dans le sous-genre *Ladanum,* les quatre espèces *G. Reuteri, G. Ladanum, G. dubia* et *G. pyrenaïca,* sont très inégales comme richesse en formes; dans les *Tetrahit* qui ne comptent que trois espèces, *G. pubescens, G. speciosa,* et *G. Tetrahit,* il en est de même.

Et par formes, nous entendons des races reconnaissables à un ou plusieurs caractères, ayant souvent une aire géographique, et se reproduisant constamment par semis. La recherche de ces races, toujours reliées par des formes intermédiaires « inclassables », est de la plus haute importance pour la connaissance des groupes spécifiques.

Leur établissement est basé entièrement sur un travail d'analyse et de synthèse subséquente; il ne dépend pas, selon nous, des données expérimentales que nous donne la culture.

Par la culture, en effet, une sous-espèce comme le *G. Ladanum* subsp. *intermedia* — tellement caractérisée que n'étaient les intermédiaires actuellement existants, nous la considérerions comme un de nos groupes spécifiques les mieux justifiés — est mise sur le même pied que la variété *glabra* du *G. Ladanum* subsp. *angustifolia* (102). Les deux formes sont physiologiquement équivalentes : elles sont constantes. Morphologiquement, au point de vue des caractères et de leur isolement, elles sont d'une valeur très inégale.

Digitized by Google

De plus, la constance en culture, prise comme critère unique dans la distinction des formes, nous fait aboutir à une spécification sans fin. La raison en est dans le fait que le plus grand nombre des formes que l'on distingue par un trait quelconque de structure sont constantes en culture. Les *Galeopsis*, étant annuels, donnent une vérification facile de cette assertion.

Cultivons dans les mêmes conditions le *G. Ladanum* var. *orophila* et le *G. Ladanum* var. *calcarea, en ayant soin d'éliminer les insectes qui les croiseraient immédiatement*, et nous les verrons se reproduire avec tous leurs caractères d'une façon assez constante. Et pourquoi n'en serait-il pas ainsi? L'une des deux races n'est pas plus typique que l'autre, nous ignorons entièrement laquelle des deux dérive de l'autre, leur relations génétiques remontent en tout cas à fort loin en arrière, et on ne voit pas en quoi la culture changerait le calice dans ces deux races. Il en est de même pour les variétés *arvensis* et *silvestris* du *G. Tetrahit;* mais, et c'est là ce que nous avons vu en culture, les formes qui relient entre elles ces deux variétés se montrent tout aussi constantes que les races-types elles-mêmes. D'où il résulte que, par la culture, la plupart des formes se montrent relativement constantes et qu'un œil exercé arrivant à en différencier un nombre toujours croissant avec le nombre des localités qu'il examine, la spécification de ces formes innombrables n'offre pas de limites comme elle n'offre pas non plus d'intérêt systématique.

Cependant, la culture nous renseignant sur la variabilité des organes, est fort utile pour distinguer les modifications héréditaires de celles qui sont individuelles.

La culture montre de plus un phénomène curieux qui fait encore baisser sa propre valeur comme critère systématique : c'est que des caractères qui morphologiquement sont identiques, ont parfois une valeur physiologique différente, c'est-à-dire que la même forme pourra se trouver constante dans une localité et pas dans une autre. Ce phénomène a été signalé récemment et dûment examiné chez les *Hieracium* par MM. Nägeli et Peter. Ces auteurs rapportent que dans leur *Hieracium villosum* subsp. *villosum*, la taille rabougrie se montre dans certains cas comme une adaptation à une exposition et à un climat particuliers, laquelle adaptation n'est que passagère et disparaît déjà l'année suivante si on améliore les conditions de végétation. Dans d'autres cas, par contre, la culture n'amène aucun changement dans le nanisme qui

Digitized by Google

est alors héréditaire [1]. Chez les *Galeopsis*, l'inégale fixité des formes s'est montrée dans un ou deux cas. Nous en citerons un particulièrement instructif parce qu'il s'est produit sur une plante de Jordan soumise à la culture et publiée en exsiccata. Dans les Alpes maritimes, le *G. speciosa* var. *sulfurea* est constant; tout au moins les formes tournant un peu dans la direction de la var. *speciosa* sont-elles très rares; la culture vérifie cette expérience. Dans la localité classique des environs de Lyon, aux Charpennes, le *G. speciosa* var. *sulfurea* est beaucoup moins stable. Jordan, qui en cultivait des pieds typiques, en envoya des graines à Grenier qui les sema dans son jardin de Besançon et en récolta une série d'exemplaires, lesquels furent distribués par Billot dans son exsiccata, sous le n° 1302. Rien de plus inégal que le contenu de ce numéro; certaines parts, les moins nombreuses, sont relativement typiques; d'autres tournent à la var. *speciosa;* un certain nombre, enfin, sont à peine à distinguer de cette dernière forme. Dans les Alpes maritimes, la var. *sulfurea* a donc, en général, la valeur d'une race; aux Charpennes, elle ne possède très souvent plus cette qualité.

Nous avons fait des expériences analogues sur les variétés des *G. Tetrahit* et *pubescens*, qui n'ont pu que nous confirmer dans notre défiance vis-à-vis du critère de la culture dont plusieurs semblent vouloir faire une panacée universelle.

Nous avons constaté, en général, une constance morphologique dans les formes suivantes, soit au moyen de cultures (toujours par semis, les plantes étant annuelles) en pleine terre, soit en vérifiant la production perpétuelle des formes dans une localité déterminée [2] :

G. Reuteri,
G. Ladanum var. *orophila*,
G. Ladanum var. *Kerneri*,
G. Ladanum var. *glabra* (102),
G. Ladanum var. *calcarea*,
G. Ladanum var. *intermedia*,
G. dubia var. *dubia*,
G. pyrenaïca var. *pyrenaïca*,
G. pubescens var. *genuina*,
G. speciosa var. *speciosa*,
G. speciosa var. *sulfurea*,
G. Tetrahit var. *arvensis*,
G. Tetrahit var. *silvestris*,
G. Tetrahit var. *Reichenbachii*,
G. Tetrahit var. *bifida* (87).

[1] Nägeli et Peter, *Die Hieracien Mittel-Europas*, t. II, Archieracien, p. 95. Munich, 1886.

[2] Nous ne tenons pas compte dans cette liste des quelques cas d'inégalité de constance signalés plus haut.

Digitized by Google

Les autres formes du genre non mentionnées dans la liste précédente peuvent se répartir en deux groupes; dans l'un, par la nature même des caractères et la façon dont les herbiers nous renseignent sur leur fréquence et le mode de distribution des formes, il est hors de doute que nous ayons affaire à de véritables races; dans l'autre, ce sont des formes représentées dans les herbiers par un ou deux échantillons dont on ne peut juger qu'imparfaitement, ou des formes dont les caractères ont besoin d'être éprouvés par la culture. On peut, avec M. Hackel, appliquer le nom d'*empiriques* aux formes rentrant dans ce dernier groupe [1]. Ce sera aux monographes futurs à en diminuer graduellement le nombre.

Nous avons dit que le sous-genre *Ladanum* comprenait quatre espèces, les *G. Reuteri, Ladanum, dubia* et *pyrenaïca*.

Le *G. Reuteri,* endémique dans les Alpes maritimes, est une espèce tranchée qui, quoiqu'elle croisse souvent mélangée avec le *G. Ladanum* et n'en diffère que par un petit nombre de caractères, ne présente jamais, à notre connaissance du moins, de formes douteuses éveillant l'idée d'une hybride.

Dans le *G. Ladanum* (fig. 52), deux variétés se rapprochent surtout du *G. Reuteri* : ce sont les var. *spinosa* et *Filholiana*. La première, remarquable par la longueur de ses dents calicinales, ne paraît guère se rencontrer, et d'une façon fort rare, que dans le bassin méditerranéen. La seconde, qui a un peu le port du *G. Reuteri,* est en outre caractérisée par sa serrature foliaire et son calice; elle est endémique dans les Pyrénées.

Immédiatement après ces deux formes, il convient de considérer un groupe de races qui forment pour ainsi dire la région nodale du *subsp. angustifolia :* ce sont les var. *orophila, Kerneri, Berteti, odontota* et *glabra*. C'est à la var. *orophila* que se relient par des intermédiaires les var. *spinosa* et *Filholiana;* elle ne diffère de la var. *Kerneri* que par ses dents calicinales et, de la Serbie jusqu'en Angleterre, est un des représentants les plus communs du *subsp. angustifolia*. Tandis que la forme précédente se rencontre de préférence dans les parties méridionales de l'Europe, la var. *Kerneri,* qui lui est reliée par une série continue d'intermédiaires, paraît plus également répandue. C'est autour de la var. *Kerneri* que gravitent les

[1] Hackel, *Monographia Festucarum Europæarum*, p. 48.

Digitized by Google

var. *Berteti*, *odontota* et *glabra*; ces trois formes ont le calice de la var. *Kerneri* et en diffèrent par des particularités d'un autre ordre. La var. *Berteti* n'est connue que d'une seule localité savoisienne, mais paraît très caractérisée par la forme de ses feuilles et leur singulière serrature. La var. *odontota*, basée sur la serrature de ses feuilles, est encore très empirique et exige de nouvelles études; elle passe par des transitions, non seulement à la var. *Kerneri*, mais encore à la var. *orophila*. Enfin, la var. *glabra* découverte par Desétangs est très remarquable par son absolue glabréité; elle n'est encore connue dans sa forme typique que de deux localités en Europe, mais se montre remarquablement constante au semis (102).

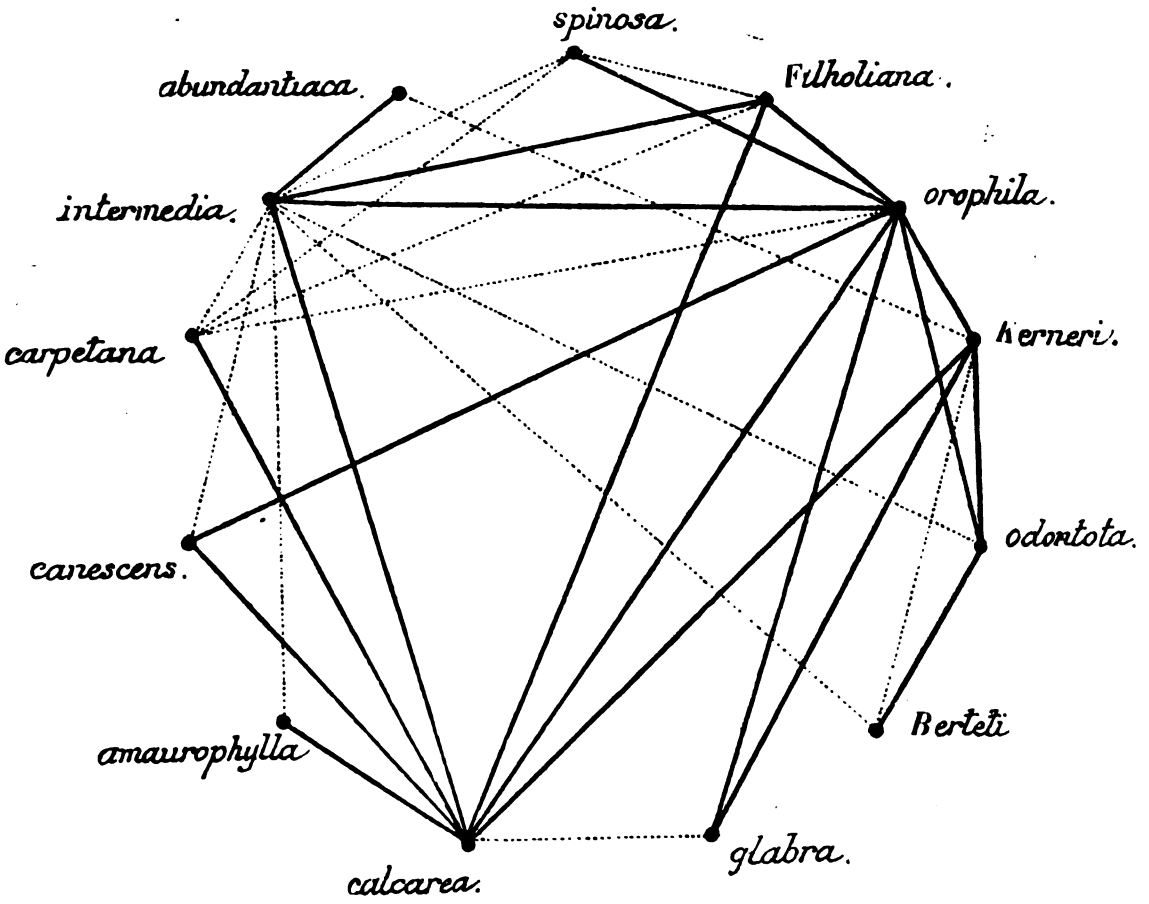


Fig. 52.

Diagramme de la constitution systématique du *G. Ladanum*. Les lignes pointillées indiquent les relations de parenté morphologique étroite; les traits noirs représentent l'existence de formes de transition continue.

Digitized by Google

Avec la var. *canescens*, nous commençons à étudier un petit groupe qui établit le passage des formes précédentes représentant le *subsp. angustifolia* bien caractérisé vers le *subsp. intermedia*. La var. *canescens*, qui est presque exclusivement littorale, est une forme instable dont les composantes s'échappent dans différentes directions et qui passe par des transitions répétées aux var. *Kerneri, orophila* et *calcarea*. La var. *calcarea*, distinguée par Schönheit longtemps avant Grenier et Jordan (41), est une race de vaste dispersion, remarquable par son calice glanduleux à double indument, qui, par ces caractères, tient déjà du *subsp. intermedia*, tandis que son appareil végétatif appartient encore tout entier au *subsp. angustifolia*. Elle est reliée par des chaînons de transition dans différentes directions, c'est-à-dire avec les var. *Kerneri, orophila* et *Filholiana*. Une petite race pyrénéenne, la var. *amaurophylla*, combine d'une façon assez singulière un calice de *calcarea* et les feuilles d'un petit *intermedia* avec la serrature des formes ordinaires du *subsp. angustifolia*. Le point culminant de cette série se trouve représenté dans le midi de l'Europe par la var. *Carpetana* dont le calice est absolument calqué sur celui des très grandes formes de la var. *intermedia*, mais dont les feuilles sont bien celles du *subsp. angustifolia*. Suivant l'importance relative donnée aux feuilles et au calice, on fera passer la var. *Carpetana* dans l'un ou dans l'autre des groupes; le premier caractère étant le plus constant, nous pensons qu'il est plus naturel de terminer la série des races du *subsp. angustifolia* par la var. *Carpetana*. Le *subsp. intermedia* est relié à la var. *calcarea* en Autriche et dans le midi de la France. Le passage direct du *subsp. angustifolia* vers le *subsp. intermedia* est en outre établi d'une façon directe par des formes de transition entre les var. *orophila* et *intermedia* et *arenaria* et *intermedia*.

Il n'y a plus de doute, d'après ce que nous venons de voir, que le seul mode de nomenclature qui corresponde exactement à la constitution systématique de cette partie du genre *Galeopsis*, est de grouper les races que nous venons d'examiner en deux sous-espèces formant un seul type qui est le *G. Ladanum*. De la sorte, les diverses unités systématiques sont placées dans une hiérarchie qui nous paraît adéquate aux caractères qu'elles présentent et à la répartition des formes de transition. Nous ratifions donc entièrement la classification proposée par Gaudin (37), il y a plus de cinquante ans, et

Digitized by Google

estimons que les discussions animées qui ont eu lieu autrefois sur ce point de taxinomie (14, 17, 20, 22, 30, 36, 37, 38, 39, 53, etc.), peuvent être considérées comme closes. La non-adoption de la nomenclature que nous proposons par les auteurs subséquents, n'aura pas sa raison d'être dans les faits, mais dans de simples différences de notation en nomenclature.

Le *subsp. intermedia* est une race d'une importance capitale qui se montre en général comme un parallèle psychrophile ou altitudinaire du *subsp. angustifolia*. C'est-à-dire qu'il remplace volontiers le *subsp. angustifolia* dans le nord, et sur les montagnes dans le midi. Son aire est beaucoup plus étendue que celle du *subsp. angustifolia*. Cette race apparaît pour la première fois en Asie centrale dans les vallées du grand Altaï; Ehrenberg l'a récoltée dans l'Oural méridional; C.-A. Meyer l'a vue dans le Caucase; plus au sud, elle réapparaît encore dans les montagnes de l'Arménie; enfin, Balansa l'a rencontrée dans ces chaînes sauvages qui bordent le littoral de la mer Noire entre Trébizonde et Batum. C'est par le nord de la Russie que cette aire asiatique se rattache à l'aire occidentale qui embrasse presque toute l'Europe jusqu'en Irlande, aux îles Faroë et même en Islande [1].

La var. *intermedia,* qui est le type de cette sous-espèce, varie passablement comme structure, et nous avons acquis la conviction qu'elle renferme plusieurs races à la distinction desquelles les monographes pourront exercer leur sagacité. L'existence de ces formes n'avait pas échappé à Reichenbach et à Reuter, car la var. *marrubiastrum* à feuilles fortement dentées du premier auteur (38), correspond au *G. intermedia* du second; Reuter, de son côté, en distinguait un *G. Ladanum* à feuilles oblongues et à serrature faiblement développée (70).

La var. *abundantiaca* est évidemment une forme altitutidinaire dérivée de la var. *intermedia,* mais distincte des échantillons rabougris ordinaires de

[1] Nous considérons les indications du *G. Ladanum* aux îles Faroë et en Islande comme se rapportant au *subsp. intermedia*, parce que nous n'avons pas connaissance de l'existence du *subsp. angustifolia* sous des latitudes aussi élevées. Cependant, d'après les dernières communications de M. Nyman, la plante n'aurait plus été revue récemment en Islande (Grœnland), ni aux îles Faroë (Rostrup). — Voyez : Nyman, *Conspectus florœ europeœ supplementum secundum*, p. 251, 1890.

Digitized by Google

celle-ci ; elle se trouve dans quelques stations alpines de la Suisse et de la Savoie.

Les *G. dubia* et *pyrenaïca* sont voisins de la sous-espèce *intermedia* du *G. Ladanum*. Ils diffèrent entre eux par la forme des feuilles et la couleur de la corolle, du *G. Ladanum* par leur calice velouté, soyeux.

Le *G. dubia* comprend deux sous-espèces. Le type est répandu dans une grande partie de l'Europe, depuis la Roumanie jusqu'en Espagne et en Angleterre, et paraît être partout silicicole ; il manque cependant en Russie, paraît plus ou moins introduit en Hongrie et n'apparaît que dans les parties occidentales de l'Autriche ; il manque dans l'Italie péninsulaire, la Lombardie, le Piémont et les Alpes maritimes. Le *subsp. nepetaefolia* est une race remarquable qui, jusqu'ici, n'est connue que d'une localité pyrénéenne ; elle est étroitement reliée à la précédente par certaines variations aberrantes de la var. *dubia*.

Le *G. dubia* se croise très facilement avec le *G. Ladanum* sur tous les points où il se rencontre avec lui ; les hybrides ont été trouvées en quantité en Thuringe, en Westphalie, en Belgique, en Suisse, etc. ; le nombre de leurs stations est destiné à se multiplier beaucoup dans la suite quand l'attention aura été attirée sur eux. Ce sont ces hybrides qui ont amené le savant floriste du Brandebourg, M. Ascherson, à réduire le *G. dubia* au rang de variété du *G. Ladanum*.

Le *G. pyrenaïca* est endémique dans les Pyrénées sous les formes *genuina* et *nana ;* cette dernière est encore assez empirique ; nous n'avons jamais eu en culture que la var. *genuina* et ne savons pas encore bien jusqu'à quel point les caractères de la var. *nana* sont héréditaires.

Nous avons rattaché au *G. pyrenaïca,* comme variété *brevifolia,* une forme douteuse décrite d'abord par Willkomm comme variété *brevifolia* du *G. dubia*. Nous considérons cette plante comme une hybride du *G. pyrenaïca* et du *G. dubia ;* nous nous basons pour cela sur la forme des feuilles qui, tout en ayant les caractères essentiels d'un *G. pyrenaïca,* rappellent cependant le *G. dubia,* et surtout sur la couleur jaune des fleurs : c'est l'exemple unique de cette coloration que nous ayons rencontré parmi le grand nombre d'échantillons de *G. pyrenaïca* qui nous ont passé entre les mains, soit dans les her-

Digitized by Google

biers, soit dans nos cultures. Le manque de matériaux nous engage cependant encore à rattacher provisoirement cette forme au *G. pyrenaïca.*

Les trois espèces du sous-genre *Tetrahit* sont moins riches en formes que les précédentes.

Le *G. pubescens* se présente sous deux formes, les var. *genuina* et *Carthusianorum* qui passent l'une dans l'autre par de nombreux intermédiaires. Ces deux variétés n'ont certainement pas partout la valeur de races, et présentent sur certains points une apparence que Fries qualifiait d'*amphibole,* c'est-à-dire qu'elles offrent sur des pieds issus d'un même semis une variabilité désordonnée. En culture, c'est la var. *genuina* qui est généralement la plus stable des deux. Le *G. pubescens* est une espèce de distribution orientale; elle s'étend depuis la Russie, la Serbie et le Monténégro jusqu'en Scandinavie, mais trouve sa frontière occidentale à Carlsruhe, dans le grand-duché de Bade. En Allemagne, elle paraît manquer en dehors de la partie méridionale que nous venons de citer, dans toute l'étendue des provinces rhénanes. Au nord des Alpes, en Suisse, elle paraît rare et localisée; par contre, elle s'étend dans le nord de l'Italie en longeant la chaîne jusque dans les Alpes maritimes; elle apparaît une dernière fois sur quelques points des Alpes de la Savoie. Les indications antérieures de Boreau et Lloyd pour le centre et l'ouest de la France se basent sur des erreurs de détermination, d'après des échantillons-types de Boreau.

Le *G. pubescens* se croise en Allemagne et ailleurs avec le *G. Tetrahit.* Il est à peu près impossible de reconnaître ces hybrides sur le sec; en revanche, leur étude sur les lieux amènera généralement l'observateur à se tirer d'affaire. C'est pour la raison que nous venons d'indiquer que la distribution de ces formes croisées est encore presque inconnue.

Le *G. speciosa* est aussi une espèce orientale, mais à aire beaucoup plus vaste que le *G. pubescens.*

La var. *speciosa* commence en effet à apparaître dans la Sibérie occidentale, d'où elle s'étend à travers la Russie et l'Europe orientale jusqu'en Autriche et en Allemagne. La frontière occidentale remonte le grand-duché de Bade; de là elle longe les provinces rhénanes et touche au Luxembourg et à la Belgique. La var. *speciosa* s'étend ensuite au nord à travers la

Digitized by Google

Hollande, l'Allemagne du nord, le Danemark jusqu'en Scandinavie; on la retrouve en Angleterre. Évidemment, cette race possédait autrefois dans l'Europe occidentale une aire beaucoup plus étendue. Nous en voyons une preuve dans les stations sporadiques qu'elle y occupe encore actuellement en dehors des limites décrites plus haut. Arrêtée dans les vallées de la Suisse orientale et du Tyrol, la var. *speciosa* possède de nouveau quelques localités piémontaises; de l'autre côté de la chaîne des Alpes, on la trouve dans le massif de la Grande-Chartreuse où elle a été méconnue par les botanistes regnicoles. Enfin, il convient de citer les fameuses stations qu'elle possède autour de Morlaix et de Plouigneau dans le Finistère, découvertes en 1847 par J. Gay [1]. Ces stations font partie de l'aire occidentale de la race qui nous occupe en Angleterre, en Belgique et en Hollande; elles sont toutes précieuses pour l'histoire phytogéographique du *G. speciosa*, car elles nous montrent qu'il faisait partie de la végétation occidentale de l'Europe à l'époque où le centre de végétation cantabrique faisait rayonner ses éléments jusqu'en Angleterre [2].

Le fait que la var. *sulfurea* a son centre de dispersion dans les Alpes maritimes est encore une preuve de plus à l'appui de l'ancienne distribution du *G. speciosa* dans l'Europe occidentale. Il est assez curieux de voir qu'aux environs de Lyon, tout près de la première station de la var. *speciosa* (Grande-Chartreuse) et, par conséquent, à la limite de l'ancienne aire de cette forme, la var. *sulfurea* se montre moins caractérisée et moins constante que dans les Alpes maritimes. C'est là un exemple du singulier

[1] J. Gay était en correspondance avec A. Braun auquel il communiqua des échantillons illustrant sa découverte. L'auteur écrivait à Braun : « In Armoraciae cultis prope Montemrebaxum (Morlaix), 22° Aug. 1847, alibique passim in præfectura du Finistère; in Gallia caeterum, quod sciam, alibi nunquam visa. » Le précieux herbier de Braun, riche en plantes et en notes concernant l'histoire de la flore européenne, fait maintenant partie de l'herbier d'Europe du Musée royal de Berlin.

[2] Crié, *La végétation des côtes et des îles bretonnes* (Ann. des sc. nat. de Bordeaux et du Sud-Ouest, 1886, pp. 145-164). — Forbes, *Report of the meeting of the british association held at Cambridge* (Ann. of nat. hist., 16, p. 126); Idem, *On the connexion between the distribution of the existing fauna and flora of the british isles*, etc. (Geological survey of Great Britain, t. I, pp. 336-432). — Engler, *Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Pflanzenwelt seit der Tertiärperiode*, I, pp. 180 et suiv.

Digitized by Google

phénomène, déjà constaté dans d'autres groupes, que les caractères de certaines formes se montrent dans toute leur pureté au centre de leur aire de dispersion, tandis qu'ils s'affaiblissent et deviennent pour ainsi dire chancelants sur les points qui en sont éloignés. La var. *sulfurea* apparaît dans d'autres parties de l'Europe d'une façon tout à fait sporadique, sans jamais offrir ces caractères d'une race à aire de dispersion bien déterminée qu'elle présente dans les Alpes maritimes. La var. *hispidior* en est une forme encore très empirique qui a été découverte en Roumélie par Frivaldsky.

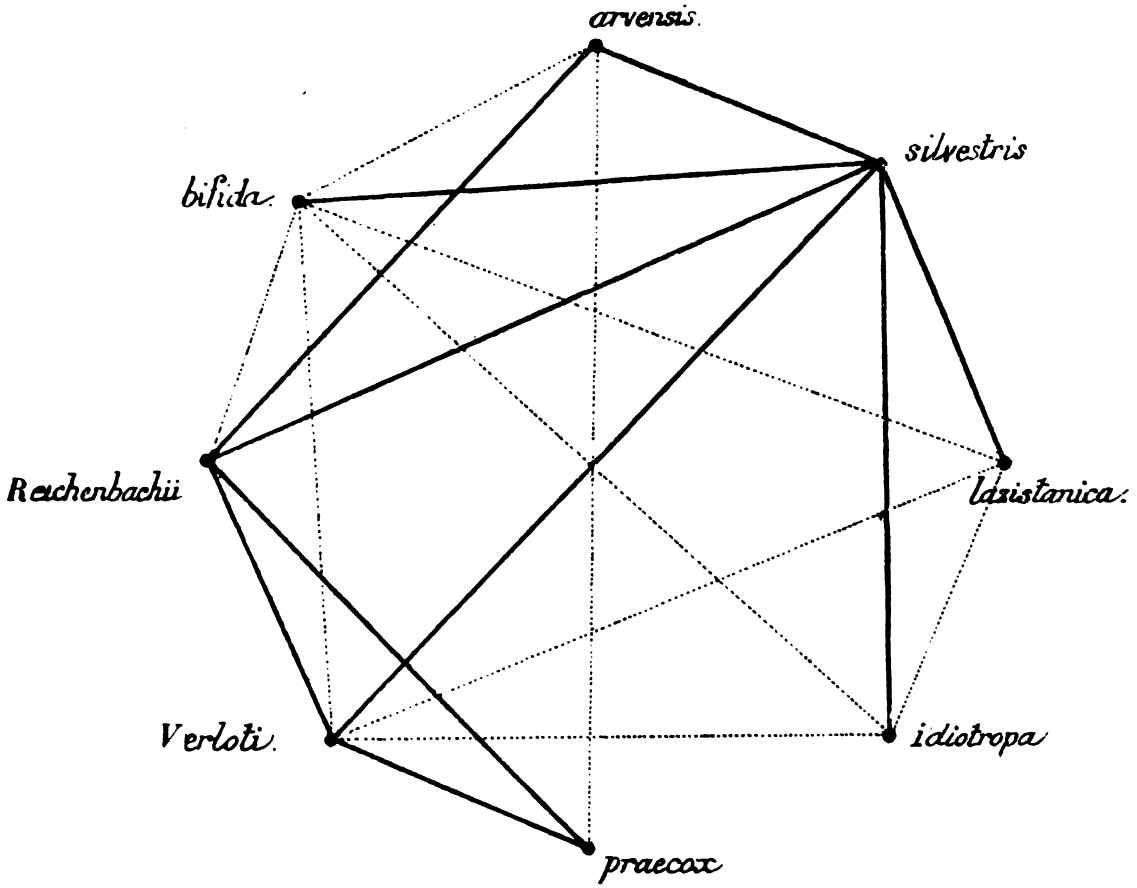


FIG. 53.
Diagramme de la constitution systématique du *G. Tetrahit*. Les lignes pointillées montrent les affinités morphologiques étroites; les traits noirs indiquent l'existence de formes de transition continue.

Il nous reste, pour terminer l'étude du *G. speciosa*, à faire mention d'une forme que nous connaissons imparfaitement et que Fries rattachait

Digitized by Google

autrefois comme variété versicolore au *G. Tetrahit* subsp. *bifida*. Si les observations de Fries concernant la coloration de la corolle sur le vif sont exactes, nous avons là pour le *G. speciosa* l'équivalent du subsp. *bifida* pour le *G. Tetrahit*. C'est une plante scandinave que nous recommandons à l'attention des botanistes locaux.

Le *G. Tetrahit* (fig. 53) s'étend sur l'aire entière du genre *Galeopsis*, depuis les confins de la Sibérie orientale jusqu'en Irlande et aux îles Faroë. La dispersion et la constitution systématique des deux sous-espèces *genuina* et *bifida* sont très différentes.

Le *G. Tetrahit* subsp. *genuina* comprend sept variétés : les var. *arvensis*, *silvestris*, *idiotropa*, *Gazistanica*, *praecox*, *Verloti* et *Reichenbachii*.

Les var. *arvensis* et *silvestris*, reliées par de nombreux intermédiaires, sont des formes très répandues en Europe. Cependant la var. *arvensis* est plus rare que l'autre ; son aire, pour autant que nous sachions, ne commence qu'en Macédoine du côté de l'Orient ; elle rappelle le *G. pubescens* var. *genuina* par ses feuilles arrondies à la base et brièvement acuminées ou aiguës au sommet. La var. *silvestris* apparaît déjà dans les montagnes de l'Altaï ; on la trouve ensuite dans le Caucase et en Russie, puis dans tout le reste de l'Europe où elle domine l'autre par le nombre de ses stations ; elle est bien caractérisée par ses feuilles cunéiformes aux deux bouts. A la var. *silvestris* se rattachent deux formes, encore très empiriques, les var. *idiotropa* et *Gazistanica*. La première, caractérisée par un mode anormal de serrature foliaire, a été trouvée en Savoie. La seconde semble se distinguer par une série de petits traits particuliers dans les pétioles, les feuilles et leur serrature ; elle a été rapportée des montagnes du Lazistan, par Balansa. Toutes deux passent du reste à la var. *silvestris* par des intermédiaires. Les var. *praecox* et *Verloti* sont deux formes embarrassantes, amphiboles, passant l'une dans l'autre par des intermédiaires continus, et que l'on serait tenté de prendre pour de simples variations altitudinaires des var. *arvensis* et *silvestris*, auxquelles elles se rattachent par des transitions insensibles, n'étaient quelques légères différences dans la structure du labiole corollaire et du calice. Il s'en faut du reste de beaucoup que ces différences soient d'une constance telle qu'elles ne laissent jamais de doute dans l'esprit de l'obser-

Digitized by Google

valeur. La var. *praecox* est répandue dans les Alpes depuis le Tyrol jusque dans les Alpes maritimes; elle reparaît dans les Pyrénées et les Alpes scandinaves. La var. *Verloti* offre une aire encore bien plus vaste; elle a été trouvée par Hooker à Sikkim dans l'Himalaya et s'étend de là en Europe où elle se rencontre jusque dans les montagnes des Asturies. La var. *Reichenbachii* est une race subalpine très joliment caractérisée et qui tranche sur les autres par sa corolle, par son calice, par ses feuilles et par la disposition de leur serrature; elle est assez abondante dans les Alpes de la Suisse, de la Savoie, du Piémont et jusque dans les Alpes maritimes; on la trouve aussi sur plusieurs points du Jura. Les localités du centre de la France qui lui ont été attribuées n'appartiennent pas au type, mais à des formes de transition. En effet, la var. *Reichenbachii* est reliée un peu dans toutes les directions avec les autres variétés par des chaînons de transition, c'est-à-dire avec les var. *arvensis*, *silvestris*, *praecox* et *Verloti*.

La var. *bifida*, qui constitue une sous-espèce, semble s'étendre à travers toute la Sibérie et se retrouve en Asie mineure sur les côtes de la mer Noire, mais ce n'est qu'en Russie qu'elle prend cette forme bien caractérisée que nous lui connaissons en Europe. Elle est très commune en Allemagne, réapparaît en Autriche-Hongrie, en Danemark, en Scandinavie et sur quelques points de la France. Elle présente souvent des formes de passage vers la var. *silvestris*, formes chez lesquelles nous n'avons pas constaté de stérilité et qui se retrouvent isolées ailleurs, par exemple en Suisse. Une étude sérieuse des variations du labiole corollaire dans le *G. Tetrahit* ne tarde pas à montrer d'ailleurs qu'une séparation nette des différentes variétés d'après sa structure est entièrement illusoire.

Arrivé au bout de notre étude synthétique sur la systématique des *Galeopsis*, il nous reste à examiner s'il y a quelque parallélisme dans la différenciation systématique des deux sous-genres, ainsi que l'a soutenu Griesselich (44).

Évidemment, le *G. Ladanum* dans le sous-genre *Ladanum* correspond comme position systématique au *G. Tetrahit* dans le sous-genre *Tetrahit* (fig. 54). Le *G. Reuteri* ne possède pas d'équivalent dans le sous-genre *Tetrahit*. Sur les quatre espèces restantes, il n'y en a que deux qui puissent

Digitized by Google

être homologuées : ce sont les *G. pyrenaïca* et *pubescens*, qui tous les deux représentent des formations à indument mou, à feuilles larges, arrondies à la base et à fleurs roses. Encore cette homologie ne s'étend-elle pas à la var. *Carthusianorum* du *G. pubescens*. L'homologation du *G. dubia* avec le *G. speciosa* qu'a proposée Griesselich ne peut se poursuivre au delà des fleurs, l'appareil végétatif accusant dans les deux espèces une variation entièrement divergente.

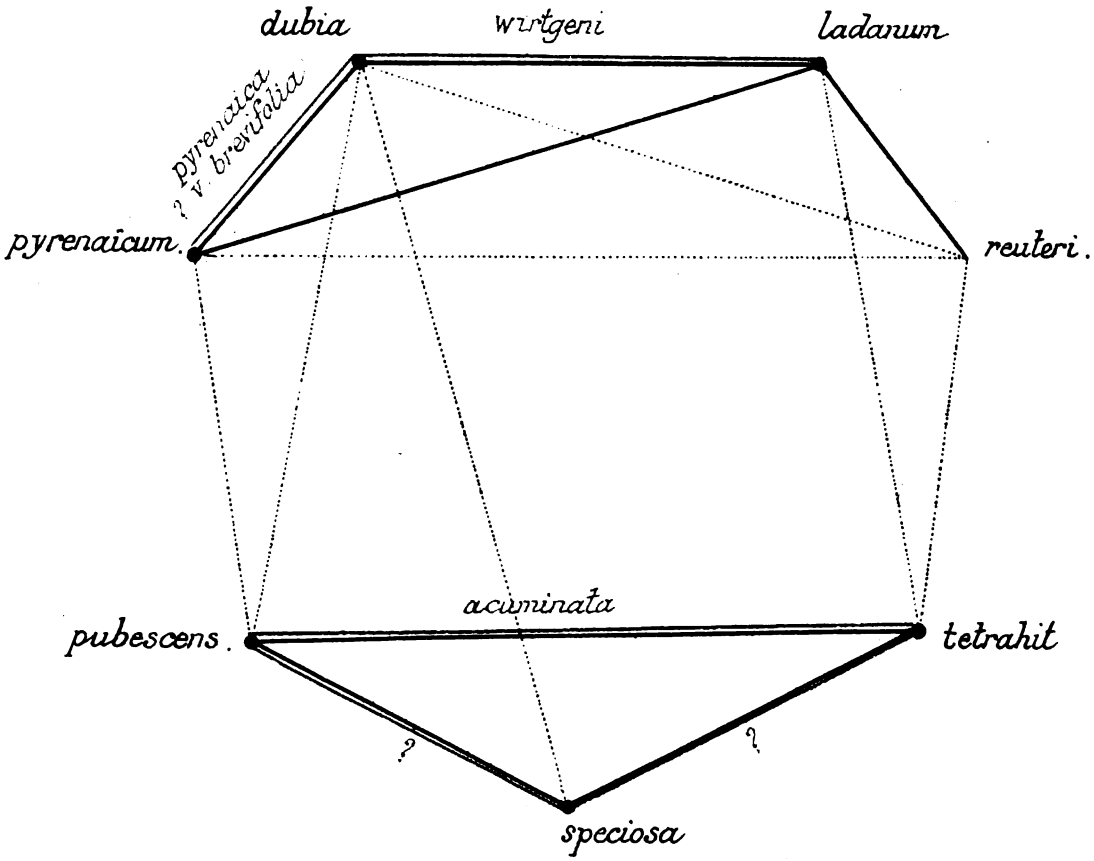


Fig. 54.
Diagramme de la constitution systématique du genre *Galeopsis*. Les traits noirs indiquent une grande affinité morphologique; les traits pointillés dénotent des relations moins étroites; les lignes rouges montrent l'existence de formes hybrides.

Les formes subordonnées aux espèces dans le sous-genre *Ladanum*

Digitized by Google

n'offrent pas de variations orientées d'une façon parallèle. Il n'en est pas de même dans le sous-genre *Tetrahit* où des variations parallèles dans la feuille peuvent être retracées chez toutes les espèces. Dans l'une de ces variations, les feuilles s'élargissent, deviennent ovées et s'arrondissent à la base de façon à devenir souvent cordées; dans la seconde, les feuilles se rétrécissent, deviennent lancéolées et sont cunéiformes aux deux extrémités. Voici la répartition de ces variations parallèles dans les différentes espèces et variétés du sous-genre :

TABLEAU X.

ESPÈCES.	VARIATION OVÉE.	VARIATION LANCÉOLÉE.
pubescens.	*genuina*	*Carthusianorum.*
speciosa.	*sulfurea.*	*speciosa.*
	hispidior.	—
	—	*pallens.*
Tetrahit.	*arvensis.*	*silvestris.*
	praecox.	*Verloti.*
	—	*Lazistanica.*
	—	*idiotropa.*
	Reichenbachii.	—
	—	*bifida*

Quelle peut être la raison physiologique des homologies entre les composantes de divers groupes et de ces variations parallèles? C'est là une question à laquelle il est impossible de donner une réponse satisfaisante; en général, c'est le sort des problèmes de phylogénie qui, dans l'état actuel de la science, permettent bien pour certains cas une solution esquissée à grands traits, mais prennent bien vite l'apparence d'un rébus indéchiffrable lorsqu'on essaie de les serrer de plus près.

Digitized by Google

CHAPITRE XXX.

SYSTÉMATIQUE ANALYTIQUE.

GALEOPSIS Linn.

Linné, *Genera plantarum*, éd. 1, n° 487, p. 175 (1737); Bentham, *Labiatarum genera et species*, p. 522 (1832-1836); Endlicher, *Genera plantarum*, n° 3648 (1836-1840); Bentham in DC. *Prod.*, XII, p. 497 (1848); Bentham et Hooker, *Genera plantarum*, II, 2, p. 1209 (1876); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, 1re partie, p. 157, (1891); Idem, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, 1891; Baillon, *Monographie des Labiées*, p. 35 (*Histoire des plantes*, XCVII, 1891) = *Ladanum* et *Tetrahit* Gilibert, *Flora lithuanica*, II, p. 82 (1781) = *Tetrahit* Moench, *Methodus plant hort. et agri Marburg.*, etc., p. 394 (1784) = Tribus *Galeopsideae* cum genere unico : *Galeopsis* Visiani, *Flora dalmatica*, II, p. 213 (1847) = *Ladanum* Kuntze, *Revisio generum plantarum*, p. 521 (1891).

Morphologia. Herbae erectae, divaricato-ramosae, pilosae vel glabrae vel glaucae, foliis petiolatis, simplicibus, serratura praeditis, floralibus caulinaribus conformibus, summis minoribus. Verticillastri pluriflori ex dichasiis duobus constantes, statim in monochasia helicoïdea transeuntibus, quorum axes omnes condensati. Inflorescentia ± capitata, verticillastris inferioribus ± distantibus axillaribusque. Flores bracteolis sublateralibus spinescentibus praediti. Calix tubulosus vel campanulatus, nervis ± evidentibus 5-10 et dentibus 5 spinescentibus vulgo inaequalibus ornatus. Corolla bilabiato-zygomorpha; tubus rectus, ascendens, exsertus, fauce infra dilatatus, nectarostegio difinito carens; labrum galeiforme, lobis corollae superioribus omnino vel fere connatis constitutum; labiolum patulo-refractum, trilobum, lobis lateralibus haud pleuridiatis, lobo medio majore, integro vel pleuridiis duobus latis et parum evolutis terminalibus praedito; faucis ostiolum dextrorsum et sinistrorsum apophysis duobus conicis intus cavis munitus. Stamina 4, didynama, anterioribus longioribus, antheris bilocularibus, approximata et parallela sub labro corollino; antherarum loculi primitive paralleli, verticales, rima longitudinali aperientes, dein autem, et jam diu ante anthesin, in apice cambiali filamenti circa 90° circummagentes, ita ut, in flore adulto,

Digitized by Google

loculorum rima transversalis loculosque superpositos videantur; loculorum sacculi in utriculum atque operculum discreti; opercula ± plana obversis dorsis inter se applicata, marginibus pilis vectoribus albis numerosis ciliata; utriculi centrifugi pilis destituti cavi. Stylus gynobasicus, subaequaliter bifidus, sub labro collocatus, inter duo stamina media. Nuculae ± evidenter tetraedricae, latere apicali convexiusculo vel plano basique trigonae. — *Histologia.* Radix apice histogenis duobus : calyptrodermogeno et tholo interiore unico crescens, systemate libero-lignoso primario secundum typum diarchum fasciculis in axe congruentibus vel subcongruentibus in axibus primi ordinis disposito, in axibus ordinum superiorum polyarchum, endodermate non sclerificato, cortice et dermate pilifero mox exfoliato praedita, in caulem transiens torsione fasciculorum lignosorum circa tracheas primaevas ut axes sumptas et divisione fasciculorum liberianorum; radix serius systemate lignoso centrali, medulla deficiente, radiis medullaribus numerosis uniseriatis ornata, cujus liber periphericus endodermate et cortice tectus. Caulis medulla centrali nunc deficiente nunc permanente, systemate libero-lignoso primitive constans ex 8 fasciculis quorum 4 foliares in nodis ex caule exeunt, reliqui 4 autem reparatores sunt; serius coalescentia in angulis fasciculi 4 oriuntur, qui profecto arcubus interfascicularibus connectuntur; lignum parte interiore parenchymate valde evoluto cellulis parvis aquiferis et chloroleucitos amyliferos continente praedito, ipsud, ex tracheis spiralibus, vasis porosis, parenchymate et stereidis constans, radiis medullaribus uniseriatis permeatur; liber parenchymate, cambiformio, et insulis ex tubis cribatis ad typum *Cucurbitae* pertinentibus et cellulis consortibus constantibus constitutus, saepe stereidis peripheric pericyclicis ± sejunctis munitus; cortex endodermate haud sclerificato intus circumdatus, columnis collenchymaticis 4, in sectione transversali ± lunae crescentis forma, multo tenuioribus quam fasciculi libero-lignosi. Petioli fasciculis quatuor quorum duo in cornubus duoque medii collenchymate pericyclico parum evoluto praediti, caetero in cornubus funiculis collenchymaticis sustenti. Folia in nervo medio fasciculum libero-lignosum sectione arcuata et reniforme possidentes, stereidis pericyclicis nullis, inter duos pulvinos parenchymaticos conclusum, cotyledonibus exceptis ubi mesophyllum fasciculos

Digitized by Google

circumdat; mesophyllum bifaciale, palissadis brevibus (vulgo 2-4), moniliter colligatis, texto spongioso male evoluto; stomata, secundum typum vulgariorem apud dicotyledoneas constructa, cellulis annexis pluribus (3-6), irregulariter circumdatis. Indumentum (cum adsit) constans ex pilis simplicibus, cerae granulis vel glandulis stipitatis, capite uni-pluricellulari. Calicis mesophyllum spongiosum, nervis stereomate lignoso valde evoluto, ex quo etiam dentium aristae constant. Pollen ovoïdeum sulcis 3 ornatus, exina minute polygonaliter verruculosa. Pericarpium pulchre discretum epicarpio cellulis extus et lateraliter porosis; mesocarpium constans ex leptocarpio centrifugo parenchymatico in quo, arista interna, permeat funiculus libero-lignosus huc et illuc sed parce ramificatus, et ex sclerocarpio cujus cellulae valde sclerificatae et lignificatae in camera exteriore crystallum formulae $C^2O^4Ca + H^2O$ voluminosum continent, camera cetero in xystum angustiorem abit, quod vacuum in numerosos canaliculos resolvitur; endocarpium cellulosicum vix sclerificatum chlorophylliferum. Ovulum anatropum, monochlamydatum, nucello et chlamyde parenchymaticis haud discretis mox resorptis. Albumen copiosum vixunquam maturitate omnino digestum. Embryo rectus radicula infera. — *Biologia.* Plantae herbaceae, annuae, vitam ineuntes ut plantulae cotyledonibus crassiusculis basi cordatis vel auriculatis, hypocotylo valde evoluto saepe ± quadrangulari, gemmis epicotyleis parum evolutis. Flores magnitudine in speciminibus ejusdem stirpis saepe in eodem loco variantes (formae heteranthae), ita insectorum proboscidibus valde inaequalibus aditum faciliorem reddentes, praecipue Apidis (*Bombis*) quaesiti; pollinatio heteroindirecta frequens, ut etiam processus indirectus et directus. Plantae sociales in locis siccis aridisque (*Ladanum*) vel umbrosioribus (*Tetrahit*) crescentes, a mense Julio ad Septembrem florentes. — *Area.* Europa tota, Siberia fere tota, montes Altaïci, Transcaucasia, Asia minor; in Americam borealem aufugae *Galeopses* repertae sunt. — *Affinitates.* Inter *Stachydeas* collocandum genus nostrum est, a *Leonuro* differt absentia columnarum collenchymaticarum in caule, et corolla diversa, a *Lamiis* qui differunt lobis lateralibus labioli acuminatis pleuridiatisque, et generatim sumptum ab omnibus aliis, apophysis in ostiolo faucis corollinae, evolutione et structura staminum.

Digitized by Google

Subgenus I. — *Ladanum* Reichb.

Reichenbach, *Flora germanica excursoria*, p. 322 (1830); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 160.

Morphologia. — Caules sub nodis nodositatibus motricibus destituti, inepti ad gemmos adventitios inter folium et ramum secundarium axillarem producendos. Apophysae clivo mite corollae faucem petentes, valle lato separatae. Nuculae basi cervice parvo auctae. — *Histologia.* Medulla caulis sistens et continua, exceptis merithallis inferioribus speciminum valde robustorum. Nervus medius folii parte inferiore vulgo fasciculum liberolignosum unicum pusillum, sectione reniformi, fusione fasciculorum primitivorum basis petioli constitutum. Pili uni- vel multicellulares, simplices, semper directo in epidermate sine pulvino basilare inserti. Calicis stereoma vulgo fragilius. Sclerocarpium in nucula elementis brevioribus, systemate canaliculorum centripetorum minus complicato.

1. G. Reuteri Reichb. f.

Reichenbach fil., *Icones florae germanicae et helveticae*, t. XVIII, p. 17 (1858); Burnat in *Bull. Soc. dauph.*, 1883, p. 428; Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 160. = *G. glaucescens* Reuter herb.!; Ardoino, *Flore des Alpes maritimes*, p. 299 (1867) = *G. Ladanum* var. All. herb. p. p.! — *Icones.* Reichenbach, *l. c.*, tab. 28, fig II et 6-7.

Morphologia. — Planta altitudine valde variabilis (10-80 cm.). Caulis angulis vulgo teretibus, pruinosus vel glaucescens, praecipue in regione nodali, leviter cinereo-pubescens summis internodiis superioribus. Folia lanceolata vel sublineari-lanceolata, apice acuta, basi longe in petiolum extenuata et cuneiformia, ± pubescentia pagina inferiore, pubescentia vel glabra pagina superiore, superficie circa 4-5 × 0,6-1,5 cm.; serratura constans ex dentibus generatim parum numerosis, trigonos ± irregulares 0,3-2 mm. altos extus rectos vel concavos culminibus rectis vel obtusiusculis circa 5 mm. distantibus constituentes. Bracteolae calice breviores ± spinescentes. Calix pubescentia brevi et adpressa tectus, raro glandulis breviter stipitatis ornatus, tubulosus, tubo circa 6-7 mm. longo, funiculis parum evidentibus;

Digitized by Google

dentes calicini valde sed irregulariter inaequales, duobus anterioribus vulgo longioribus, caetero quoad dimensiones in planta eadem variantes, longissimis ad 6-8mm. brevioribus tunc ad 4 mm. longis, sed saepe infra dimensiones illas sistentes. Corolla in forma grandiflora 2 cm. longior quam calicis tubus, nunc alba, nunc rosea, partibus superioribus violacea, macula lutea in labiolo, annulo luteo ± perfecto circa faucem ; forma parviflora corolla calicis tubum 1-1,2 cm. excedente. — *Histologia.* Paries externa epidermatis in superficie ceram exsudans, praecipue in nodositatum vicinitate ; cera crassamentum formans, granulis sphericis juxtapositis, vix superpositis, ± approximatis et facile in alcoolo vel aethere calido solubilibus constitutum. — *Biologia.* Planta a Julio ad Septembrem florens, praecipue in rupestribus calcareis, saxosis, et ruinis mobilibus, locis aridis et solis ardore tostis crescens. — *Affinitates. G. Ladano* valde affinis, a qua constanter differt cera epidermali in caule.

Area. — In Alpis maritimis endemica et ibidem sat crebra ut sequitur. — *Alpes maritimae italicae.* Prope Cuneo : h. Allioni ; in valle Gesso : leg. Burnat in h. Alp. mar. ; circa Entraque et Valdieri : leg. Lisa in h. suo, leg. Burnat (Soc. dauph., n° 3859) in h. Alp. mar., h. Boiss. nov., h. Barb., leg. Beyer in h. suo., Reuter, in h. Boiss. propr., h. Barb. ; ad balneas Vinadio : leg. Burnat in h. Alp. mar., Reuter in h. Boiss. propr. et Barb. ; prope Demonte : leg. Ferrari in h. Taurin., leg. Reichenbach f. in h. Tur. gen. : Aisone et Vinadio in valle Stira : leg. Burnat in h. Alp. mar. ; la Briga : leg. Burnat in herbariis variis ; ad St. Dalmas de Tende : leg. Bicknell in h. suo ; in valle minière de Tende : leg. Burnat in h. Alp. mar. ; Fontan : leg. Reverchon (Pl. de France, 1886, n° 106) in h. Alp. mar, h. Barb., h. Beyer; inter Fontan et Belvedere : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb. ; in valle Caireos : h. Thuret ; ad La Colmiane circa St-Martin Lantosque : h. Thuret ; in parte inferiore et media vallis Molières : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Alpes maritimae gallicae.* In via ab Isola ad montem col de la Vallette : leg. Burnat in h. Alp. mar. ; prope Malaussena : leg. Burnat in h. Alp. mar. ; in monte Mounier circa Vignols : leg. Burnat in h. Alp. mar., leg. Favrat in h. Boiss. nov. ; inter Isola et St-Étienne-aux-Monts : leg. Burnat in

Digitized by Google

h. Alp. mar.; inter St-Étienne-aux-Monts et St-Dalmas le Selvage : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Aiglun : h. Thuret; Vegay inter valles Thorenc et Esteron : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Duluis : leg. Burnat in h. Alp. mar.; circa Amen : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in via ad Bouchenières prope Guillaumes : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Guillaumes : leg. Reverchon in h. Alp. mar., h. Boiss. propr., h. Brux. gen., h. Ayasse; ad Villeneuve d'Entraunes et circa St-Martin d'Entraunes : leg. Reverchon in h. Alp. mar.

2. G. Ladanum Linné.

Linné, *Species plantarum*, ed. 1, p. 579 (1753); ed. 2, t. II, p. 810; Bentham, *Labiatarum genera et species*, p. 523 et in DC. *Prodr.* p. 497; Koch, *Röhling's Deutschland's Flora*, IV, p. 270 et *Synopsis florae germanicae et helveticae*, ed. 3, p. 489; Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 162 = *Ladanum purpureum* Gilibert, *Flora lithuanica*, II, p. 82 (1781) = *Lamium Ladanum* Crantz, *Stirp. austr.*, p. 260 (1769) = *Tetrahit Ladanum* Moench., *Methodus plantas horti et agri Marburg.* etc., p. 394 (1794) = *Ladanum dubium* Kuntze p. p. I, *Revisio gener. plant.* (1891), p. 521. — *Icones.* Nees, *Genera plantarum florae Germaniae*, 6, 32; Smith et Sowerby, *Englisch botany*, 13, 884; Sturm, *Deutschland's Flora*, 14, 62; Dietrich, *Flora regni borussici* 2, 74; Oeder, *Flora danica*, 10, 1757; Villars, *Histoire plant. dauph.* II, 9; Reichenbach, *Iconographia botanica*, tab. XLVII; Reichenbach f., *Icones florae germanicae et helveticae*, t. XVIII, 27, III et II; 28, I et 1-5.

Morphologia. — Quoad dimensiones ut species praecedens varians. Caulis angulis ± evidentibus, semper quadrangularis, glaber vel pilosus, sed nunquam glaucescens. Folia ovata, oblonga vel lanceolata, serratura valde variabili, pilosa vel glabrescentia (nunquam crasse velutino-sericea). Calix tubulosus, ± pilosus vel glaber (nunquam velutino-sericeus) dentibus variis praeditus. Corolla rosea vel alba, in labiolo macula lutea ornata. — *Histologia.* Parietes externae epidermatis superficie nunquam ceram exsudantes. — *Biologia.* Ut in specie praecedente, sed saepius in arvis vegetans. — *Affinitates.* Subspecie *intermedia* ad *G. pyrenaïcam* et *dubiam* accedit, dum subspecies *angustifolia* *G. Reuteri* magis approximata est; ab omnibus tamen, formis hybridis derelictis facile distinguenda.

Area. — Europa, Sibiria altaïca, uralensis et baikalensis (Ledebour, *Flora rossica*, III, p. 420), Caucasus, Armenia, Lazistania.

Digitized by Google

1. **Subsp. angustifolia** Gaudin, *Flora helvetica*, t. IV, p. 52 (1829); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 163 = *G. angustifolia* Ehrhart, *Herbarium exsiccatum*, n° 132 (1792); Hoffmann, *Deutschland's Flora*, II, p. 8 (1804); Persoon, *Synopsis*, II, p. 122 (1807) = *G. Ladanum* var. *angustifolium* Wallroth, *Schedulae criticae*, p. 302 (1822); Wimmer et Grabowski, *Flora silesiae*, pars II, t. II, p. 190 (1829); Mutel, *Flore française*, III, p. 28 (1836); Visiani, *Flora dalmatica*, II, p. 214 (1847) = *G. grandiflora* Bluff et Fingerhut, *Compendium florae germanicae*, II, p. 26 (1825) non Roth.

Folia lanceolata vel lineari-lanceolata, vulgo ± angusta, apice acuta et peracuta, basi longe attenuata et cuneiformia, denticulata et subintegra, vel dentata dentibus distantibus in utroque margine 1-4. Calix tubulosus, dentibus saepius valde inaequalibus, nervis non vel parum evidentibus. Corolla in forma grandiflora tubum calicinum 1-2, 3 cm. excedens, in forma micrantha tantum 1-1,5 cm.

Area. — Europa media et australis inter Britanniam, Sueciam, Serbiam et Hispaniam.

α. Var. spinosa Bentham, *Labiatarum genera et species*, p. 523 (1832-1836) et in DC. *Prodr.*, XII, p. 498 (1848); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 164.

Folia lanceolata, viridia, in utroque margine dentibus 1-4 sat proeminentibus praedita, trigonos 1 mm. altos, culminibus rectis vel obtusis, circa 7 mm. distantibus constituentibus. Dentes calicini valde elongati nonnunquam 8 mm. superantes, arista alba 1-2 mm. longa praediti.

Area. — In Europa mediterranea rara. — *Hispania.* In arenosis fluvii Guadalope : leg. Loscos in h. Willk. — *Gallia.* Antibes in h. Thuret; in ripa rivi Sagne prope Pegomas : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Italia.* Ex S. Eljidio(?) : h. Brux. gen. (h. Dumort.).

Observatio. — Haec varietas formis intermediis cum var. *orophila* connectitur quae futuro certe saepius in alpium vallibus australibus reperientur; specimina var. *orophilae* ad *spinosam* accedentia vidimus ex Alpibus maritimis ad silvam Montelegno prope St-Laurent du Var in h. Nic., et ex valle Aoste (leg. Chenevard in h. suo).

Digitized by Google

β. **Var. Filholiana** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 29 (1891) = *G. Filholiana* Timbal-Lagrave, *Note sur une nouvelle espèce du genre Galeopsis* (Bull. Soc. bot. de France, I, 1854, p. 214); Idem, in *Billotia*. 1861, pp. 18-20; Idem, *Excursion scientifique à Bagnères-de-Luchon* (*Septième session du Congrès pharmac.*, 1865, p. 11) = *G. eglandulosa* Timbal-Lagrave ined. in h. Brux. gen.

Planta 1-2 dcm. alta. Caulis erectus ± ramosus, parce pilosus, viridis vel rubescens, internodiis quoad longitudinem valde variantibus. Folia lanceolata, vel rhomboïdeo-lanceolata, petiolo ad 1 cm. longo, apice acuta, basi cuneiformia et longe extenuata, superficie 3-5 × 0,7-1 cm., utrinque viridia, subglabra vel ± pilosa; serratura constans ex dentibus crebris (4-6) in foliorum utroque margine, trigonos extus convexos, intus rectiusculos, apice obtusos vel rotundatos, culminibus 1 mm. altis, et 2-4 mm. distantibus constituentibus. Calicis tubus pilis adpressis prorsus versis, totus viridis, nervis ± proeminentibus, circa 6 mm. longus; dentes longe acuminato-aristati, glandulis stipitatis haud frequentibus dorso et in sinubus praediti, 5 mm. longi, arista alba 1-1,5 mm. longa. In forma grandiflora flores 1-1,5 cm. calicis tubum superant, in forma parviflora, primo sola auctori nota (corolle petite Timb.), corolla tubum 0,7-1 cm. superat. Variat praeterea ut cl. Timbal-Lagrave jam indicavit statura; in forma minore alpestri folia multo minora, serratura reducta, et dentium calicinorum aristis saepe abortivis calicisque glandulositate planta saepe in var. arenariam abit; in statu reducto varietatis pulchrae characteres valde difficile extricandi.

Area. — In Pyrenaeis endemica. — *Pyrenaei gallici.* In saxosis sub ponte Glière opposito aquae Cascade des Demoiselles prope Bagnères-de-Luchon (H^te^-Garonne) : leg. Guillon et Timbal (Billot, n° 2897) in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. Brux. gen.; ad aquam cascade de Lys prope Luchon (H^te^-Garonne) in h. Brux. gen.; (H^tes^-Pyr.) : leg. Bordère in h. Boiss. propr., h. Boiss. propr., h. Barb.; in adscensu ad Port de Vénasque : leg. Boissier in h. Barb., h. Berol. europ., h. Jäggi; Campvieil (H^te^-Pyr.) : leg. Bordère in h. Boiss. propr., h. Barb., h. Hausskn. — *Pyrenaei Arragonici.* Ad balneas Panticosa : leg. Timbal in h. Boiss. propr.

Observatio 1. — Varietas haec in var. *calcaream* formis parvis alpes-

Digitized by Google

tribus jam memoratis locis sequentibus, omnes in Pyrenaeis gallicis siti, transit : Gavarnie (H^tes-Pyr.) : leg. Bordère in h. Berol. europ., h. Käser, h. Deless. gen. (Schultz, n° 1452); Héas (H^tes-Pyr.) : leg. Bordère in h. Deless. gen., h. Ayasse, h. Berol. europ., h. Burn., h. Tur. gen. (Pl. pyr. n° 100); Campvieil (H^tes-Pyr.) : leg. Bordère in h. Burn. europ.; Bollon in valle Borèges (H^tes-Pyr.) : leg. Bordère in h. Jäggi; in valle Aspé (H^tes-Pyr.) : leg. Bordère in h. Käser ; Gèdres : leg. Bordère in h. Käser.

Observatio 2. — Caeterum varietas *Filholiana* foliis vergit ad var. *intermediam* in stationibus rarioribus, e grege citare possumus : Bosquet de Luchon (Pyr. centr.) : leg. Boiss. et Reuter in h. Boiss. propr. et in h. Haussknecht; in Pyrenaeis, sine loco natali : leg. général de Feistmantel in h. Deless. gen.

Observatio 3. — In opere nostro (*Labiées des Alpes maritimes,* p. 162), indicavimus errore cl. Lereschii, qui specimini alicui *G. Ladani* falso nomen *G. Reuteri* tribuerat, cl. Timbal suam *G. Filholianam* pro *G. Reuteri* habuisse. Nunc autem opinamur errorem non apud Lereschium esse, sed apud Timbalium, nam in Alpibus maritimis certe ex omnibus formis *G. Reuteri* ea est, quae habitu maxime varietatem *Filholianam* commemorat, praecipue structura calicis. Verisimiliter ideo cl. Timbal habitus similitate in errorem ductus, et neglecta caulis glaucescentia, *G. Reuteri* cum *G. Filholiana* confuserit.

γ. **Var. orophila** Briquet, *Labiées des Alpes maritimes,* p. 165 = *G. orophila* Timbal-Lagrave in *Bull. Soc. dauph.*, p. 17 (1874) et exsicc., n° 205 (specimina parum typica, vide obs.) = *G. Ladanum* var. *campestre* Timbal in *Bull. Soc. dauph.*, p. 515 (1885) = *G. angustifolia* var. *chloropsis* Briquet in herb. variis.

Caulis erectus vel diffusus. Folia ± anguste lanceolata, apice acuta, basi longius extenuata et cuneiformia, utrinque ± pilosa et viridia; serratura constans in folii utroque margine ex tribus ad quatuor dentibus parum robustis, trigonos 0,5-1 mm. altos, extus rectos, undulatos vel aliquot convexos, culminibus rectis vel aliquot obtusis, circa 5 mm. distantibus, constituentibus. Calix canescens, pilis adpressis tectus, glandulis perraris; dentes tam longi vel aliquot breviores quam tubus, circa 5 mm. longi, arista alba 1-1,5 mm. longa praediti.

Digitized by Google

Area. — In agris Europae late diffusa, ut sequitur. — *Serbia.* In saxosis ad Mokra Gora : leg. Pancic in h. Boiss. propr. — *Austro-Hungaria.* Csepel Iris (Hung.) : leg. Tauscher in h. Burn.; prope Wien : leg. Hazslinski in h. Deless. gen.; Keszthely (Styr.) : leg. Szenczy in h. Brux. gen. — *Germania.* Prope Teuken et Lablemka (Siles. ?) : leg. Uechtritz in h. Engler; prope Wartha ad fluv. Neisse (Siles.) : leg. Günther (Exsicc. siles.) in h. berol. gen.; prope Weimar (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Kösen (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo. — *Helvetia.* Wytikon (Zürich) : leg. Schröter in h. Tur. helv.; Hottingen ad Zürichberg : leg. Käser in h. suo; Erstfelden (Uri) : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; St-Nicolas in valle Zermatt (Valais) : leg. Fauconnet in h. Deless. helv., Favrat in h. Burnat; inter Martigny et Sembrancher : leg. Reynier in h. Deless. gen.; ad silvam Bois de l'hôpital (Neuchâtel) : leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv.; Nant supra Vevey (Vaud) : leg. Burnat in h. Burn.; Pont de Nant : leg. R. Masson in h. Burn.; Valleyres (Vaud) : leg. Boiss. in h. Boiss. propr., Barbey et Reuter in h. Barb.; Onex (Genève) : leg. Briquet in h. suo. — *Italia.* Pietro Camelo : Tenore in h. Brux. gen.; prope Firenze : leg. Targioni-Tozzetti in h. Deless. gen.; prope Ceva (prov. Mondovi) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; ab aquae lapsu praecipite Ranaval usque ad Ruine Montmajeur, in valle Grisanche : leg. Beyer in h. suo; in valle Cogne : leg. Beyer in h. suo. — *Hispania.* Prope Trillo in Castella nova : leg. Rodriguez in h. Willk.; in arenosis fluvii Guadalope : leg. Loscos in h. Willk. — *Gallia.* Nice in valleculo Magnan : leg. Durando in h. Alp. mar.; Nice ad vicum Bevra et in monte Luceram : h. Nic.; inter Levens et Duranus (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope Malaussena (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope Vignols (Alp. mar.) : leg. Favrat in h. Boiss. nov.; Entrevaux (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; St-Martin d'Entraunes (Alp. mar.) : leg. Reverchon in h. Alp. mar.; prope St-Martin Lantosque : h. Nic.; las Tourrès (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; St-Étienne-aux-Monts (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Annot (Alp. mar.) : leg. Reverchon in h. Alp. mar.; Théoule imo monte Esterel : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Nimes : leg. Salis in h. Tur. gen.; Beaupuy prope Toulouse : leg. Reynaud et Marçais (Soc. dauph., n° 4645) in h. Boiss.

Digitized by Google

nov., h. Barb., h. Ayasse; ad vias in valle Lauze prope Ax-les-Thermes (Arriège) : leg. Gillot in h. suo; in valle Aran (Pyr.) : leg. Timbal-Lagrave (Soc. dauph., n° 205) in h. Arvet-Touvet; ad casam montis Canigou (Pyr. or.) : leg. Schimper in h. Berol. gen.; in ripis flum. Durance prope Avignon : h. DC. Prodr.; inter Boveysieux et Pommaret (Isère) : leg. Verlot (Soc. dauph., n° 3005) in h. Boiss. nov., h. Burn.; inter Scez et la Tuille (Tarentaise, Sab.) : leg. Perrier. in h. suo; ad la cascade de Chède (Faucigny, Sab.) : leg. Alph. DC. in h. Deless. helv.; Buttes de Sèvres : h. Deless. gall.; in agris Drau : h. Deless. gall.; Sceaux-les-Chartreux : h. Deless. gall.; Butte de Chaumont : leg. Kunth in h. Berol. gen.; circa Paris : leg. Martius, Coëmans in h. Brux. gen.; in monte Saleva supra Bossey (Sab.) : leg. Brown in h. Burn., Romieux in h. suo, Briquet in h. suo; circa S^{t}-Blaise (Sabaud.) et ad Confort prope Bellegarde (Ain) : leg. Chenevard in h. suo, h. Käser et in h. Jäggi; in valleculo Ardran montis Jurae : leg. Ayasse in h. suo (statio anomala); in monte Colombier jugi juratensis : leg. Chenevard in h. suo; in via versus Fontaine et ad villam Méline prope Bar-sur-Aube : leg. Desétangs in h. Hariot; Saulxures (Vosges) : leg. Berher in h. Burn., h. Jäggi; Boulogne : leg. Bélanger in h. Deless. gall. — *Belgium.* Rara in agro Verviers : leg. Lejeune in h. Brux. belg. — *Anglia.* Gravel pits, Durham : leg. H. Kinpley in h. Brux. gen.

Observatio. — Nomen varietatis « *orophila* » conservavimus, quamquam specimina primitiva cl. Timbali maxima parte ad var. *Kerneri* transeunt, ideo non typica, ne nominum copia vocabulis novis inutile augeatur.

δ. Var. Kerneri Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 165 (1891) = *G. angustifolia* et *canescens* Kerner, *Schedae ad floram exsicc. austro-hungaricam*, n^{os} 943, 944.

Planta 30-40 cm. alta. Caulis saepius valde ramosus, diffusus, pilosus, internodiis quoad longitudinem valde variantibus. Folia lanceolata, angusta, apice acuta vel acutiuscula, basi longe extenuata, cuneiformia, viridia, subtus pilosa, supra glabrescentia, superficie 4 × 0,7 cm.; serratura constans in utroque folii margine ex 3-4 dentibus parum robustis, trigonos intus rectiusculos, extus concaviusculos, rectos vel aliquot convexos, culminibus acutis vel rectis 0,5-1 mm. altis et 1-5 mm. distantibus constituentibus, —

Digitized by Google

saepe subnulla. Calix ± canescens pilis adpressis; dentes tubo breviores 2,5-4 mm. longi, arista alba circa 1 mm. longa ornati; glandulae calicinales nullae vel perrarae.

Area. — Late per Europam diffusa, ut sequitur. — *Austro-Hungaria.* Kalocza (Hung.) : leg. Hainald (Fl. exsicc. austro-hung., n° 944, II) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Engl.; circa Schlosnam (?) : leg. Planao in h. Brux. gen.; Pressburg : leg. Schneller in h. Brux. gen.; in valle Waagthal imis montibus Tatrae : leg. Engler in h. Berol. eur.; in arvis inter Baumgarten et Bergern prope Mautern : leg. Kerner (Fl. exsicc. austro-hung., n° 944, I) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Berol. eur., h. Engler; in glareosis ad ripas fluvii Becva prope Wsetin : leg. Bubela (Fl. exsicc. austro-hung., n° 943) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Berol. eur., h. Engler; prope Fiume : leg. A. M. S. in h. Brux. gen. — *Germania.* Circa Breslau : leg. Günther in h. Berol. eur.; Wertha in comitatu Glatz : leg. Krause in h. Berol. eur.; prope Nordhausen : leg. Vocke in h. Chenevard; Erlangen : h. Deless. gen.; Neustadt (Thür.) : leg. Vock in h. Callier; in dumetis montis Müffling prope Perka (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Kaulsdorf (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Gerolstein (Eifel) : leg. Dieudonné in h. Brux. gen.; Andernach et Bertrich : leg. Wirtgen in h. Berol eur.; Siegburg prope Bonn : leg. Regel in h. Tur. gen.; Markolsheim (Elsass) : leg. Burnat in h. suo. — *Helvetia.* In montibus circa Brienz (Bern) : leg. Haller fil. in h. suo; Viège (Valais) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; St-Legier supra Vevey (Vaud) : leg. Burnat in h. suo; inter Nant et Iongny supra Vevey : leg. Burnat in h. suo; Pont de Nant (Vaud) : leg. Favrat in h. Tur. helv.; Genolliers (Vaud) : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; circa Bellerive prope Genevam : leg. Chenevard in h. suo; Bois de la Bâthie (Geneva) : leg. Ramu in h. Deless. helv.; Neuchatel : leg. Godet in h. Deless. helv.; Pertuis du Soc (Neuchatel) : leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv. — *Italia.* In Sicilia : leg. Ian in h. Berol. eur. — *Gallia.* Prope Gap : leg. Burle in h. Beyer; in sabulosis ad Vérel-Pragondran prope Chambéry : leg. Chabert (Billot, n° 1300) in h. Boiss. prop., h. Perrier; Albertville (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in arenosis ad rivum Chéran (Bauges, Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; Allères (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; St-Jean-de-

Digitized by Google

Tholome (Faucigny, Sab.) : leg. Romieux in h. suo; in arenosis imo monte Saleva (Sab.) : leg. Ayasse in h. suo; ad Abondance (Chablais, Sab.) : leg. Briquet in h. suo; Bourges et Ste-Thorette (Cher) : leg. Déséglise in h. Ayasse; Seuner (? Côte-d'or) : leg. Abiot in h. Brux. gen.; Bar-sur-Aube, Ailleville, Argençon, et ferme de Méline prope Rouvre (Aube) : leg. Desétangs in h. Barb., h. Hariot; in ripis rivi Doubs ad Chamars prope Besançon : leg. Paillot (Fl. Sequ. exsicc., n° 116) in h. Brux. gen.; Rambervilliers (Vosges) : leg. Claire in h. Cailler. — *Belgium.* Prope Verviers : Lejeune in h. Brux. belg. — *Hollandia.* Steengroeven prope Wolfenbüttel : Wehrhamp in h. Brux. gen. — *Anglia.* Near Janion (?) : Maton in h. Brux. gen.; Specton prope Scarborough : leg. Bean in h. Brux. gen.

Observatio. — Varietas *Kerneri* formiis transitoriis multis in var. *orophilam* abit, ut sequitur. — *Austro-Hungaria.* In Ober-Oesterreich : leg. Brittinger (Reichb., n° 1679) in h. Boiss. propr., h. Brux. gen.; et specimina multa ex *Kerneri* fl. austro-hung. exsicc., n° 944, I et II. — *Helvetia.* Sargans (St-Gall) : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; Aarau : leg. Müll. Arg. in h. Tur. helv.; Lugano : leg. Heer in h. Tur. helv.; in jugo Forclaz (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; Pont de Nant (Vaud) : leg. Favrat et R. Masson in h. Jäggi; Chavanne-des-Bois (Vaud) : leg. Briquet in h. suo. — *Italia.* Albae (?) in arvis : leg. Colla in h. Brux. gen. — *Hispania.* In Catalaunia : leg. Costa in h. Willk. — *Gallia.* In valle d'Aran (Pyr.) : leg. Timbal (Soc. dauph., n° 205) in h. Arvet-Touvet; in monte Rosemont prope Besançon (Doubs) : leg. Maillard et Billot (Billot, n° 1049) in h. Perrier, Boiss. propr., Deless. gall. in silva St-Maur (Aube) : leg. Desétangs in h. Hariot. — *Scandinavia.* In Suecia : leg. Hübener in h. Boiss. propr. — *America borealis.* Chelsea-Beach (U. S.) : leg. Graham in h. Deless. gen.

ε. Var. Berteti Perrier et Songeon in Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 164 (1891) = *G. Berteti* Perrier et Songeon ap. Verlot, *Catalogue des plantes vasculaires du Dauphiné*, p. 277 (1872).

Planta ramosa, ramis tenuibus, habitu gracili. Folia anguste lanceolata, basi longe acuminato-cuneiformia, viridia, glabrescentia, superficie 6-9 × 3,5 cm.; serratura constans in folii utroque margine ex quatuor dentibus

Digitized by Google

robustis, trigonos 1-1,2 mm. altos, extus rectos vel leviter undulatos, culminibus acutis et prorsus versis 5 mm. distantibus, constituentibus. Calix pubescentia tenui et adpressa obtectus, eglandulosus vel glandulis rarissimis et minusculis in dentium regione praeditus; nervatio graciliter et tenuiter in calicis indumento albo-viride delineata; dentes tubo calicino bis breviores, triangulari-lanceolati, longissimi 2,5-3 mm. attingentes, arista alba vix 1 mm. longa praediti.

Area. — Varietas raririssima hucusque tantum in *Galliae* provincia Sabaudia detecta est. Chemin du Chalet, maison des dominicains supra Vorep : leg. Bertet (10 Aug. 1857) in h. Perrier.

ζ. Var. odontota Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 28 (1891).

Planta ± ramosa, vulgo robusta vel valde robusta. Folia magna, latiora, apice acuta, basi in petiolum brevem extenuata et exacte acuminato-cuneiformia, pinguiter viridia, superficie 4-4,5 × 1,3-1,5 cm.; serratura constans in folii utroque margine ex dentibus quatuor magnis, trigonos 1-1,3 mm. altos, extus rectos vel leviter undulatos, intus rectos, culminibus rectis vel acutis 4-8 mm. distantibus, constituentibus. Calicis structura ut in var. δ.

Area. — Haec varietas, adhuc parum observata, sistit formam dentatam varietatis *Kerneri*. — *Gallia.* La Farette au Châtaignier prope Conflans (Sab.): leg. Perrier in h. suo; in monte Saleva (Sab.) : leg. Chavin in h. Barb. — *Anglia.* Miller's Dale : h. Jäggi.

Observatio. — Formae var. *Kerneri* et *orophilae* ad var. *odontatam* vergentia non rarae sunt, maxime intermediam notavimus ex *Gallia* : Landrichamps : leg. Calley in h. Brux. gen.

η. Var. glabra Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 165 (1891) = *G. glabra* Desétangs in *Bull. Soc. bot. de France*, t. XXVIII, p. 203 (1876) = *G. angustifolia* var *glabrescens* Gremli, *Neue Beiträge*, fasc. I, p. 20 (1880) non Favrat in *Gremli Excursionsfl.*, ed. 2 (1874), p. 322.

Planta ramosa, ramis tenuibus, habitu elegante. Folia anguste lanceolata, ± denticulata. Calix dentibus tubo dimidio brevioribus, 2-3 mm. longis,

Digitized by Google

arista alba 1 mm. longa praeditis, — ut in var. *Kerneri*. Planta omnino glabra, cujus folia, caules et calices, saepe purpurascentia, habitum caracteristicum metallicum cupri colorem referentem possident : labrum corollinum quidem extus pilis destitutum est.

Area. — Planta haec insignis nobis tantum ex duobus locis nota est. — *Helvetia*. Inter Nant et Jongny supra Vevey (Vaud) : leg. Gremli in h. Burn. — *Gallia*. In agris villae de Méline prope Rouvres (Aube) : leg. Desétangs in h. Barb. — Insuper formam approximatam notavimus ex Belgio ad Verviers : leg. Lejeune in h. Brux. belg.

θ. **Var. canescens** Reichenbach, *Flora germanica excursoria*, p. 322 (1830); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 166 = *G. canescens* Schultes, *Observationes botanicae*, n° 829 (1809) et *Oesterreich's Flora*, t. II, p. 151 (1814) = *G. angustifolia* var. *littoralis* de Vicq et Brutt., *Catalogue des plantes de la Somme*, p. 185 (1865).

Distinguitur foliis angustis saepe plicatis et marginibus infra ± revolutis, indumento crasso coactato tectis, quod indumentum — cum etiam in caule praesit — plantae toti habitum albescentem et canescentem dat. Calices ± glandulosi vel subglandulosi, pilis adpressis valde crebris canescentes; dentes calicini tubo dimidio breviores, 2-3 mm. longi, arista alba vix at ne vix 1 mm. longa ornati.

Area. — Varietas perrara huc et illuc in saxosis vel potius in lapillis teretibus ad mare et ad lacus crescit. — *Austro-Hungaria*. Prag in declivibus lutosis : leg. Freyn in h. Burn., h. Jäggi (haud typica, sed ad var. *Kerneri* vergens); in rupibus calcareis prope Karlstein (Bohem.) : leg. Engler in h. suo; in saxosis prope Steyr : Frank in h. Callier (haud typica sed ad var. *Kerneri* vergens). — *Germania*. In dumetis promontium sylvae hercynicae prope Wereigerade : leg. Beyrich in h. Berol. gen. — *Italia*. Venetia, ditio Veronensis in locis glareosis ubique circa Torri : leg. Rigo in h. Berol. eur. — *Hispania*. Leon : leg. Fauché in h. Boiss. propr. (haud typica, sed ad var. *orophilam* vergens). — *Gallia*. Nice, ad littus maris : h. Nic., h. Thuret, leg. Durando in h. Alp. mar., leg. Fauché in h. Boiss. propr., leg. Reuter in h. Barb., leg. Ayasse in h. suo; in petrosis circa Toulon :

Digitized by Google

leg. Riedel in h. Berol. gen.; prope Mende : leg. Prost in h. Berol. eur. (forma approximata); inter Cayeux et promuntorium de Hourdel (Somme) in lapillis maritimis : leg. Bonnet (Soc. dauph., n° 1809) in h. Boiss. nov., h. Burn., leg. Vignier (Fl. Gall. sept. et Belg., n° 29) in h. Burn.; in glareosis et lapillosis ad littus lacus Lemani prope Thonon et Ripaille (Sab.) : leg. Puget in h. Perrier, h. Deless. helv., h. Brux. gen., h. Briquet, leg. Ayasse in h. suo.

Observatio. — Cum descriptio princeps cl. Schultes omnino manca sit, interpretationem antiquissimam et certissimam cum diagnosi congruentem pro bonam accepimus. In Germania saepe var. *calcarea* pro var. *canescente* habetur, sed nulla documenta ad hanc comprobandam opinionem novimus. Interpretatio cl. Reichenbachii autem citatione loci classici (prope Nicaeam), a beato Charpentier detecti, nobis adhuc certissima videtur, putamus igitur in futuro nomenclaturam illam servandam esse et ceteras rejiciendas.

1. **Var. calcarea** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 28 (1891) = *G. calcarea* Schönheit, *Phytographische Bemerkungen* (*Flora*, XV, 1832, pp. 593-600, cum descriptione optima) = *G. angustifolia* var. *arenaria* Grenier et Godron, *Flore de France*, II, p. 684 (1852); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 167 = *G. arvatica* Jordan in Billot, *Annotations à la Flore de France et d'Allemagne* (Jun. 1858), p. 130 = *G. divergens* Timbal ap Loret in *Bull. Soc. bot. de France*, II, p. 794 (1859) absque diagn. = *G. Ladanum* var. *monticola* Launes ap. Magnier, *Fl. selecta*, n° 940 (1885).

Planta diffuse ramosa. Folia lanceolata, mediocriter angusta, dentibus raris, 0,5 mm. altis. Calix glandulis stipitatis vulgo crebris praeditus, valde hirtus, pilis patulis et adpressis commixtis, cum posteriores numerosi sint verticillastri omnino canescentes fiunt; calicis tubus 5-6 mm. longus, nervis parum evidentibus; dentes tubo dimidio breviores, circa 3-3,5 mm. longi, arista alba 1 mm. longa praediti, glandulis stipitatis crebris praecipue in sinuum regione ornati.

Area. — Per arva Europae late dispersa, ut sequitur. — *Austro-Hungaria.* Clausenburg (Transsilv.) : leg. Janka in h. Tur. gen. et Jäggi; prope Ofen : leg. Richter in h. Chenevard; Eibenschitz (Morav.) : leg. Schröder in h.

Digitized by Google

Jäggi; in rupibus calcareis vallis Waagthal prope Clausenberg : leg. Engler in h. suo; prope Bozen (Tyr.) : leg. v. Haussmann in h. Berol. gen. — *Germania.* Circa Nordhausen : leg. Vocke in h. Chenevard; in saxosis apricis ad Guschenleben prope Halle : leg. Hornung in herb. Brux. belg.; Lettin prope Halle : leg. Haussknecht in h. suo; Bahrdamm prope ruinam Hardenstein ad riv. Ruhr : leg. Hasse in h. Hausskn.; Uhlackenhügel prope Kaulsdorf, Weimar in agris, Kösen in agris (omn. Thüring.) : leg. Haussknecht in h. suo; Andernach et Bestrich (Rheinpr.) : leg. Wirtgen in h. Berol. eur.; Turnberg et Donnersberg (Pal. bav.) : leg. A. Braun in h. Berol. eur. — *Helvetia.* Schaffhausen : leg. Heer in h. Tur. helv.; Aarau : leg. Jäggi in h. Tur. gen.; Zürich : leg. Kölliker, Lehmann, Schröter in h. Tur. helv.; Affoltern (Zürich) : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; Tübendorf (Zürich) : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; circa S^{t}-Sulpice (Vaud) : leg. Favrat in h. Chenevard; Lausanne : h. Brux. gen.; Valleyres (Vaud) : leg. Boissier in h. Boiss. propr.; Genève : leg. Seringe in h. Deless. helv.; S^{t}-Georges (Genève) : leg. Ayasse in h. suo; Veyrier (Genève) : leg. Ayasse in h. suo; Genthod (Genève) : leg. Ayasse in h. Deless. helv.; circa Vernier (Genève) : leg. Chenevard in h. suo; Neuchatel : leg. Godet in h. Deless. helv.; Corcelles (Neuchatel) : leg. Romieux in h. suo. — *Italia.* Torino, lungo la Stura : leg. Ferrari in h. Taurin.; Vallone di Scroogno in valle di Stura : leg. Ferrari in h. Taurin.; lungo la strada da Meano alla Madona e ma tossa (Valle di Susa) : leg. Ferrari in h. Taurin. — *Gallia.* Caïros prope Nice : h. Nic.; circa Nice : leg. Burnat in h. Alp. mar. et h. Thur.; in silvis Montelegno prope S^{t} Laurent du Var : h. Nic.; Theoule ad montem Esterel (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; ad Marseille : leg. Durand in h. DC. Prodr.; M^{t} Ventoux : leg. Requien in h. DC. nov.; Toulon ad Draguignan : leg. Chambeiro in h. Deless. gen.; prope Lourdes (H^{tes} Pyr.) : leg. Boutigny (Billot, n° 234) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. Brux. gen.; ad S^{t}-Bonnet-de-Val-Clérieux (Drôme) : leg. Marçais (Soc. dauph., n° 3006) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Burn.; prope Briançon (H^{tes}-Alpes) : leg. Launes (Flora select., n° 940) in h. Deless. gen.; prope Corps (Isère) : Burnat in h. suo; in arvis montis Salève (Sabaud.) : leg. Seringe in h. Deless. helv., leg. Ayasse in h. suo, leg. Chavin in h. Barb.; S^{t}-Gen-

Digitized by Google

goux (Saône-et-Loire) : leg. Paris in h. Deless. gen.; prope Lyon : Aunier in h. Deless. gall.; circa Nogens s. S. : leg. Désétangs in h. Hariot; Ste-Thorette (Cher) : Déséglise in h. Brux. gen.; Clichy-la-Garenne : leg. Ayasse in h. suo; Ste-Colombe prope provins : leg. Desétangs in h. Hariot; in agris ad Garches prope Paris : leg. Vigineix in h. Deless. gall.; prope Dreux : leg. Daenen in h. Deless. gall.; Villon-sur-Mer (Calvados) : leg. L. et P. Errera in h. Brux. belg.; Lauvergney : leg. Callay in h. Brux. gen.; Frizon, Nomexy, Rambervillers, St-Maurice (omn. Vosges) : leg. Gérard (Fl. select., nos 1512, 939, 371bis) in h. Deless. gen.; Romont prope Rambervillers (Vosges) : leg. Boulay (Billot, 2341bis) in h. Perrier; Lamberey (Vosges) : leg. Riomet in h. Callier; Forêt-d'Arbois (Jura) : leg. Hébier in h. Jäggi; Vesoul (Hte-Saône) : h. Tur. gen.; Arnance (Aube) : leg. Désétangs in h. Barb.; circa Jaucourt, Engente, Arlais, Belvay, Voigny, Méry, St-Nicolas, Arman-la-Ville, Baroville, Arsonval et Moûtier (Aube) : leg. Désétangs in h. Hariot. — *Belgium.* Obourg : leg. Martinis (Herb. pl. rar. crit. belg.) in h. Brux. belg.; Montaigle (Namur) : leg. Crépin in h. Brux. belg., leg. Dieudonné in h. Brux. gen.; Vieusart : leg. Baguet in h. Brux. gen.; ad Verviers : leg. Lejeune in h. DC. Prodr. — *Anglia.* Gigmagog (Cambridge) : leg. Linton in h. Romieux.

Observatio 1. — Connectitur haec varietas cum var. *Kerneri* formis intermediis numerosis, e quorum stationes citentur sequentes. — *Helvetia.* Geerslisberg (Zürich) : leg. Käser in h. suo; Bern : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; St-Sulpice (Vaud) : leg. Favrat in h. Burn. — *Gallia.* In arvis ad Boinet prope Monflanquin (Lot-et-Garonne) : leg. Raynaud (Fl. select., no 371) in h. Deless. gen.; circa Lyon : leg. Van Heurck in h. Brux. gen.; Rambervillers (Vosges) : leg. Gérard (Fl. select., no 938) in h. Deless. gen.; inter Rouvre et villam Méline, ad Baroville, ad Méry (Aube) : leg. Désétangs in h. Hariot. — *Luxemburgia.* Rochefort : leg. Thielens in h. Burn. — *America borealis.* East-Boston (Mass. U. S.) : leg. Blake in h. Barb.

Etiam cum var. *orophila* formae transitivae adsunt. — *Hispania.* Rioxa : leg. Pavon in h. Boiss. propr. — *Helvetia.* Prope Aubonne (Vaud) : leg. Schoendorfer in h. Deless. helv. — *Gallia.* Ad Beira prope Nice : h. Nice; in arvis circa Annecy : leg. Didier (Billot, no 1049bis) in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. Deless. gall.

Digitized by Google

Observatio 2. — *G. Laramberguei* (Martrin-Donos, Florule du Tarn, p. 565, 1864) est forma nobis dubia et, speciminibus authenticis deficientibus, ex descriptione sola difficillime eruenda. Cl. auctor enim indicat calicis dentes tubo longiores calicemque glandulosum esse, quippe qui caracteres, ut sciamus, exacte nulli *G. Ladani* varietati tribui possunt. Forma ideo ulterius investiganda est.

κ. **Var. amaurophylla** Timbal-Lagrave in *Bull. Soc. bot. de France*, XI (1864), sess. extr., p. LXXXII = *G. amaurophylla* Timbal-Lagrave in *Soc. dauph.* n° 5005 (1886).

Planta circa 20 cm. alta, diffuse ramosa, glabrescens, atro-viridis. Folia elliptica, apice acutiuscula, basi extenuata et cuneiforma, superficie 2,5 × 1 cm.; serratura constans in folii utroque margine ex 2-4 dentibus parum evidentibus, trigonos 1 mm. altos culminibus 3-4 mm. distantibus, constituentibus. Calix tubo viridi, nervatione robusta, 5 mm. longo; dentes acuminati 2,5-4 mm. longi, arista alba minuscula praediti, pilosi et stipitato-glandulosi.

Area. — Hucusque in unico loco *Pyrenaeorum gallicorum* reperta. In saxosis vallis d'Esquierry (H^te^-Garonne), alt. 1600-2000 m. : leg. Timbal-Lagrave (Soc. dauph., n° 5005) in h. Boiss. nov., h. Barbey, h. Ayasse.

λ. **Var. carpetana** Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 167 (1891) = *G. carpetana* Willk., *Sertum florae hispanicae* (Flora, XXXV, 1852, pp 282-283); *Pugillus plant. nov.* (*Linnaea*, XXX, p. 137, 1859); *Prodr. Fl. hisp.*, II, p. 438 (1870) = *G. monticola* Jord. ined. ap. Reverchon (pl. Alp. mar. venales).

Var. *arenariae* affinis calice pilis crebris patulis, glandulis stipitatis numerosis comitatis. — Planta diffusa, patula, caulibus pilosis, internodiis quoad longitudinem sat variantibus. Folia superficie 2,5 × 1 cm., ± pubescentia; serratura constans in foliis inferioribus ex 3-4 dentibus, trigonos 0,5-0,8 mm. altos, prorsus versos, culminibus acutis 4-5 mm. distantibus constituentibus; in foliis ramealibus vulgo subnulla. Calicis tubus saepe usque ad 7 et 8 mm. longus, viridis, pilis patulis et glandulis stipitatis crebris obtectus; dentes longiores ad 7 et 8 mm. longi, arista alba saepe dejecta ad 1,5-1,7 mm. longa praediti. Labiolum corollinum saepe lobo medio denticulato, sed sine pleuridisatione constante.

Digitized by Google

Area. — Varietas perrara in regione mediterranea endemica est. — *Gallia.* Circa Nice : leg. Barla in h. Alp. mar. et in h. Nic.; Annot (Alp. mar.), locis aridis versus montem col d'Allons : leg. Reverchon in h. Alp. mar., h. Boiss. propr., h. Barb.; in monte Sense (Delph.) : leg. Reverchon in h. Burn., Brux. gen.; Nimes : leg. Salis in h. Tur. gen. — *Hispania.* Sierra de Guadarrama ad Puerto de la Fuenfria : leg. Willkomm in h. suo.; Alpedrete et Somosierra : secundum Cutanda ap. Willk. et Lange, l. c., p. 438.

Observatio. — In varietatem *calcaream,* cui valde affinis, transit speciminibus dubiis ex regione mediterranea, inter praestantiores notavimus : *Austria.* In rupibus prope Bozen (Tyr.) : leg. Haussmann in h. Brux. gen. — *Gallia.* Circa Antibes (Alp. mar.) : h. Thuret.

2. Subsp. intermedia Briquet, *Labiées des Alpes maritimes,* p. 168 = *G. intermedia* Villars, *Prospectus,* p. 21 (1779); *Histoire des plantes du Dauphiné,* t. II, p. 387 (1787) = *G. parviflora* Lamarck, *Encyclopédie,* II, p. 600 (1786) = *G. latifolia* Hoffmann, *Deutschland's Flora,* II, p. 8 (1804) = *G. Ladanum* var. *latifolia* Wallroth, *Schedulae criticae,* p. 302 (1822); Wimmer et Grabowski, *Flora Silesiae,* pars II, t. II, p. 190 (1829) = *G. Ladanum* subsp. *latifolium* Gaudin *Flora helvetica,* IV, p. 54 (1829) = *G. Ladanum* cum var. *Marrubiastrum* Reichenbach, *Flora germanica excursona,* p. 322 (1830) = *G. Ladanum* var. *intermedia* Mutel, *Fl. française,* III, p. 28 (1836) = *G. Ladanum* var. *latifolia* subvar. *viridis* Griesselich, *Kleine botanische Schriften,* I, p. 151 (1836)? = *G. Ladanum* var. *glandulosa* Löhr, *Notizen über die Flora von Trier* (*Flora,* XX, 1837, p. 361) = *G. Ladanum* var. *simplex* C. Koch, *Catalogus plantarum quas in itinere per Caucasum,* etc. (*Linnaea,* XVII, 1843, p. 298) = *G. Ladanum* var. *latifolia* et *intermedia* Visiani, *Flora dalmatica,* II, p. 214 (1847) = *G. glandulosa* C. Koch, *Beiträge zu einer Flora des Orients* (*Linnaea,* XXI, 1848, pp. 680-681) = *G. latifolia* var. *glandulifera* Bamberger in *Flora,* XXXIX, 1856, p. 736 = *G. longiflora* Timbal et Marçais in Magnier, *Scrinia Fl. select.,* fasc. VI, p. 116 (1887) = *G. intermedia* cum var. *pumila* Beyer, *Beiträge,* etc., p. 26 (1891).

A subsp. *angustifolia* differt foliis ovato-oblongis in utroque margine 3-7 dentibus praeditis; calice tubuloso, viride, patule glanduloso-piloso, dentibus saepius aequalibus. In hac subspecie specimina parviflora vulgatiora sunt et saepe exclusis formis macranthis in regionibus vastis sola reperienda sunt, in aliis locis vero commixta crescunt; subsp. *angustifolia* vice versâ agit.

Digitized by Google

Area. — A Siberia Uralense, Caucaso (C. A. Meyer, *Verzeichn. der Pflanzen Caucas*, p. 91), Armenia et montibus ponticis per Rossiam et Europam totam usque ad insulas Britannicas et Feröenses (Trevelyan, *Veget. Fer.*, p. 8). In septententrionalibus subspecies agrestis, in meridionalibus potius montana et alpestris.

μ. Var. intermedia Mutel, *l. c.* (1836); Visiani, *l. c.* (1847) et caetera synonyma sub subspecie citata.

Synonymia et caracteres subspeciei. Folia vulgo majora, ± late ovato-oblonga vel ovato-lanceolata, basi vero cuneiformia sed satis breviter in petiolum brevem extenuata, dentibus sat crebris, robustis, ultra 1 mm. altis. Calix tubo vulgo ultra 5 et 6 mm. longo, nervatione evidentiore; dentes tubo dimidio breviores arista parva ornati.

Area. — *Sibiria.* Seimonofik in Ural. merid. : leg. Ehrenberg in h. Berol. gen. — *Armenia.* In Armenia rossica : leg. C. Koch in h. Berol. gen. — *Lazistania.* In valle Djimil, alt. 2000 m. in collibus incultis : leg. Balansa in h. Boiss. propr. — *Rossia.* In Livonia : leg. Banga in h. DC. Prodr.; Walkiala (Finnl.) : leg. Risinger in h. Berol. eur.; prope S^{t}-Petersbourg : leg. Rack in h. Berol. eur.; prope Pargula : leg. Regel in h. Boiss. propr.; prope Schlüsselburg : leg. Körnicke in h. Berol. eur. — *Austro-Hungaria.* In Banatu : leg. Heuffel in h. Berol. eur.; in valle Waag prope Rosenberg (Hung.) : leg. Engler in h. Berol. eur.; prope Prag : leg. Ascherson in h. Berol. eur.; prope Carlsbad (Bohem.) : leg. de Cloët in h. Brux. gen.; in glareosis ad Trins in valle Gechnitz (Tyr. austr.) : leg. Kerner (Fl. exs. austro-hung., n° 942) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Berol. eur., h. Engler; supra Campitello (Tyr. austr.) : leg. Reuter in h. Barb.; prope Lienz : leg. Gander in h. Burn.; in agris montis Ritten (Tyr.) : leg. v. Haussmann in h. Berol. gen., h. Brux. gen.; in subalpinis Carnioliae superioris : leg. Graff in h. Boiss. propr. — *Germania.* Prope Komis (Pol.) : leg. Raenitz in h. Berol. eur.; Petersdorf prope Gleiwitz : leg. Kabath in h. Engler; Hirschberg (Siles.) : leg. A. Braun in h. Berol. eur.; Schwengfels prope Schweidnitz (Siles.) : leg. Callier in h. suo; Brachen prope Schmolz (Siles.) : leg. Engler

Digitized by Google

n h. suo; in agris prope Freistadt (? Siles.) : leg. Engler in h. suo; Angermünde : leg. A. Braun in h. Berol. eur.; prope Berlin : leg. Schlechtendal in h. Berol. gen., leg. Regel in h. Tur. gen.; Wilmersdorf et Schöneberg (Brand.) : leg. Scheppig in h. Berol. eur.; Lychen (Brand.) : leg. Heyland in h. Briquet, h. Chenevard; Aschersleben et Magdeburg : leg. Hornung in h. Brux. gen.; Halle : h. Berol. eur.; Erfurt : h. Brux. gen., leg. A. Braun in h. Berol. eur.; in agris prope Kröllwitz et Lettin : leg. Haussknecht in h. suo; auf der Haarde, Ahlenriagen (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Zeulenroda (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Saalburg (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Neustadt (Thür.) : leg. Voek in h. Callier; Herford (Westph.) : leg. Weihe in h. Brux. gen. ; München : leg. Brux. gen.; prope Stallingen (Württ.) : leg. Kemmler in h. Berol. eur.; prope Freiburg (Bad.) : leg. A. Braun in h. Berol. eur. — *Helvetia.* Inter Lienz et Surava (Graubünd.) : leg. Brügger in h. Tur. helv; Alvenen (Graubünd.) : leg. Salis in h. Tur. helv.; in agris ad Saijis prope Trinis (Graubünd.) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; Samaden (Engad., Graubünd.) : leg. Huguenin in h. Tur. helv.; Süss (Unterengad., Graubünd.) : leg. Lehmann in h. Tur. helv.; Schynpass (Graubünd) : leg. Pfister in h. Käser; Remüs (Unterengad., Graubünd) : leg. Käser in h. suo; prope Gudiam (Graubünd.) : leg. Moritzi in h. Barb.; prope Sils (Graubünd.) : leg. Moritzi in h. Deless. helv. et DC. Prodr.; Guarda (Graubünd.) : leg. Andur in h. Burn.; Bergün (Graubünd.) : leg. Andur in h. Tur. helv.; inter Chur et Churwalden (Graubünd.) : leg. Leresche in h. Tur. helv.; Liwinenthal inter Giornico et Faido (Graubünd.) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; in valle Mesocco (Graubünd.) : leg. Salis in h. Tur. helv.; prope Lugano : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; Val Campo in valle Maggia (Tessin) : leg. Schröter in h. Tur. helv.; Locarno (Tessin) : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; Gandria (Tessin) : leg. Schöter in h. Tur. helv.; ad Berisal in via semproniana et in rupibus ad Rüfibord in valle Jafischthal (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; Allmagell in valle Saas (Valais) : leg. Romieux in h. suo : leg. Chenevard in h. suo; prope S^{t}-Nicolas (Valais) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; Stalden (Valais) : leg. Thomas in h. Boiss. propr.; supra Naters (Valais) : leg. Favrat in h. Burn., h. Jäggi; S^{t}-Jean in valle Anniviers (Valais) : leg. Leresche in h. Tur.

Digitized by Google

(Soc. dauph., 2me série, n° 179) in h. Ayasse : leg. Gillot in h. suo; La Grave (Htes-Alpes) : leg. Mathonnet (Reliq. Maill., n° 1583) in h. Deless. gall., h. Burn., h. Brux. gen.; Lautaret (Htes-Alpes) : leg. Faure in h. Burn.; in alpibus circa Grenoble : leg. Verlot in h. Boiss. propr., h. Tur. gen., h. Barb.; inter Bressans et Bonneval (Maurienne, Sab.) : leg. Arvet-Touvet (Soc. dauph., n° 4806) in h. Barb., h. Ayasse; Lans-le-Villars et Lans-le-Bourg (Maurienne, Sab.) : leg. Reuter in h. Barb., Perrier in h. suo; in monte Cenis in glareosis ad lacum : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; in montibus circa Conflans (Sab.) : leg. Perrier in h. Deless. helv., h. Boiss. propr.; la Longefoi supra Sceez prope la Thiule (Tarentaise, Sab.) : leg. Perrier in h. suo; Tours (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; prope la Bâthie (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in valle Roselent prope Beaufort (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in monte col de la Louze (Tarentaise, Sab.) : leg. Perrier in h. suo; inter Chevreux et Plancherine (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in valle Montjoie (Faucigny, Sab.) : leg. Reuter in h. Barbey; Chamonix in glareosis ad le Chapeau et la mer de glace : leg. Desétangs in h. Barb., leg. Reuter in h. Ayasse; in monte Pic de la Corne (Chablais, Sab.) : leg Briquet in h. suo; infra montem Foilly supra St-Jean d'Aulph. (Chablais, Sab.) : leg. Briquet in h. suo; ad vicum Habère-Lullin (Chablais, Sab.) : leg. Puget in h. Perrier; in monte Saleva ad les XIII Arbres et la Croisette (Sab.) : leg. Puget in h. Perrier, leg. Chavin in h. Perrier, h. Boiss. propr., h. Barb., h. Deless. helv., leg. Lagger in h. Burnat; Mt de Sion (Sab.) : leg. Chavin in h. Barb.; in cultis ad Pontarlier (Doubs) : leg. Grenier (Billot, nos 1299 et 1299bis) in h. Boiss. propr., h. Deless. gall., h. Perrier, h. Brux. gen. — *Belgium.* Louette-St-Pierre (Namur) : leg. Gravet (Pl. Gall. sept. et Belg., n° 217) in h. Burn.; Rochefort : leg. Crépin (Herb. pl. sel. crit. hybr. rhen., n° 513) in h. Berol. eur., Brux. gen., Brux. belg., idem (Herb. pl. rar. crit. Belg., n° 223) in h. Brux. gen.; ad Rixensart : leg. Baguet in h. Brux. belg.; Philippeville : leg. Cogniaux (Kickxia belg., n° 256) in h. Brux. belg. et gen. — *Scandinavia.* In locis rupestribus Upsaliae : leg. Ahlberg (Fries, Herb. norm., XVI, n° 19) in h. Boiss. nov., leg. Fries in h. Berol. gen.; prope Stockholm : leg. Andersson in h. Barb., leg. Fleme in h. Brux. gen.; Ketidslarp (Smol.) : leg. Lindeberg

Digitized by Google

in h. Romieux; in saxis prope Thorsburg (Gottl.) : leg. Zetterstedt in h. Brux. gen.; in valle Goldbrousdahl, Dovrefield (Norv.) : leg. Boiss. et Reut. in h. Barb. — *Anglia*. Near Janion (?) : leg. Maton in h. Brux. gen.

ν. **Var. abundantica** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

Plantula 5-15 cm. alta. Radices tenues saepe adhuc in calicibus exsiccatis anni praecedentis insertae. Caulis debilis, gracilis, rubescens, simplex, ± pubescens, internodiis in parte axis inferiore 2-4 cm. longis, subito multo brevioribus in parte superiore. Folia minima, oblonga vel elliptica, apice acutiuscula vel obtusiuscula, basi cuneiformia, ± pilosa, superficie 0,5-1 cm.; serratura constans ex dentibus minusculis, trigonos 0,2-0,5 mm. altos, prorsus versos, extus ± undulatos vel rectos, culminibus rectis vel acutis 1-2,5 mm. distantibus, constituentibus. Calix tubulosus; tubus circa 5 mm. longus; dentes acuminati, arista parva quam in var. praecedente breviore ornati, 1-3 mm. longi. Occurrit grandiflora corolla calicis tubum 1,5 cm. excedente et parviflora tubum saepe minus quam 1 cm. excedente.

Area. — Hucusque tantum in stationibus duobus elatioribus Alpium occidentalium observata. — *Helvetia*. In fissuris arena repletis rupium haud procul a via occidentem versus in summo jugo Simplon (Valais) : leg. Briquet et Chenevard in cujusque herb. — *Gallia*. In schistosis arenosisque in clivo australi montis Pic de la Corne (Chablais, Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo et in h. Chenevard.

Observatio 1. — Varietas *abundantiaca* in formam pumilam varietatis praecedentis abit transitionibus continuis in statione Sabaudiae supra memorata. Caeterum formas intermedias collegimus in *Helvetia* : In conscensu a vico Berisal in vallem editiorem Steinenthal (Valais).

Observatio 2. — Subspecies *intermedia*, praeter varietates omnino intermedias ut var. *carpetana*, cum formis aliis subsp. *angustifoliae* stirpibus transitivis — quarum classificatio valde incommoda et de quibus fertilibus, absentia simul amborum parentium et vegetatione omnino normale, hybriditas invocari non potest — connectitur.

Digitized by Google

Ita vidimus inter var. *arenariam* et *intermediam* specimina transitoria ex *Helvetia :* Pone Ragatz (St-Gallen) : leg. Salis in h. Tur. helv.

Inter var. *orophilam* et *intermediam* ex *Helvetia :* In ruderatis ad la Servette (Genève) : leg. Ayasse in h. suo. — *Gallia.* In faucibus Sigale (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.

Cum prior forma omnibus caracteribus media sit, in posterioribus duobus calix ad var. *orophilam* pertinet, dum folia omnino ad ea var. *intermediae* typicae spectant. Insuper vidimus ex Sibiria Uralense specimen a beato Ehrenberg ann. 1829 lectum, quod caracteres plurium varietatum in se conjungit : serratura enim ut in var. *Berteti,* sed folia basi magis rotundata, calix imo ad var. *orophilam* pertinere videtur sed glandulosus.

Perquisitione accurata, praecipue in regione mediterranea, novas illecebrosas transitivas formas serius detegendas esse persuasum habemus.

Observatio 3. — *G. angustifolia* × *latifolia* de qua cl. Haussknecht (in *Mittheil. des bot. Vereins für Gesamtthüringen,* 1884, p. 8) memorat, est var. *intermediae* forma typica ex specimine authentico ab auctore ipso prope Zeulenrode lecto.

× G. Wirtgeni Ludw. emend.

(= *G. dubia* × *Ladanum*).

= *G. Ladano-ochroleuca* Crépin in *Bull. Acad. des sc. de Belgique,* t. XX, 3e partie, pp. 58-59 (1853); Wirtgen in *Verhandl. des naturhist. Ver. der preuss. Rheinl. und Westph.,* XI, pp. 437-448 (1854) = *G. Wirtgeni* (*ochroleuca* × *angustifolia*) et *G. Haussknechtii* (*ochroleuca* × *intermedia*). Ludwig in *Verhandl. des bot. Vereins für die Prov. Brandenburg,* XIX, p. 117 (1877).

Morphologia. — Planta quoad structuram modo valde variabili inter *G. dubiam* et *G. Ladanum* oscillans. Caules vulgo perramosi, rubescentes vel virides. Folia aliquot differre videntur cum subsp. *angustifolia* vel subsp. *intermedia* connubii particeps sit. Altera vice folia sunt late oblonga vix ab eis *G. dubii* vel *G. Ladani* subsp. *intermediae* diversa; vice altera folia ± longe lanceolata, apice acuta, basi cuneiformia, viridia sunt, eorum serratura valde reducitur et dentibus trigonos vix ultra 0,5 mm. altos formantibus consti-

Digitized by Google

tuitur. Caeterum latitudine foliorum non dijudicari potest utrum subsp. *angustifolia* vel *intermedia* ad parentes pertineant, nam formae formulae *dubia* > × *Ladanum angustifolia* etiam folia valde amplificata habere possunt. De participatione exacta parentium in hybrida studium in loco natali ad plantas vivas tantum gravioris ponderis existimetur. In omnibus folia superiora mollitie *G. dubiam* in mentem uvocant. Bracteae vulgo velutinae vix aristatae. Calices tubulosi, ± molles, saepius valde glandulosi; tubus nervis ± evidentibus ad 5-6 mm. longus; dentes lanceolati, breves, ± aequales, basi lati, ad 2 mm. longi, arista alba ad 1 mm. longa praediti. Corollae luteae, purpureae vel versicolores. Porro dimensiones hic indicatae nullo modo constantes sunt sed approximatiem sistunt a qua specimina in una eademque statione ± recedunt. Pollen rarus et saepius male evolutus. Ovaria vulgo sterilia.

Area. — Ut jam supra diximus (p. 232) hybrida difficilis est distinguere, nec oculus peritus semper in determinatione ad plantas siccas semper sufficiet. Locos sequentes tutos tamen citamus ut attentio in hujus plantae studium ducatur. — *Germania.* Schwarzburgerthal (Thüring.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Greiz (Thür.) : leg. Ludwig in h. Haussknecht; Saffenburg in catena Eiffel : leg. Haussknecht in h. suo; circa Bassum (Westph.) : leg. Beckmann in h. Haussknecht; circa Bestrich et Andermatt (Westph.) : leg. Wirtgen (Herb. plant. crit. rhen., n° 291 et 291*b*) in h. Berol. eur., h. Brux. gen., h. Tur. gen.; circa Coblenz : leg. Wirtgen in h. Brux. gen. — *Belgium.* Prope Rochefort et Ciergnon : leg. Crépin in h. Brux. belg., h. Berol. eur.; ad Evrehailles : leg. A. Levoz in h. Brux. belg.; ad castellum de Namur : h. Brux. belg. — *Gallia.* Prope Châtel in ripis flum. Moselle (Vosges) : leg. Gérard (Fl. select. n° 1266 et 1267) in h. Deless. gen. — *Helvetia.* Rupoldingen auf Stoppelfeld (Soleure) : leg. Jäggi in h. Tur. helv; prope Vaumarcus (Neuchâtel) teste Godet (*Fore du Jura,* p. 551); magna copia inter Lausanne et S^{t}-Sulpice, ut etiam in arvis pagi S^{t}-Sulpice (Vaud): leg. Favrat et Chenevard in h. Käser, h. Chenevard, h. Briquet, leg. Favrat, Muret et Burnat in h. Burnat.

Digitized by Google

3. G. dubia Leers.

Leers, *Flora Herbornensis*, p. 133 (1775) = *G. cannabina* Pollich, *Flora palatina*, II, p. 149 (1777) non Roth, nec Gmelin = *G. segetum* Reichard, *Flora moeno- Francofurtana*, II, p. 8 (1778) = *G. villosa* Hudson, *Flora anglica* ed. 2, p. 256 (1778); de Clairville, *Manuel d'herb. en Suisse et en Valais*, p. 190 (1811); Smith, *Flora britannica*, II, p, 629 (1800); Crépin, *Manuel de la flore de Belgique*, ed. 3, p. 265 (1874) = *Ladanum luteum* Gilibert, *Flora lithuanica*, II, p. 88 (1781) = *G. ochroleuca* Lamarck, *Encyclopédie*, II, p. 600 (1786); Bentham, *Labiatarum gen. et species*, p. 523 (1832-36) et in DC, *Prodr.*, XII, p. 497 (1848); Koch, *Synopsis*, p. 489 (1857) = *G. prostrata* Villars, *Hist. des plantes du Dauphiné*, II, p. 388 (1787) = *G. grandiflora* Roth, *Tentamen fl. germanicae*, I, p 254 (1788); Willdenow, *Species plantarum*, III, pp. 91-93 (1800) = *Tetrahit longiflorum* Moench., *Methodus plantas horti bot. et agri. Marburg.*, etc., p. 395 (1794) = *G. ochroleuca* cum var. *minor* et *purpurea* Gaudin, *Flora helvetica*, IV, pp. 54-56 (1829) = *G. elegans* Boreau, *Flore du centre de la France*, ed. 3, p. 526 (1857) = *G. Ladanum* var. *villosa* cum subvar. *umbrosa*. Ascherson, *Flora der prov. Brandenburg*, I, p. 526 (1864). = *G. Ladanum* var. *ochroleuca* Kuntze, *Taschenbuch der Flora von Leipzig*, p. 110 (1867) = *Ladanum dubium* p.p. Kuntze, *Rev. gen. plant.*, p. 52 (1891) — *Icones*. Smith et Sowerby, *English Botany* 33, 2353; Nees, *Plantae medicinales*, 172; Nees, *Genera plant. flor. Germaniae*, 6,32; Oeder, *Flora danica*, 10, 1650; Dietrich, *Flora regni boruss.*, 3, 153; Sturm, *Deutschland's Flora*, 14, 62; Reichenbach, *Iconographia botanica*, t. XLVI; Reichenbach f., *Icones fl. germanicae et helveticae*, t. XVIII, 27, I.

Morphologia. — Quoad dimensiones varians. Caulis angulis evidentibus, semper quadrangularis, pilosus, nunquam glaucescens, internodiis superioribus saepe quidem canaliculatis. Folia oblonga vel oblongo-lanceolata, serratura constans ex dentibus crebris ut in *G. Ladanum* subsp. *intermedia* sed dimensionibus variabilibus, praecipue superiora velutino-sericea, crassa. Calix tubulosus, nervis saepius evidentibus, valde velutino-sericeus, dentibus lanceolato-subulatis ± aristatis praeditus. Corolla pulchre ochroleuca, magna, in labiolo macula violacea ornata. — *Histologia*. Parietes externae epidermatis superficie nunquam ceram exsudantes, sed pilis abunde ut etiam glandulis sessilibus stipitatisque pluricellularibus praeditae. — *Biologia*. Ab Julio ad autumnum in segetibus arvisque aridis arenosisque laete vegetat; species semper silicicola. — *Affinitates*. Inter *G. pyrenaïcam* et *G. Ladanum* subsp. *intermediam* circiter medium tenet.

Digitized by Google

Area. — Plantae hujus in Europa media et occidentali endemicae area in Romania oritur (Brandza, *Prodr. fl. Roman.*, p. 395; Kanitz, *Plant. Rom. hucusque cogn.*, p. 96), in Hungaria et Austria or. videtur introducta vel sporadica, denuo in Croatia indicatur (Schlosser et de Farkas, *Fl. croatica*, p. 572) et hinc inde in Venetiam, Carinthiam et Tyroliam extendit; in Italiam non progreditur; in Germania e contrario valde vulgata est sed non ubique : in regionibus rhenanis vulgarior et hinc inde ad Thüringiam, Germ. centralem et Bavariam extendit, qua postrema provincia area germanica cum austriaca conjungitur. In Helvetia (sed non ubique), Gallia, Belgio, Luxemburgia, Hollandia, demum in Scandinavia meridionali, in Anglia et Hispania, ± late dispersa videtur.

1. Subsp. dubia Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

De caracteribus vide sub unica hujus subspeciei varietate; synonymia eadem est ac pro specie collectiva.

α. **Var. dubia** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

Planta 1-3 dcm. alta. Caulis vulgo robustus, crassus, undique pubescens, viridis vel ± rubescens, internodiis 0,5-5 cm. longis, ± ramosus. Folia lanceolata, ovato-lanceolata, vel ovato-oblonga, petiolo ad 1,5 cm. longo; superiora supra dense pubescentia, subtus velutino-sericea, cinereo-viridia; inferiora magis viridia, saepe rubescentia, apice acuta vel obtusiuscula, marginibus ± convexis, basi ± breviter et cuneiformiter extenuatis, superficie 2,5-4 × 0,7-2 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, 5-8 in folii utroque margine, trigonos extus convexos, intus convexos vel rectiusculos, culminibus rotundatis vel obtusis 1 mm. altis et 2-5 mm. distantibus constituentibus. Verticillastri approximati, internodiis villoso-glandulosis, bracteis verticillastros valde superantibus. Calicis tubus sericeus, pilis adpressis cum pilis patentibus et glandulis stipitatis commixtis, circa 7 mm. longus; dentes lanceolati 3 mm. longi valde glandulosi, arista alba brevi, 0,5 mm. longa, praeditus. Corolla calicis tubum longe (2 cm.) superans; tubus luteus ultra 1 cm. longus valde pubescens, dein subito fauce dilatatus et ibidem venis violaceis ornatus; labrum ad 6 mm. longum luteum, supra villosum rectiusculum; labiolum deflexum ad 1 cm. longum, lobis lateralibus rotundatis,

Digitized by Google

margine nonnunquam leviter crenulatis, lobo medio pleuridiato ad tubi faucem intense luteo et maculis violaceis nonnullis punctatus. In speciminibus micranthis floralium partium dimensiones minuuntur; flores versicolores nonnunquam occurrunt, cum purpurei attente inquaeriri necesse est num hybriditas non causa coloris anormalis sit. (Cf. GODRON, *Notice sur les explorations botaniques faites en Lorraine*, p. 79. Mém. de l'Acad. de Stanislas, 1884.)

Area.—Praeter provincias in speciei totius area notatas, ex locis sequentibus specimina autopsia studere potuimus. — *Germania.* In agris circa Borderholm et Neumünster (Holstein) : leg. Engler in h. suo; Braunschweig : h. Tur. helv.; prope Hameln (Hannov.) : h. Berol. eur.; Schwarzburgerthal (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Greiz (Thür.) : leg. Ludwig in h. Haussknecht; Herford (Westph.) : leg. Weihe (Reichb., n° 234) in h. Boiss. propr., h. Brux. gen.; Witten (Westph.) : leg. Schemmann (Baenitz, n° 39) in h. Burnat; prope Rhede (Westph.) : leg. Grave in h. Berol. eur.; Minden (Westph.) : leg. Weihe in h. Brux. gen.; circa Bassum (Westph.) : leg. Beckmann in h. Chenevard; in catena Eiffel : leg. Wirtgen et Dieudonné in h. Brux. gen.; Coblenz : leg. Wirtgen in h. Brux. gen.; circa Andernach et Bestrich : leg. Wirtgen in h. Berol. eur.; prope Bonn : leg. Kegel in h. Berol. eur., leg. Schmidt in h. Tur. gen.; prope Siegburg (Rheinl.) : leg. h. Engler; Goldstein prope Frankfurt a. M. : leg. Vatke in h. Haussknecht; Blankenheim (Rheinl. : leg. Ahrspiessen in h. Romieux; inter Brohl et Laach (Rheinl.) : leg. Romieux in h. suo; circa Trier : leg. Bockholtz in h. Engler; Heidelberg : leg. Thibaut in h. Boiss. propr.; prope Mannheim : leg. Braun in h. Berol. eur.; Carlsruhe : leg. Braun in h. Berol. eur., leg. Decaisne in h. Brux. gen.; Ketsch a. Rh. (Baden) : h. Berol. eur.; in monte Schlossberg prope Freiburg (Baden) : leg. Schill in h. Burn.; Hagenau : leg. Viguet in h. Deless. gen.; circa Bitche : leg. F. Schultz (Billot, n° 916) in h. Boiss. propr., idem (Sch., Herb. norm., n° 889) in h. Burn., h. Berol. eur., h. Deless. gen., h. DC. nov.; Zweibrücken (Als.) : leg. F. Schultz in h. Berol. eur.; prope Saarbrück : leg. Voydt in h. Engler. — *Helvetia.* Prope Chur (Graubünd.) : leg. Muret in h. Tur. helv.; prope Basel : leg. Moench in h. Tur. helv.; Hohwacht prope Wykon (Luzern) : leg. Siegfried in h. Burn., h. Brux. gen., h. Käser;

Digitized by Google

Utzensdorf (Bern) : leg. Schalch in h. Tur. helv.; ad Hoffwyl (Bern) : leg. Schlumberger in h. Burn.; prope Bern : leg. Guthnick in h. Tur. helv.; Rupoldingen auf Stoppelfeld et Bomingen (Soleure) : leg. Jäggi in h. suo; prope Fribourg : leg. Chavin in h. Perrier, h. Deless. helv., leg. Heer in h. Tur. helv.; circa pagos S^{t}-Cierge et Chapelle (Fribourg) : leg. Leresche in h. Boiss. propr.; Granges de Vesin (Fribourg) : leg. Leresche in h. Boiss. propr.; in arvis prope Vauxmarcus (Neuchatel) : leg. Godet in h. Deless. helv., h. Ayasse, leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv.; S^{t}-Aubin (Neuchâtel) : leg. Payot (Reliq. Maill., n° 1582) in h. Burn., h. Deless. gen., h. Brux. gen.; ad vicum Reste confinibus Neuchat. et Galliae : leg. Payot in h. Deless. helv.; circa Payerne (Vaud) : leg. Leresche in h. Barb. : leg. Vetter in h. Tur. helv.; Sattens prope Moudon : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; Ecublens (Vaud) : leg. Vetter in h. Tur. helv.; prope Bottens (Vaud) : leg. Romieux in h. suo; inter Lausanne et S^{t}-Sulpice : leg. Burnat, Muret, Farat in h. Burn.; S^{t}-Sulpice (Vaud) : leg. Kaller f., Favrat, Muret, Chenevard in h. Barb., h. Deless. helv. h. Jäggi, h. Briquet; Pierrettes prope Lausanne : leg. Rostan in h. Perrier; prope Salvan (Valais) : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb., leg. Thomas in h. Tur. helv., leg. Romieux in h. suo; circa Sion (Valais) : leg. Ayasse in h. suo; in segetis ad Abertolty (Valais) : leg. Daenen in h. Deless. gen. — *Hispania*. Leon : leg. Fauché in h. Boiss. propr.; in campis sabulosis prope Viladran montis Monseny : leg. Costa in h. Boiss. propr. — *Gallia*. Côte-S^{t}-André (Isère) : leg. Boullu (Billot, n° 3454, in h. Perrier, h. Brux. gen.; Vallorsine (Sabaud.) : leg. Centurier in h. Boiss. propr.; Puy-du-Dôme : leg. Maire in h. Boiss. propr., Deless. propr., leg. Vigineix in h. Deless. gall.; Lyon à Francheville : leg. Jordan in h. Barb.; Charbonnière prope Lyon : leg. Aunier in h. Deless. gall.; Labruyère (Rhône) : h. Deless. gall.; S^{t}-Emiland (Saône-et-Loire) : leg. Ozanon (Soc. dauph., n° 3007) in h. Boiss. propr., h. Burn.; Mâcon : leg. Parseval in h. Burn.; circa Nancy : leg. Gourdon et Boivin in h. Boiss. propr., leg. Fauché in h. Barb.; circa Belfort : leg. Parisot in h. Tur. helv.; Chanet prope Poncin (Ain) : leg. Vincent in h. Perrier; in segetibus ad Gouhenans (H^{te}-Saône) : leg. Lenoir et Paillot (Billot, n° 609bis) in h. Perrier, h. Deless. gall., h. Brux. gen.; Forêt de Serre (Jura) : leg. Blanche (Fl. Sequ. exsicc., n° 117) in h. Brux.

Digitized by Google

helv.; ad thermas Leucenses (Valais) : leg. Haller fil. in h. suo; prope Bourg-St-Pierre in valle Entremont (Valais) : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb. ; Bois-Brûlé supra Branson (Valais) : leg. Thomas (Reichb. n° 991) in h. Boiss. propr., h. Berol. gen. et eur., h. Brux. gen., h. Tur. helv.; circa Liddes (Valais) : leg. Reynier in h. Deless. helv.; in valle Entremont : leg. Haussknecht in h. Engler; Van-Haut imo monte Dent du Midi (Valais, f. reducta) : leg. Briquet in h. suo ; ad torrentem Trient et in pratis supra Lens (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; Salvan (Valais) : leg. Bélanger in h. Deless. gen., Briquet in h. suo; Haut d'Arbignon (Valais) : leg. Romieux in h. suo; circa Bex (Vaud) : leg. Reynier in h. Deless. gen. ; Vallorbes (Vaud) : leg. Vetter in h. Barb. ; ad vicum Pisy propem collem Signal de Bougy (Vaud) : leg. Rapin in h. Deless. helv. ; Vernier (Genève) : leg. Reuter in h. Barb. (statio anomala). — *Italia.* Scala di Fraele supra Pedenossa pone Bormio : leg. Brügger in h. Tur. helv.; Val Tellina prope Sacco ad introitum in v. del Bitto supra Morbegno : leg. Brügger in h. Tur. helv.; in valle Gressoney : leg. Lisa in h. suo; St-Remy in valle Aosta : leg. Briquet in h. suo; supra Aosta : leg. Müller Arg. in h. Tur. gen.; ibidem lungo la Dora Baltea : leg. Lisa in h. suo; L'Ar de Tarso prope m. Gd St-Bernard : leg. Burnat in h. suo; via du Crêt ad Chavannis in valle Cogne : leg. Chenevard in h. suo; Valmontey in valle Cogne : leg. Beyer in h. suo; La Bétaz, alpe Vialle supra Borme, ad montem Becca de l'Auille supra Mondange, inter Eglise et Céré, ab aqua Planaval ad ruinam Montmajeur (omn. in valle Grisanche) : leg. Beyer in h. suo; col de Fenêtre de Tey in valle Rhême : leg. Beyer in h. suo; prope Bardonnêche ad montem Cenis : leg. Lisa in h. suo, leg. Berrino in h. Taurin.; inter Roburent et Pamparato : Burnat in h. Alp. mar.; in valle Corsaglia : leg. Lisa in h. suo; in valle Ellero : leg. Bicknell in h. suo; in valle Pesio et alpis vicinis : h. Thur., leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle del Vej del Bouc : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle della Rovina : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Valdieri : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in alpibus circa Valdieri : leg. Lisa in h. suo; in valle della Meris : leg. Burnat in h. Alp. mar.; circa balneas Valdieri : Burnat in h. Alp. mar.; in valle di Valasco : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle inf. Riofreddo de Vinadio : leg. Burnat

Digitized by Google

in h. Alp. mar.; Argentera in valle Stura: leg. Burnat in h. Alp. mar.; Upega: leg. Burnat in h. Alp. mar.; in montibus Carmo Pinelli et Toraggio: leg. Burnat in h. Alp. mar.; in monte col de Tende : Bourgeau (pl. des Alp. mar.) in h. Alp. mar., h. Deless. gall., leg. Reuter et Boissier in h. Boiss. propr., leg. Beyer in h. suo ; in valle minière de Tende : leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope Limone : leg. Boiss. in h. Boiss. propr., leg. Reuter in h. Barb.; in monte Muntis supra Fontan : leg. Reverchon (Plantes de Fr., 1886, n° 107) in h. Alp. mar., h. Barb.; ad Madonna delle Finestre : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle Mollières : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Hispania.* In glareosis montis sierra de Moncayo prope Hermita N. S. del Moncayo : leg. Willkomm (It. hisp. sec., n° 417) in h. Willk., h. Boiss. propr., h. DC. Prodr.; Guilleras (Gerona) : leg. Vayreda in h. Burn., h. Jäggi; prope Trillo in Castella nova : leg. Rodriguez in h. Willk.; in campis arenosis del Monseny : leg. Costa in h. Willk.; prope San Cristofal : leg. Durieu (Pl. sel. hisp., n° 247) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen. — *Gallia.* Prope S^{t}-Martin Lantosque (Alp. mar) : h. Thuret ; inter Isola et montem col de la Valette : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle Castiglione : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in monte Mounier prope Vignols : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Bouzièyas ad fontes riv. Tinée : leg. Burnat in h. Alp. mar.; las Tourrès prope Entraunes : leg. Burnat in h. Alp. mar.; S^{t}-Martin d'Entraunes et Entraunes : leg. Reverchon in h. Alp. mar., h. Boiss. propr., h. Barb.; circa Esteng ad fontes riv. Var : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Aurent prope Annot : leg. Reverchon in h. Alp. mar., h. Barb.; in valle Thorenc : leg. Burnat in h. Alp. mar.; la Faye de S^{t}-Auban : Burnat in h. Alp. mar.; Fugeret (B. Alp.) : leg. Reverchon et Derbès (Pl. de France, n° 107) in h. Boiss. nov. et Barb.; in cultis prope Vallerauque (Gard) : leg. Tuezkiewicz (Billot, n° 1299ter) in h. Boiss. propr., h. Deless. gall., h. Brux. gen.; in summo monte Ventoux : leg. Requien in h. Berol. gen.; prope Le Larzac (Aveyron) : leg. Coste in h. Gillot; Le Canique in fauce S^{t}-Vincent (Pyr. or.) : leg. Gautier in h. Barb.; in monte M^{t} Louis (Pyr. or.) : leg. Bordère in h. Brux. gen.; Monseng (Pyr. or.) : leg. Tremols in h. Brux. gen.; S^{t}-Flamique dans la Limogne : leg. A. de S^{t}-Hilaire in h. Berol. gen.; sub rupibus Vacinières et ad le Lioran (Cantal) : leg. Marçais (Fl. select., n° 1515) in h. Deless. gen., Jordan de Puyfol

Digitized by Google

(Soc. dauph., 2me série, n° 179) in h. Ayasse : leg. Gillot in h. suo; La Grave (Htes-Alpes) : leg. Mathonnet (Reliq. Maill., n° 1583) in h. Deless. gall., h. Burn., h. Brux. gen.; Lautaret (Htes-Alpes) : leg. Faure in h. Burn.; in alpibus circa Grenoble : leg. Verlot in h. Boiss. propr., h. Tur. gen., h. Barb.; inter Bressans et Bonneval (Maurienne, Sab.) : leg. Arvet-Touvet (Soc. dauph., n° 4806) in h. Barb., h. Ayasse; Lans-le-Villars et Lans-le-Bourg (Maurienne, Sab.) : leg. Reuter in h. Barb., Perrier in h. suo; in monte Cenis in glareosis ad lacum : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; in montibus circa Conflans (Sab.) : leg. Perrier in h. Deless. helv., h. Boiss. propr.; la Longefoi supra Sceez prope la Thiule (Tarentaise, Sab.) : leg. Perrier in h. suo; Tours (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; prope la Bâthie (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in valle Roselent prope Beaufort (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in monte col de la Louze (Tarentaise, Sab.) : leg. Perrier in h. suo; inter Chevreux et Plancherine (Sab.) : leg. Perrier in h. suo; in valle Montjoie (Faucigny, Sab.) : leg. Reuter in h. Barbey; Chamonix in glareosis ad le Chapeau et la mer de glace : leg. Desétangs in h. Barb., leg. Reuter in h. Ayasse; in monte Pic de la Corne (Chablais, Sab.) : leg Briquet in h. suo; infra montem Foilly supra St-Jean d'Aulph. (Chablais, Sab.) : leg. Briquet in h. suo; ad vicum Habère-Lullin (Chablais, Sab.) : leg. Puget in h. Perrier; in monte Saleva ad les XIII Arbres et la Croisette (Sab.) : leg. Puget in h. Perrier, leg. Chavin in h. Perrier, h. Boiss. propr., h. Barb., h. Deless. helv., leg. Lagger in h. Burnat; Mt de Sion (Sab.) : leg. Chavin in h. Barb.; in cultis ad Pontarlier (Doubs) : leg. Grenier (Billot, nos 1299 et 1299bis) in h. Boiss. propr., h. Deless. gall., h. Perrier, h. Brux. gen. — *Belgium.* Louette-St-Pierre (Namur) : leg. Gravet (Pl. Gall. sept. et Belg., n° 217) in h. Burn.; Rochefort : leg. Crépin (Herb. pl. sel. crit. hybr. rhen., n° 513) in h. Berol. eur., Brux. gen., Brux. belg., idem (Herb. pl. rar. crit. Belg., n° 223) in h. Brux. gen.; ad Rixensart : leg. Baguet in h. Brux. belg.; Philippeville : leg. Cogniaux (Kickxia belg., n° 256) in h. Brux. belg. et gen. — *Scandinavia.* In locis rupestribus Upsaliae : leg. Ahlberg (Fries, Herb. norm., XVI, n° 19) in h. Boiss. nov., leg. Fries in h. Berol. gen.; prope Stockholm : leg. Andersson in h. Barb., leg. Fleme in h. Brux. gen.; Ketidslarp (Smol.) : leg. Lindeberg

Digitized by Google

in h. Romieux; in saxis prope Thorsburg (Gottl.) : leg. Zetterstedt in h. Brux. gen.; in valle Goldbrousdahl, Dovrefield (Norv.) : leg. Boiss. et Reut. in h. Barb. — *Anglia*. Near Janion (?) : leg. Maton in h. Brux. gen.

v. **Var. abundantica** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

Plantula 5-15 cm. alta. Radices tenues saepe adhuc in calicibus exsiccatis anni praecedentis insertae. Caulis debilis, gracilis, rubescens, simplex, ± pubescens, internodiis in parte axis inferiore 2-4 cm. longis, subito multo brevioribus in parte superiore. Folia minima, oblonga vel elliptica, apice acutiuscula vel obtusiuscula, basi cuneiformia, ± pilosa, superficie 0,5-1 cm.; serratura constans ex dentibus minusculis, trigonos 0,2-0,5 mm. altos, prorsus versos, extus ± undulatos vel rectos, culminibus rectis vel acutis 1-2,5 mm. distantibus, constituentibus. Calix tubulosus; tubus circa 5 mm. longus; dentes acuminati, arista parva quam in var. praecedente breviore ornati, 1-3 mm. longi. Occurrit grandiflora corolla calicis tubum 1,5 cm. excedente et parviflora tubum saepe minus quam 1 cm. excedente.

Area. — Hucusque tantum in stationibus duobus elatioribus Alpium occidentalium observata. — *Helvetia*. In fissuris arena repletis rupium haud procul a via occidentem versus in summo jugo Simplon (Valais) : leg. Briquet et Chenevard in cujusque herb. — *Gallia*. In schistosis arenosisque in clivo australi montis Pic de la Corne (Chablais, Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo et in h. Chenevard.

Observatio 1. — Varietas *abundantiaca* in formam pumilam varietatis praecedentis abit transitionibus continuis in statione Sabaudiae supra memorata. Caeterum formas intermedias collegimus in *Helvetia* : In conscensu a vico Berisal in vallem editiorem Steinenthal (Valais).

Observatio 2. — Subspecies *intermedia*, praeter varietates omnino intermedias ut var. *carpetana*, cum formis aliis subsp. *angustifoliae* stirpibus transitivis — quarum classificatio valde incommoda et de quibus fertilibus, absentia simul amborum parentium et vegetatione omnino normale, hybriditas invocari non potest — connectitur.

Digitized by Google

Ita vidimus inter var. *arenariam* et *intermediam* specimina transitoria ex *Helvetia :* Pone Ragatz (St-Gallen) : leg. Salis in h. Tur. helv.

Inter var. *orophilam* et *intermediam* ex *Helvetia :* In ruderatis ad la Servette (Genève) : leg. Ayasse in h. suo. — *Gallia.* In faucibus Sigale (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.

Cum prior forma omnibus caracteribus media sit, in posterioribus duobus calix ad var. *orophilam* pertinet, dum folia omnino ad ea var. *intermediae* typicae spectant. Insuper vidimus ex Sibiria Uralense specimen a beato Ehrenberg ann. 1829 lectum, quod caracteres plurium varietatum in se conjungit : serratura enim ut in var. *Berteti,* sed folia basi magis rotundata, calix imo ad var. *orophilam* pertinere videtur sed glandulosus.

Perquisitione accurata, praecipue in regione mediterranea, novas illecebrosas transitivas formas serius detegendas esse persuasum habemus.

Observatio 3. — *G. angustifolia* × *latifolia* de qua cl. Haussknecht (in *Mittheil. des bot. Vereins für Gesamtthüringen,* 1884, p. 8) memorat, est var. *intermediae* forma typica ex specimine authentico ab auctore ipso prope Zeulenrode lecto.

× G. Wirtgeni Ludw. emend.

(= *G. dubia* × *Ladanum*).

= *G. Ladano-ochroleuca* Crépin in *Bull. Acad. des sc. de Belgique,* t. XX, 3e partie, pp. 58-59 (1853); Wirtgen in *Verhandl. des naturhist. Ver. der preuss. Rheinl. und Westph,,* XI, pp. 437-448 (1854) = *G. Wirtgeni* (*ochroleuca* × *angustifolia*) et *G. Haussknechtii* (*ochroleuca* × *intermedia*). Ludwig in *Verhandl. des bot. Vereins für die Prov. Brandenburg,* XIX, p. 117 (1877).

Morphologia. — Planta quoad structuram modo valde variabili inter *G. dubiam* et *G. Ladanum* oscillans. Caules vulgo perramosi, rubescentes vel virides. Folia aliquot differre videntur cum subsp. *angustifolia* vel subsp. *intermedia* connubii particeps sit. Altera vice folia sunt late oblonga vix ab eis *G. dubii* vel *G. Ladani* subsp. *intermediae* diversa; vice altera folia ± longe lanceolata, apice acuta, basi cuneiformia, viridia sunt, eorum serratura valde reducitur et dentibus trigonos vix ultra 0,5 mm. altos formantibus consti-

Digitized by Google

tuitur. Caeterum latitudine foliorum non dijudicari potest utrum subsp. *angustifolia* vel *intermedia* ad parentes pertineant, nam formae formulae *dubia* > × *Ladanum angustifolia* etiam folia valde amplificata habere possunt. De participatione exacta parentium in hybrida studium in loco natali ad plantas vivas tantum gravioris ponderis existimetur. In omnibus folia superiora mollitie *G. dubiam* in mentem uvocant. Bracteae vulgo velutinae vix aristatae. Calices tubulosi, ± molles, saepius valde glandulosi; tubus nervis ± evidentibus ad 5-6 mm. longus; dentes lanceolati, breves, ± aequales, basi lati, ad 2 mm. longi, arista alba ad 1 mm. longa praediti. Corollae luteae, purpureae vel versicolores. Porro dimensiones hic indicatae nullo modo constantes sunt sed approximatiem sistunt a qua specimina in una eademque statione ± recedunt. Pollen rarus et saepius male evolutus. Ovaria vulgo sterilia.

Area. — Ut jam supra diximus (p. 232) hybrida difficilis est distinguere, nec oculus peritus semper in determinatione ad plantas siccas semper sufficiet. Locos sequentes tutos tamen citamus ut attentio in hujus plantae studium ducatur. — *Germania.* Schwarzburgerthal (Thüring.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Greiz (Thür.) : leg. Ludwig in h. Haussknecht; Saffenburg in catena Eiffel : leg. Haussknecht in h. suo; circa Bassum (Westph.) : leg. Beckmann in h. Haussknecht; circa Bestrich et Andermatt (Westph.) : leg. Wirtgen (Herb. plant. crit. rhen., n° 291 et 291*b*) in h. Berol. eur., h. Brux. gen., h. Tur. gen.; circa Coblenz : leg. Wirtgen in h. Brux. gen. — *Belgium.* Prope Rochefort et Ciergnon : leg. Crépin in h. Brux. belg., h. Berol. eur.; ad Evrehailles : leg. A. Levoz in h. Brux. belg.; ad castellum de Namur : h. Brux. belg. — *Gallia.* Prope Châtel in ripis flum. Moselle (Vosges) : leg. Gérard (Fl. select. n° 1266 et 1267) in h. Deless. gen. — *Helvetia.* Rupoldingen auf Stoppelfeld (Soleure) : leg. Jäggi in h. Tur. helv; prope Vaumarcus (Neuchâtel) teste Godet (*Fore du Jura,* p. 551); magna copia inter Lausanne et S^{t}-Sulpice, ut etiam in arvis pagi S^{t}-Sulpice (Vaud) : leg. Favrat et Chenevard in h. Käser, h. Chenevard, h. Briquet, leg. Favrat, Muret et Burnat in h. Burnat.

Digitized by Google

3. G. dubia Leers.

Leers, *Flora Herbornensis*, p. 133 (1775) = *G. cannabina* Pollich, *Flora palatina*, II, p. 149 (1777) non Roth, nec Gmelin = *G. segetum* Reichard, *Flora moeno- Francofurtana*, II, p. 8 (1778) = *G. villosa* Hudson, *Flora anglica* ed. 2, p. 256 (1778); de Clairville, *Manuel d'herb. en Suisse et en Valais*, p. 190 (1811); Smith, *Flora britannica*, II, p, 629 (1800); Crépin, *Manuel de la flore de Belgique*, ed. 3, p. 265 (1874) = *Ladanum luteum* Gilibert, *Flora lithuanica*, II, p. 88 (1781) = *G. ochroleuca* Lamarck, *Encyclopédie*, II, p. 600 (1786); Bentham, *Labiatarum gen. et species*, p. 523 (1832-36) et in DC, *Prodr.*, XII, p. 497 (1848); Koch, *Synopsis*, p. 489 (1857) = *G. prostrata* Villars, *Hist. des plantes du Dauphiné*, II, p. 388 (1787) = *G. grandiflora* Roth, *Tentamen fl. germanicae*, I, p 254 (1788); Willdenow, *Species plantarum*, III, pp. 91-93 (1800) = *Tetrahit longiflorum* Moench., *Methodus plantas horti bot. et agri. Marburg.*, etc., p. 395 (1794) = *G. ochroleuca* cum var. *minor* et *purpurea* Gaudin, *Flora helvetica*, IV, pp. 54-56 (1829) = *G. elegans* Boreau, *Flore du centre de la France*, ed. 3, p. 526 (1857) = *G. Ladanum* var. *villosa* cum subvar. *umbrosa*. Ascherson, *Flora der prov. Brandenburg*, I, p. 526 (1864). = *G. Ladanum* var. *ochroleuca* Kuntze, *Taschenbuch der Flora von Leipzig*, p. 110 (1867) = *Ladanum dubium* p.p. Kuntze, *Rev. gen. plant.*, p. 52 (1891) — *Icones*. Smith et Sowerby, *English Botany* 33, 2353; Nees, *Plantae medicinales*, 172; Nees, *Genera plant. flor. Germaniae*, 6,32; Oeder, *Flora danica*, 10, 1650; Dietrich, *Flora regni boruss.*, 3, 153; Sturm, *Deutschland's Flora*, 14, 62; Reichenbach, *Iconographia botanica*, t. XLVI; Reichenbach f., *Icones fl. germanicae et helveticae*, t. XVIII, 27, I.

Morphologia. — Quoad dimensiones varians. Caulis angulis evidentibus, semper quadrangularis, pilosus, nunquam glaucescens, internodiis superioribus saepe quidem canaliculatis. Folia oblonga vel oblongo-lanceolata, serratura constans ex dentibus crebris ut in *G. Ladanum* subsp. *intermedia* sed dimensionibus variabilibus, praecipue superiora velutino-sericea, crassa. Calix tubulosus, nervis saepius evidentibus, valde velutino-sericeus, dentibus lanceolato-subulatis ± aristatis praeditus. Corolla pulchre ochroleuca, magna, in labiolo macula violacea ornata. — *Histologia*. Parietes externae epidermatis superficie nunquam ceram exsudantes, sed pilis abunde ut etiam glandulis sessilibus stipitatisque pluricellularibus praeditae. — *Biologia*. Ab Julio ad autumnum in segetibus arvisque aridis arenosisque laete vegetat; species semper silicicola. — *Affinitates*. Inter *G. pyrenaïcam* et *G. Ladanum* subsp. *intermediam* circiter medium tenet.

Digitized by Google

Area. — Plantae hujus in Europa media et occidentali endemicae area in Romania oritur (Brandza, *Prodr. fl. Roman.*, p. 395; Kanitz, *Plant. Rom. hucusque cogn.*, p. 96), in Hungaria et Austria or. videtur introducta vel sporadica, denuo in Croatia indicatur (Schlosser et de Farkas, *Fl. croatica*, p. 572) et hinc inde in Venetiam, Carinthiam et Tyroliam extendit; in Italiam non progreditur; in Germania e contrario valde vulgata est sed non ubique : in regionibus rhenanis vulgarior et hinc inde ad Thüringiam, Germ. centralem et Bavariam extendit, qua postrema provincia area germanica cum austriaca conjungitur. In Helvetia (sed non ubique), Gallia, Belgio, Luxemburgia, Hollandia, demum in Scandinavia meridionali, in Anglia et Hispania, ± late dispersa videtur.

1. Subsp. dubia Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

De caracteribus vide sub unica hujus subspeciei varietate; synonymia eadem est ac pro specie collectiva.

α. **Var. dubia** Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

Planta 1-3 dcm. alta. Caulis vulgo robustus, crassus, undique pubescens, viridis vel ± rubescens, internodiis 0,5-5 cm. longis, ± ramosus. Folia lanceolata, ovato-lanceolata, vel ovato-oblonga, petiolo ad 1,5 cm. longo; superiora supra dense pubescentia, subtus velutino-sericea, cinereo-viridia; inferiora magis viridia, saepe rubescentia, apice acuta vel obtusiuscula, marginibus ± convexis, basi ± breviter et cuneiformiter extenuatis, superficie 2,5-4 × 0,7-2 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, 5-8 in folii utroque margine, trigonos extus convexos, intus convexos vel rectiusculos, culminibus rotundatis vel obtusis 1 mm. altis et 2-5 mm. distantibus constituentibus. Verticillastri approximati, internodiis villoso-glandulosis, bracteis verticillastros valde superantibus. Calicis tubus sericeus, pilis adpressis cum pilis patentibus et glandulis stipitatis commixtis, circa 7 mm. longus; dentes lanceolati 3 mm. longi valde glandulosi, arista alba brevi, 0,5 mm. longa, praeditus. Corolla calicis tubum longe (2 cm.) superans; tubus luteus ultra 1 cm. longus valde pubescens, dein subito fauce dilatatus et ibidem venis violaceis ornatus; labrum ad 6 mm. longum luteum, supra villosum rectiusculum; labiolum deflexum ad 1 cm. longum, lobis lateralibus rotundatis,

Digitized by Google

margine nonnunquam leviter crenulatis, lobo medio pleuridiato ad tubi faucem intense luteo et maculis violaceis nonnullis punctatus. In speciminibus micranthis floralium partium dimensiones minuuntur; flores versicolores nonnunquam occurrunt, cum purpurei attente inquaeriri necesse est num hybriditas non causa coloris anormalis sit. (Cf. Godron, *Notice sur les explorations botaniques faites en Lorraine*, p. 79. Mém. de l'Acad. de Stanislas, 1884.)

Area.—Praeter provincias in speciei totius area notatas, ex locis sequentibus specimina autopsia studere potuimus. — *Germania.* In agris circa Borderholm et Neumünster (Holstein) : leg. Engler in h. suo; Braunschweig : h. Tur. helv.; prope Hameln (Hannov.) : h. Berol. eur.; Schwarzburgerthal (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Greiz (Thür.) : leg. Ludwig in h. Haussknecht; Herford (Westph.) : leg. Weihe (Reichb., n° 234) in h. Boiss. propr., h. Brux. gen.; Witten (Westph.) : leg. Schemmann (Baenitz, n° 39) in h. Burnat; prope Rhede (Westph.) : leg. Grave in h. Berol. eur.; Minden (Westph.) : leg. Weihe in h. Brux. gen.; circa Bassum (Westph.) : leg. Beckmann in h. Chenevard; in catena Eiffel : leg. Wirtgen et Dieudonné in h. Brux. gen.; Coblenz : leg. Wirtgen in h. Brux. gen.; circa Andernach et Bestrich : leg. Wirtgen in h. Berol. eur.; prope Bonn : leg. Kegel in h. Berol. eur., leg. Schmidt in h. Tur. gen.; prope Siegburg (Rheinl.) : leg. h. Engler; Goldstein prope Frankfurt a. M. : leg. Vatke in h. Haussknecht; Blankenheim (Rheinl. : leg. Ahrspiessen in h. Romieux; inter Brohl et Laach (Rheinl.) : leg. Romieux in h. suo; circa Trier : leg. Bockholtz in h. Engler; Heidelberg : leg. Thibaut in h. Boiss. propr.; prope Mannheim : leg. Braun in h. Berol. eur.; Carlsruhe : leg. Braun in h. Berol. eur., leg. Decaisne in h. Brux. gen.; Ketsch a. Rh. (Baden) : h. Berol. eur.; in monte Schlossberg prope Freiburg (Baden) : leg. Schill in h. Burn.; Hagenau : leg. Viguet in h. Deless. gen.; circa Bitche : leg. F. Schultz (Billot, n° 916) in h. Boiss. propr., idem (Sch., Herb. norm., n° 889) in h. Burn., h. Berol. eur., h. Deless. gen., h. DC. nov.; Zweibrücken (Als.) : leg. F. Schultz in h. Berol. eur.; prope Saarbrück : leg. Voydt in h. Engler. — *Helvetia.* Prope Chur (Graubünd.) : leg. Muret in h. Tur. helv.; prope Basel : leg. Moench in h. Tur. helv.; Hohwacht prope Wykon (Luzern) : leg. Siegfried in h. Burn., h. Brux. gen., h. Käser;

Digitized by Google

Utzensdorf (Bern) : leg. Schalch in h. Tur. helv.; ad Hoffwyl (Bern) : leg. Schlumberger in h. Burn.; prope Bern : leg. Guthnick in h. Tur. helv.; Rupoldingen auf Stoppelfeld et Bomingen (Soleure) : leg. Jäggi in h. suo; prope Fribourg : leg. Chavin in h. Perrier, h. Deless. helv., leg. Heer in h. Tur. helv.; circa pagos S^{t}-Cierge et Chapelle (Fribourg) : leg. Leresche in h. Boiss. propr.; Granges de Vesin (Fribourg) : leg. Leresche in h. Boiss. propr.; in arvis prope Vauxmarcus (Neuchatel) : leg. Godet in h. Deless. helv., h. Ayasse, leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv.; S^{t}-Aubin (Neuchâtel) : leg. Payot (Reliq. Maill., n° 1582) in h. Burn., h. Deless. gen., h. Brux. gen.; ad vicum Reste confinibus Neuchat. et Galliae : leg. Payot in h. Deless. helv.; circa Payerne (Vaud) : leg. Leresche in h. Barb. : leg. Vetter in h. Tur. helv.; Sattens prope Moudon : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; Ecublens (Vaud) : leg. Vetter in h. Tur. helv.; prope Bottens (Vaud) : leg. Romieux in h. suo; inter Lausanne et S^{t}-Sulpice : leg. Burnat, Muret, Farat in h. Burn.; S^{t}-Sulpice (Vaud) : leg. Kaller f., Favrat, Muret, Chenevard in h. Barb., h. Deless. helv. h. Jäggi, h. Briquet; Pierrettes prope Lausanne : leg. Rostan in h. Perrier; prope Salvan (Valais) : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb., leg. Thomas in h. Tur. helv., leg. Romieux in h. suo; circa Sion (Valais) : leg. Ayasse in h. suo; in segetis ad Abertolty (Valais) : leg. Daenen in h. Deless. gen. — *Hispania*. Leon : leg. Fauché in h. Boiss. propr.; in campis sabulosis prope Viladran montis Monseny : leg. Costa in h. Boiss. propr. — *Gallia*. Côte-S^{t}-André (Isère) : leg. Boullu (Billot, n° 3454, in h. Perrier, h. Brux. gen.; Vallorsine (Sabaud.) : leg. Centurier in h. Boiss. propr.; Puy-du-Dôme : leg. Maire in h. Boiss. propr., Deless. propr., leg. Vigineix in h. Deless. gall.; Lyon à Francheville : leg. Jordan in h. Barb.; Charbonnière prope Lyon : leg. Aunier in h. Deless. gall.; Labruyère (Rhône) : h. Deless. gall.; S^{t}-Emiland (Saône-et-Loire) : leg. Ozanon (Soc. dauph., n° 3007) in h. Boiss. propr., h. Burn.; Mâcon : leg. Parseval in h. Burn.; circa Nancy : leg. Gourdon et Boivin in h. Boiss. propr., leg. Fauché in h. Barb.; circa Belfort : leg. Parisot in h. Tur. helv.; Chanet prope Poncin (Ain) : leg. Vincent in h. Perrier; in segetibus ad Gouhenans (H^{te}-Saône) : leg. Lenoir et Paillot (Billot, n° 609bis) in h. Perrier, h. Deless. gall., h. Brux. gen.; Forêt de Serre (Jura) : leg. Blanche (Fl. Sequ. exsicc., n° 117) in h. Brux.

Digitized by Google

gen.; inter Baufoux et Semblançay (Indre-et-Loire) : leg. Blanchet (Rel. Maill. n° 760) in h. Deless. gall., h. Brux. gen.; prope Poillé (Indre-et-Loire) : leg. Blanchet (Herb. des Fl. loc. de France, n° 107) in h. Barb., h. Perrier, h. Deless. gall., h. Brux. gen., h. Ayasse; in segetis prov. Touraine sine loco natali : leg. Martins in h. Brux. gen.; in arvis prov. Anjou sine loco nat. : h. Deless. gen.; Orléans : leg. De la Roche in h. DC. prodr.; S^{t}-Salure prope Sancerre (Cher) : leg. Déséglise in h. Ayasse; Angers : leg. Boreau (f. purp.) in h. Boiss. propr.; prope Nantes : leg. Bélanger in h. Deless. gall., leg. De la Roche in h. DC. prodr.; in prov. Vendée sine loco nat. : leg. Bélanger in h. Deless. gall.; La Roche (Vendée) : leg. Authemars in h. Ayasse; in prov. Haute-Bretagne : leg. Desvaux in h. Berol. gen.; prope Le Mans (Sarthe) : leg. Desportes in h. DC. prodr.; prope Neris (Allier) : leg. Dollfuss in h. Burn.; ad Lapalisse (Allier) : leg Billiet in h. Burn.; prope Marcoussy (Seine-et-Oise) : leg. Kunth in h. Berol. gen., leg. de Schoenefeld (fl. purp.) in h. Berol. gen., leg. Brice in h. Deless. gall.; in silvis Bellejaune prope Monthéry (Seine-et-Oise) : h. Deless. gall.; prope Senouche (Eure-et-Loire) : leg. Daenen in h. Deless. gall.; Eranges ad locum Sommet de la moulure dictum (Vosges) : leg. Gérard in h. Callier; in ripis fl. Moselle ad Remiremont (Vosges) : leg. Tocquaine (Billot, n° 609) in h. Boiss. propr., h. Deless. gall., leg. Treuvay (Rel. Maill., n° 760) in h. Burn. — *Belgium*. Corbeek-Loo (Brabant) : leg Dieudonné in h. Brux. gen.; prope Verviers : leg. Lejeune in h. DC. prodr.; in prov. Campine : leg. Lejeune in h. Brux. belg.; caeterum crescit cum *G. Wirtgeni* prope Rochefort, etc.; — *Hollandia*. In arenosis Gelriae : leg. Oudemans in h. Brux. gen. — *Luxemburgia*. Circa Diekirch, Stolzenburg, Lespérange : leg. Dumortier in h. Brux. gen. — *Scandinavia*. Rendsborg (Cimbria austr.) : leg. Paulsen (Fries, Herb. norm., fasc. XII, n° 32) in h. Boiss. propr.

Observatio 1. — Specimina locis sequentibus lecta ± ad subsp. *nepetaefoliam* vergunt ideoque quasi transitionem ad eam constituunt foliis reductis, angustioribus, parvis, serratura constans ex dentibus minoribus. — *Germania*. Prope Bremen : leg. Buchenau in h. Berol eur.; prope Carlsruhe (fl. purp.) : leg. Braun in h. Berol. eur. — *Helvetia*. Prope Fribourg : leg. Chavin in h. Deless. helv.; prope Basel : leg. Moench in h. Deless. helv.

Digitized by Google

Observatio 2. — Quid *G. Frehi* Borbas (*Geographia atque enumeratio plant. comit. Castriferrei in Hungaria*, p. 220, 1887) sit, ex descriptione nequaquam detegere potuimus. Vel forma *G. Wirtgeni* vel potius *G. dubiae* forma umbrosa spissave micrantha sistet, certe autem caracteribus datis nullo modo ut species vel subspecies propria vindicari potest.

2. Subsp. nepetaefolia Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 27 (1891).

De caracteribus et area geographica vide sub unica hujus subspeciei varietate.

β. **Var. nepetaefolia** Briquet, *Résumé*, p. 27 (1891) = *G. nepetaefolia* Timbal-Lagrave in *Billotia*, pp. 18-20 (1864).

Caulis parum robustus, valde ramosus, ramis elongatis ± divaricatis, pilosus, vulgo purpurascens, internodiis mediis 4-6 cm. longis. Folia parva lanceolata vel oblonga, apice acuta, marginibus parum convexis, basi cuneiformia, petiolo brevi villoso ad 3 mm. longo praedita, cinereo-viridia, utrinque (praecipue superiora) villoso-sericea, superficie 1-2 × 0,4-0,5 cm.; serratura constans ex dentibus parvis crebris (4-7 in utroque folii margine), trigonos extus convexos, intus rectos, culminibus acutiusculis obtusis vel rotundatis, 0,3-0,7 mm. altis et 1-2 mm. distantibus, constituentibus. Bracteae parum vel non aristatae. Calix tubulosus; tubus villoso-sericeus, nervis vix evidentibus, 4 mm. longus; dentes lanceolato-acuminati 2-3 mm. longi, arista brevi praediti. Corolla extus pilosa tubum calicis 1 cm. excedens.

Area. — Unico loco *Pyrenaeorum gallicorum* reperta est pulchra haec varietas, locis saxosis prope aquas Juzet ad Bagnères-de-Luchon (H^te^-Garonne): leg. Timbal-Lagrave in h. Barb., h. Perrier (Billot, n° 3455), h. Brux. gen. (exsicc. cit.), h. Deless. gen. (Fl. select., n° 118), h. Burn. (exsicc. cit.).

4. G. pyrenaica Bartl.

Bartling, *Index seminum horti acad. Goettingensis*, ann. 1848, p. 4 et in *Ann. des sciences nat.*, 3^e^ série, XI (1849), p. 256; Grenier et Godron, *Flore de France*, II, p. 684 (1852); Willkomm et Lange, *Prodromus florae hispanicae*, II, p. 24 (1870). — *Icones.* Reichenbach f. *Icones florae germanicae et helvet.*, t. XVIII, tab. 29, III.

Morphologia. — Valde varians quoad dimensiones. Caulis angulis evi-

Digitized by Google

dentibus, semper quadrangularis, valde pilosus nunquam glaucescens. Folia oblonga vel ovato-oblonga, apice obtusa, basi rotundata, truncatula vel subcordata, supra cinereo-viridia vel viridia, subtus cinerea pilis mollibus tecta, superiora saltem fere sericea; serratura constans ex crenis vel dentibus ± crenatis. Calix tubulosus molliter sericeus vel villoso-velutinus, nervis sat evidentibus sed pilis plerumque obtectis; dentes lanceolato-subulati, arista alba praediti. Corolla vulgo purpurea, labiolo macula lutea ornato. — *Histologia*. Parietes externae epidermatis ceram nunquam exsudantes, sed epiderma pilis crebris, glandulis sessilibus et stipitatis multicellularibus ornatus. — *Biologia*. Floret ab Julio in autumnum, in montium aridis incultisque a vinetorum regione usque ad Rhododendri sedes.

Area. — In Pyrenaeis centralibus et orientalibus endemica.

1. Subsp. pyrenaïca.

Flores purpurei, de caracteribus caeteris vide sub varietatibus duobus.

α. **Var. genuina** Debeaux, *Recherches sur la flore des Pyrénées*, p. 101 (1878) = var. *mediterranea* Debeaux, *l. c.*

Planta 75-90 cm. alta, cultura saepe multo major. Caulis erectus ± ramosus, undique ± patentim pilosus, internodiis lineis rubris viridibusque saepius percursis 5-9 cm. longis. Folia oblonga vel ovato-oblonga, apice obtusa, marginibus diu parum convexis, parte inferiore subito valde convexis, ideo basi rotundata et saepe subcordata, supra pilis mollibus prorsus versis tecta, subtus cinerea pilis crebrioribus iisdem obtectis; superiora velutina vel sericea, superficie 3-3,5 × 1,9-2,1 cm.; serratura constans ex crenis crebris sat regularibus, trigonos extus et intus convexos, apice obtusos vel rotundatos culminibus 1-1,5 mm. altis et 2-3,5 distantibus, constituentibus. Verticillastri foliis brevioribus, saepius sericei. Calicis tubus undique pilis prorsus versis velutino-sericeus, pilis simplicibus cum glandulis stipitatis commixtis, ad 8 mm. longus (sub anthesi), dentibus longe lanceolato-aristatis, superiore vulgo longiore ad 6-7 mm. longo, arista alba, 1-2 mm. longa. Corolla purpurea tubum 2,5 cm. excedens, tubo rectiusculo; labrum convexiusculum, 5 mm. longum; labiolum lobis lateralibus rotundatis, medio

Digitized by Google

proeminentia obtusiuscula vel rotundata finitus crenulatus, pleuridiis duobus magnis lateralibus auctum; pleuridiae sinubus 0,3 mm. profundis separatae, oblique truncatae, 2,5 mm. latae; labiolum totum superficie circa 4 × 11 mm., pilis distitutus, ± glandulosus.

Area. — *Pyrenaei orientales gall.* In torrentibus exsiccatis ad Pierrefitte prope Banyuls-sur-Mer : leg. Penchinat (Billot, n° 831) in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. Deless. gall.; prope Port-Vendres : leg. Huet du Pavillon (Pl. pyr., 1852) in h. Boiss. propr., h. Barb., h. Deless. gen., h. Tur. gen.; ad Pautillier prope Port-Vendres : leg. Montagne in h. Deless. gen.; ad Cosprons prope Port-Vendres : leg. Debeaux (Schultz Herb. norm., n° 1202) in h. Burn., h. Berol. eur., h. Deless. gen., h. DC. nov.; ad Le Vernet : leg. Godron in h. Boiss. propr., leg. Schimper in h. Brux. gen.; in rupibus Mondony prope Amélie-les-Bains : leg. Debeaux in h. Burn.; prope Fort-les-Bains : leg. Rey in h. DC. Prodr. — *Pyrenaei orientales hispan.* In olivetis et vinetis circa Cadaquez (prov. de Gerona) : leg. Tremols in h. Boiss. nov., h. Burn., h. Brux. gen., h. Jäggi, h. Romieux.

β. **Var. nana** Willkomm et Costa, *Pugillus plant. nov. peninsul. pyren.* (*Linnaea*, XXX, 1859, p. 120.); Willkomm et Lange, *l. c.*; Debeaux, *l. c.*

Planta 10-20 cm. alta. Caulis adpresse pubescens, internodiis circa 3 cm. longis. Folia reducta, superficie 1,5 × 0,8 cm., undique pubescentia, cinereo-viridia, quam in varietate genuina angustiora, superiora velutina. Calix velutino-sericeus, praecipue circa dentes; tubus 5 mm. longus; dentes breviter lanceolati, basi 1 mm. lati, 1,5 mm. longi, arista brevissima praediti. Corolla extus valde villosa calicem 1 cm. superans.

Area. — *Pyrenaei orient. gall.* In summo valle Eynes : leg. Guillon in h. Brux. gen., leg. Endress in h. Berol. gen.; in ripis stagni Lanoux : leg. Galissier in h. Ayasse; Le Vernet : leg. Schimper in h. Brux. gen. — *Pyrenaei centrales hispan.* In saxosis circa Castanesa, Bassive, Port de Pallas, etc. : leg. Costa in h. Boiss. propr., h. Willkomm.

Observatio. — Varietas *nana* in var. *geminam* transit e. g. locis sequentibus. In Pyrenaeis orient. gall. loco non indicato : leg. Griesebach in h. Boiss.

Digitized by Google

propr.; in valle Corouso (vel Carougu?) in Pyr. or.: leg. Boissier et Reuter in h. Boiss. propr.

2. Subsp. brevifolia.

Flores ochroleuci ± flavescentes; de caracteribus caeteris vide sub unica varietate.

γ. Var. **brevifolia** = *G. dubia* var. *brevifolia* Willkomm et Lange, *Prodromus fl. hispanicae*, II, p. 459 (1870).

Planta robusta, valde ramosa. Folia ovata, basi rotundata vel subtruncata, superficie 2 × 1,5 cm., pallide viridia, praecipue subtus valde velutina; serratura constans ex dentibus crebris, circa 6 in folii utroque margine, vulgo extus et intus convexis, culminibus obtusiusculis 1-1,5 mm. altis et 3-4 mm. distantibus, constituentibus. Verticillastri villoso-sericei. Calix velutino-sericeus tubo circa 7 mm. longo, dentibus 3-4 mm. longis arista minuscula praeditis, nervis parum evidentibus. Corolla magna, elegans, calicem ad 2 cm. superans, ochroleuca ± flavescens, fauce rosea, ita saepe ± versicolor. — An forma hybryda e *G. pyrenaïca* et *G. dubia* orta?

Area. — *Hispania.* In campestribus sabulosis montis Signati: leg. Costa in h. Willkomm.

Subgenus II. — *Tetrahit* Reichb.

Reichenbach, *Flora germanica excursoria*, p. 525 (1830); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 170.

Morphologia. — Caules facultate praediti gemmas accessorias 1-3 basipetales seriatas inter folium et ramum axillarem producere; internodia parte superiore nodositatibus motricibus ornata in quibus, exclusis passivisque merithallis sensu stricto, geotropismus et heliotropismus consignanter agunt Labioli carollini apophysae regulariter et magis conicae, prorsus versae. — *Histologia.* Structura generalis nodorum et internodiorum ab ea subgeneris *Ladani* differt praesentia lacunae centralis medullaris (exceptis supremis internod.); fasciculis foliaribus vulgo petiolum totum separatim transeun-

Digitized by Google

tibus; praesentia sat vulgata lacunarum aeriferarum in parenchymate corticali merithallorum superiorum. Histologia nodositatum ab ea internodiorum differt cortice omnino collenchymatico, phlœotermate diu amylifero ad cellularum divisionem diu aptum, evolutione collenchymatica regionis pericyclicae, evolutione tarda debilique textorum mecanicorum in ligno, extensione parenchymatis teneri intervascularis et intraxylaris, reductione numeri vasorum punctorum et incremento trachearum, demum auctu ingente viventis et aqua repletae medullae. Trichoma constans ex pilorum speciebus duabus; in una, pili tectores dicti simplices, uni-pluricellulares, directo in epidermate inserti, parietibus baccis cuticularibus crebris ornatis; in altera, pili (setacei dicti), cellulis magnis fere oculo inermi perspiciendis, parietibus sat crassis, in pulvillo pluricellari qui basem amplectitur siti.

5. **G. pubescens** Bess.

Besser, *Primitiae florae Galiciae*, II, p. 27 (1809) = *G. cannabina* Gmelin, *Flora badensis*, II, p. 623 (1806) non Pollich (1777) nec Roth (1788) = *G. Walterina* Schlechtendal, *Flora berolinensis*, p. 520 (1823) = *G. versicolor* Spenner, *Flora friburgensis*, II, p. 594 (1826) non Curtis (1777-87) = *G. Tetrahit* var. *pubescens* Bentham, *Labiatarum genera et species*, p. 524 (1832-36) et in DC. Prodr., XII, p. 497; Mutel, *Flore française*, III, p. 29 (1836); Visiani, *Flora dalmatica*, II, p. 214 (1847); Kuntze, *Taschenflora von Leipzig*, p. 111 (1867) = *G. Ladanum* var *grandiflora* Rig., *Plant. ital. boreal. exsicc.*, (1878). — *Icones.* Dietrich, *Flora regni borussici*, 3, 212; Sturm, *Deutschland's Flora*, 14, 62; Reichenbach, *Iconographia botanica*, tab. XLVIII; Reichenbach f. *Icones fl. germ. et helvet.*, t. XVIII, tab. 29, II.

Morphologia. — Planta elegans, habitu gracili. Folia vulgo tenuia; supra glandulis parvis sparsa et pubescentia sparsa et brevi praedita, subtus pilositate longiore tenuiter molli (praecipue in superioribus), apice acuminata, basi saepius rotundata, nonnunquam etiam extenuata, ovato-lanceolata; serratura constans ex dentibus crebris regularibus, parallelogrammata vel trigonos 1-1,5 mm. longos, extus gibbos, culminibus ± obtusis, 3-5 mm. distantibus, constituentibus. Calix molliter pubescens, funiculis parum evidentibus, tubo superficie circa 5 × 2,5 mm. sectione longitudinali, dentes saepius parum robusti, lineari-lanceolati, basi angusti, arista alba 1,5-2 mm. longa praedita. Corolla mediocris, in formis typicis purpurea, annulo luteo in

Digitized by Google

fauce, caeterum quoad colorem aliquot varians, dentes calicinos semper longe superans. — *Histologia.* Nodositates motrices vulgo minus evolutae quam in caeteris speciebus, semper pilis tectoribus et setaceis mollibus et adpressis crebris ornatae. — *Biologia.* Planta tenera, locis silvestribus umbrosis vegetans, ab Julii initio in antumnum florens; folia formarum valde scotophilarum membranacea valde tenuia.

Area.—Rossia media et meridionalis (Ledebour, *Flora rossica,* III, p. 422; Nyman, *Conspectus Fl. europ.,* p. 576), Rossia volhynica, Serbia (Pančič, *Verzeichniss der in Serbien wildwachs. Phaner.,* p. 542), Macedonia, Bosnia et Montenegro (Nyman, *l. c.*), Dalmatia (Visiani, *Flora dalmatica,* II, p. 214), Croatia (Schlosser et de Farkas, *Flora croatica,* p. 574), Austro-Hungaria, Germania septentrionalis, media et meridionalis usque ad Carlsruhe, caeterum ex Germaniae provinciis occidentalibus plantam, quamvis ibidem indicatam, haud vidimus, sed hinc inde in Scandinaviam merid. extendens et in Belgio prope Gand lecta ubi forsan introducta; ab Austria in Italiam borealem late dispersa, etiam in Helvetiae pagis Ticin. et Bund. abunde crescens, loco unico cis Alpes nota prope Thun; ab Alpibus Pedemontii, meridiem versus, usque ad Alpes maritimas vegetans, sed limites gallicos haud transiliens; in Gallia ipsa locis rarissimis alpinis Sabaudiae reperitur, sed alibi ut cl. Lloyd et Boreau (*Fl. du Centre,* ed. 3, p. 227) falso indicaverunt non crescit.

α. **Var. genuina** Metsch; Briquet, *Labiées des Alpes maritimes,* p. 171 = *G. pubescens* cum. var. *glandulosa* Reichenbach, *Iconographia botanica,* I, p. 41 (1823) = *G. pubescens* cum. var *minor, mollis* et *glandulosa* Gaudin, *Flora helvetica,* IV, p. 57 (1829) = *G. pubescens* cum. var. *genuina* et *mollis* Metsch in *Botan. Zeitung,* X (1852), p. 282 = *G. pubescens* cum. var. *setosa* Schur, *Enumeratio plant. Transsilv.,* p. 537 (1866) = *G. pubescens* cum. var. *setosa* Borbas, *Geograph. atque Enumer. plant. comit. Castriferrei in Hungaria,* p. 220 (1887) = *G. pubescens* var. *tristis* Briquet, ined. in herbariis variis.

Folia lata, ample ovata, basi rotundata, saepe cordiformia vel truncata, vel brevissime attenuata.

Area. — *Rossia.* In umbrosis humidis Volhyniae : leg. Besser in h. Brux. gen., h. DC. Prodr.; prope Luckno (Pol.) : leg. Kretschmann in h. Tur.

Digitized by Google

gen. — *Austro-Hungaria.* Prope Langenthal (Transsilv.) : leg. Barth in h. Romieux ; Karlsbad (Bohem.) : leg. Ascherson in h. Berol. eur., leg. De Cloët in h. Brux. gen. ; Münchengrätz (Bohem.) : leg. Sckern in h. Tur. gen. ; Jaromis (Bohem.) : leg. Knaf in h. Deless. gen. ; prope Reichraming (Oberöst.) : leg. Steininger in h. Tur. gen. ; circa Labacum (Tyr.) : leg. Graff in h. Boiss. propr., h. DC. Prodr. ; in Primiero (Tyr. or.) : leg. Facchini in h. Barb. ; prope Salzburg : h. Deless. gen. ; Linz (Tyr. or.) : leg. Gander in h. Burn., h. Berol. eur., leg. Ausserdorfer in h. Brux. gen. ; in valle Lugana prope Levico (Tyr. mer.) : leg. Vatke in h. Haussknecht ; inter Bozen et Meran (Tyr. mer.) : leg. Haussknecht in h. suo ; alla Ferrara ai piedi del monte Baldo : leg. v. Martens in h. Berol. eur. - *Germania.* Ad Posen : leg. Rithern in h. Berol. eur. ; Schutthausen (Siles.) : leg. Funk (Günther, Exsicc. siles.) in h. Berol. gen. ; Polnischdorf prope Wohlen (Siles.) : leg. Beyer in h. suo ; Ozarnowanz prope Oppeln (Siles.) : leg. Buffa in h. Brux. gen. ; Gleiwitz (Siles.) : leg. Raballe in h. Brux. gen. ; Görbersdorf (Siles.) : leg. Firle in h. Engler ; Liegnitz (Siles.) : leg. Figert, leg. Callier in h. Callier ; Nimkau prope Breslau : leg. Engler in h. suo ; Eichenburg prope Königsberg : leg. Baenitz in h. Chenevard, h. Burn. ; ad Königsberg : leg. Körnicke in h. Berol. eur. ; Eberswalde (Brandenb.) : leg. Heyland in h. Briq. ; Bürwalde (Brandenb.) : leg. Schäde in h. Perrier ; Neustadteberswalde (Brandenb.) : leg. Heyland in h. Romieux ; Cunersdorf (Brandenb.) : leg. Walter in h. Brux. gen. ; in ripis Viadri : leg. Walter in h. Berol. gen. ; in ambulacris subdialibus Berolinensibus « Thiergarten » dictis, ubi ipse saepe vidimus : leg. Regel in h. Tur. gen., leg. Körnicke (Billot, n^{os} 610 et 610bis) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. Perrier, h. Brux. gen., leg. Kunth in h. Berol. gen. ; Marienwerder : h. Berol. eur. ; in vicis montanis circa Dresden : leg. Reichenbach (Reichb., n° 235) in h. Boiss. propr., h. Berol. gen., h. Brux. gen. ; Siebenlehe (Saxon.) : leg. Dietrich in h. Berol. eur. ; prope Erlangen (Bavar.) : leg. Koch in h. Berol. eur., leg. Bischof in h. Brux. gen. ; Reichswald prope Nurnberg : leg. Barbey in h. suo ; prope Regensburg : leg. A. Braun in h. Berol. eur. ; Grünewald prope München : leg. Brügger in h. Tur. helv., h. Tur. gen., h. Käser ; Duckelsscherben (Bavar.) : leg. Clessin in h. Brux. gen. ; prope Roeckingen (Francon. med.) :

Digitized by Google

leg. Hauser in h. Deless. gen.; prope Ulm (Württ.) : leg. Barbey; prope Carlsruhe : leg. Braun (Billot, n° 712) in h. Boiss. propr., h. Berol. cur., h. DC. Prodr., h. Tur. gen., leg. Schultz et Leimbach (Sch., Herb. norm. n° 728) in h. Deless. gen. — *Helvetia.* Ad Vicosoprano in valle Bergell (Graübünden) : leg. v. Strampf in h. Berol. cur.; Bergell inter Porta et Stampa (Graübünden) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; Val Misocco ad Soazza (Tessin) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; in valle Maggia (Tessin) : leg. Muret in h. Tur. helv., h. Boiss. propr.; in valle Marobbio (Tessin) : leg. Schröter in h. Tur. helv.; in monte Camoghe (Tessin) : leg. Heer in h. DC. Prodr.; in monte Cenere (Tessin) : leg. Leresche in h. Barb., leg. Muret in h. Deless. helv., h. Burn., leg. Schulthess, Heer et Brügger in h. Tur. helv.; ad Locarno (Tessin) : leg. Ducommun (Fl. insubr.) in h. Deless. gen., h. Brux. gen., h. DC. nov.; infra Rioggio (Tessin) : leg. Favrat in h. Chenevard; prope Lugano (Tessin) : leg. Heer in h. Tur. helv., leg. Fauconnet in h. Deless. helv., leg. Reynier in h. DC. prodr. — *Italia.* In Monte Campo provinciae Veronae : leg. Rigo (Pl. ex Ital. bor.) in h. Burn., h. Hausskn.; Treviso in silvulis : leg. Martins in h. Brux. gen.; ad Tiolo prope Sondalo (Valtellina) : leg. Brügger in h. Tur. helv.; Chiavenna, haud procul a lacu Comense : leg. Leresche in h. Barb.; in valle Sasina prope Bellano (Alp. Bergamasc.) : leg. Thomas in h. Boiss. propr., leg. Leresche in h. Barb.; in monte col di Marbegno (Alp. Bergam.) leg. Muret in h. Barb.; ad Misma et Carenno prope Bergamo : leg. Sieber-Gysi in h. Tur. helv.; imo monte Grigna (Alp. Bergam.) : leg. Schröter in h. Tur. helv.; in ambulacro di Monza prope Milano : leg. Leresche in h. Boiss. propr., h. Barb.; Borgo San Domino in prov. Parma : leg. Link in h. Berol. cur.; in Fiorentino : leg. Riccazoli in h. Boiss. propr.; Musura in valle d'Ossola : leg. Leresche in h. Barb.; in valle Praetoria : h. Berol. cur.: in alpibus Aquanis : leg. Bertoloni in h. Berol. cur.; ad Albo : leg. Colla in h. Brux. gen.; Rudevola ad pagos (Alp. Vald.) : leg. Rostan in h. DC. Prodr.; supra Paesanam in castanetis vallis Padi (Alp. Vald.) : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. Brux. gen.; prope Frabosa haud procula Mondovi (Alp. Mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; inter San Bartolommeo et la Chiusa in valle Pesio (Alp. mar.) : Burnat in h. Alp. mar.; ad Vernante (Alp. mar.) : leg. Burnat in h.

Digitized by Google

Alp. mar.; Limone, ad vias (Alp. mar.) : leg. Ferrari in h. Taurin. — *Gallia.* Uriages prope Grenoble : leg. Verlot in h. Tur. helv.; La Croix Rouge prope Chambéry : leg. Songeon in h. Barb., h. Deless. helv., h. Perrier, h. Briquet; in umbrosis infra l'Hospice du Betton (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo. — *Belgium.* Prope Gand : leg. Schedtweyler in h. Brux. belg.

β. **Var. Carthusianorum** Briquet, *Labiées des Alpes maritimes,* p. 171 (1891).

Folia angustiora, magis lanceolata, apice longe acuminata, basi cuneiformia et in petiolum extenuata; serratura cum magnitudine folii aliq. varians.

Area. — *Austro-Hungaria.* Ad Tarkány (Hung.) : leg. Lang in h. Berol. eur.; ad montem Altvater (Carpath. morav.) : leg. Hegelmaier et Schweinfurth in h. Berol. eur.; prope Opocno (Bohem.) : leg. Freyn in h. Burn., h. Jäggi; in Bohemia septentrionali : leg. Karl in h. Berol. eur.; ad vias prope Brünn (f. magna) : leg. Niessel in h. Berol. eur.; Salzburg : leg. A. Braun in h. Berol. eur. — *Germania.* Ad Gnadenfeld (Siles.) : leg. Werak (f. magna) in h. Barb.; Bischnitz prope Breslau : leg. Engler in h. suo; ad Kösen (Thüring.) : leg. Haussknecht in h. suo; in arenosis prope Backlet et Kissingen : leg. Haussknecht; Ingolstadt (Bavar.) : leg. Lechler in h. Barb.; Landeshut (Bavar.) : leg. Schultes in h. Brux. gen.; Grünwald prope München : leg. Molendo in h. Brux. gen.; ad Duckelsscherben (Bavar.) : leg. Clessin in h. Brux. gen., h. Jäggi; ad Carlsruhe : leg. Leimbach et Schultz (Herb. norm., n° 728) in h. DC. nov. — *Helvetia.* In monte Cenere : leg. Muret in h. Barb. — *Italia.* In silvulis prope Treviso : leg. Martins in h. Brux. gen.; lungo il Sangone prope Stuppi nigi (prov. di Torino) : leg. Ferrari in h. Taurin. (f. magna); in castanetis prope Paesanam (Alp. vald.) : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; prope Valdieri (Alp. mar.) : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; in valle Ellero supra Roccaforte-Mondovi (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Belgium.* Prope Gand : leg. Schedtweyler in h. Brux. belg.; prope Lideberg (?) : leg : C. F. in h. Brux. belg. — *Scandinavia.* Underzee (Norv.) : leg Blytt. in h. Barb.

Observatio 1. — Varietas *Carthusianorum* nunc sola nunc cum var. *genuina* commixta reperitur. Inter ambas transitus continue labientes saepe occurrunt, ut sequitur. — *Austria.* Prope Salzburg : leg. A. Braun in h.

Digitized by Google

Berol. eur. — *Germania.* Breslau in pago Nimkau : leg. Uechtritz in h. Boiss. propr.; Obernik (Siles.) : leg. Uechtritz in h. Brux. gen.; prope Carlsruhe : leg. Leimbach et Schultz (Herb. norm., n° 728) in h. DC. nov. — *Helvetia.* In dumetis prope stationem viae ferrugineae Brienzwyler (Unterhaslithal, Bern!!) : leg. Chenevard in h. suo. — *Italia.* In silvaticis prope Treviso : leg. Martins (f. nana) in h. Berol. eur.; Chiavenna in via versus Prosto : leg. Brügger in h. Tur. helv.; in Lombardia, loco non indicato : leg. Reynier in h. Deless. gen.; a San Bartolomeo ad Certo (Alp. mar.) : leg. Ferrari in h. Taur. — *Gallia.* St-Saturnin prope Chambéry : leg. Perrier in h. suo.

Observatio 2. — Praeter structuram membranaceam foliorum in speciminibus scotophilis, modificatio altera apud *G. pubescentem* adest quae phytographos plures jam fefellit, qui ex ea varietatem propriam constituerunt (var.*mollis* Reichb., Metsch, var. *setosa* Schur., var. *setulosa* Borbas). In hac modificatione, saltem locis aridis vel solis ardore tostis idonaea, nodositates motrices silva densa patente pilorum, typo pulvinato vero pertinentium sed mollium vel setulosorum, teguntur; inter pilos illos apparent ± crebri, alii pulvillis destituti et retrorsum versi. Curiosum est hanc modificationem, praeter culturas ubi in umbra omnino evanescit, etiam loco natali in eodem individuo ita inconstantem esse, ut in axibus nonnullis valde perpicua sit dum in caeteris omnino desit.

× G. acuminata Reichb.

(= *G. pubescens* × *Tetrahit* Hellwig).

Reichenbach, *Flora germanica excursoria*, p. 523 (1830); Reichenbach f., *Icones florae german. et helvet.*, t. XVIII, p. 18, tab. 30, III (1858); Fick, *Flora von Schlesien*, p. 355 (1881) = *G. Tetrahit* var. *acuminata* Mutel, *Flore française*, III, p. 29 (1830) = *G. stricta* John in *Botan. Zeitung*, I (1843), pp. 691-692 = *G. Tetrahit* × *pubescens* Hellwig in *Rabenhorst's Botan. Centralblatt*, I (1846), pp. 141-145 = *G. intermedia* Heidenreich in *Ber. üb. die Versamml. des preuss. bot. Ver. in Tilsit* (ann. 1865), pp. 55-56, non Villars (1779) = ? *G. Poolii* Brügger, *Beobacht. üb. wildwachs. Bastarde der Schweizer- und Nachbar-Floren*, p. 102 (*Jahresber. der naturf. Gesellsch. Graubünden's*, 1881).

Morphologia. — Difficultates pro *G. Wirtgeni* memoratae in *G. acuminata* distinguenda multo graviores sunt. Si consideras parentes ambos,

Digitized by Google

quamvis bene distinctos, tamen habitu modo et caracteribus levioris ponderis differe, cito dubitationem intelliges, quae in hujus hybridae studio ad specimina exsiccata animum fere semper invadit. Ad plantas vivas imo, inter parentes sitas, saepius judicium certum deponi poterit. In *G. acuminata* folia sunt ovato-lanceolata nunquam ample ovata ut in *G. pubescente* var. *genuina* sed magis formam var. *Carthusianorum* petentia; caulis et praesertim nodositates motrices saepius setoso-hispidae more formae apricae *G. pubescentis;* verticillastri ± hispidi decrescentes saepe omnes distincti; corolla calice sesquilonga eam *G. Tetrahit* var. *bifidae* referrens, at saepe aliq. versicolor; habitus totus combinationem ejus *G. pubescentis* et *G. Tetrahit* praesertim ejus var. *bifidae* sistit.

Area. — Quamvis *G. acuminata* certe vulgata sit ubi parentes in consortio crescunt, attamen ob difficultates supra expositas habitationes perpaucas tutiores citabimus. — *Germania.* In agris prope Blankenburg : leg. Garcke in h. Berol. eur.; in horto suo ad Breslau et prope Obernik (Siles) : leg. v. Uechtritz in h. Callier, h. Engler; ad Wilmersdorf prope Berlin : leg. John in h. Haussknecht. — *Helvetia.* Prope Vicosoprano in valle Bergell (Graubünd.) : leg. v. Strampf in h. Berol. eur.

8. G. speciosa Mill.

Miller, *Gardener's dictionnary,* art. *Galeopsis* (1768) = *G. Tetrahit* β. Linné, *Species plantarum,* ed. 1, p 580; *G. Tetrahit* β *cannabina* L., *Mantissa plantarum altera,* p. 411 (1771), sensu lato. — De synonymia vide sub var. *speciosa.*

Morphologia.— Planta vulgo robusta, ramis gracilibus nodositatibus motricibus parvis, ut species praecedens, non ornata. Folia utrinque ± pubescentia, lanceolata vel ovato-lanceolata, apice ± longe acuminata; serratura constans ex dentibus crebris, trigonos extus rectos vel gibbos, culminibus acutis altitudine variabilibus. Calix non molliter pubescens, nervis generatim non valde evidentibus; dentes ad 7 mm. longi, generatim basi latiores quam in *G. pubescente,* arista 1,5-2 mm. longa praediti. Corolla maxima, sulfureo-flava, lobo medio labioli macula violacea ornato, partibus aliis rarius violaceis. — *Histologia.* Indumentum nodositatum motricium constans ex pilis setaceis vulgo robustis nunquam mollitiem indumenti *G. pubescentis* referrens. — *Biologia.* In subspeciebus duobus aliq. diversa. — *Affinitates.* Organis vegetativis

Digitized by Google

magis ad *G. Tetrahit* accedens, floribus potius ad *G. pubescentem*, sed ab ambabus abunde distincta.

Area. — Sibiria occidentalis, Rossia, Caucasus (C. Koch in Ledebour, *Flora rossica*, II, p. 422), Armenia (C. Koch, *Catalogus plantarum quas in itinere per Caucasum*, etc., in *Linnaea*, XVII, p. 298), Rumelia, Bulgaria (Nyman, *Conspectus suppl. secundum*, p. 251; Pančič, *Elementa princip. Bulgariae*, p. 56), Romania (Brandza, *Prodr. flor. Roman.*, p. 39), Serbia (Pančič, *Verzeichn. der in Serbien wildwachs. Phanerog.*, p. 542), Montenegro, Croatia (Schlosser et de Farkas, *Flora croatica*, p. 573), Austro-Hungaria, Helvetia orientalis, Italia borealis, perrara et sporadice in Gallia, Belgium, Hollandia, Britannia, Germania tota, Dania, Scandinavia.

1. Subsp. sulfurea Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 172 (1891).

De caracteribus et synonymis vide sub varietate *sulfurea*.

α. **Var. sulfurea** Reichenbach f., *Icones florae germanicae et helveticae*, t. XVIII, p. 18 (1858); Rouy, *Suites à la flore de France*, I, p. 156 (1887) = *G. sulfurea* Jordan, *Catalogue de Dijon* (1848), p. 19; Idem, *Einige neue Pflanzen Frankreich's* (*Flora*, XXII, 1849, p. 452); Idem, *Plantae novae* (*Linnaea*, XXIII, 1850, p. 472); Grenier et Godron, *Flore de France*, t. II, p. 686 (1852); Ardoino, *Flore des Alpes maritimes*, p. 299 (1867) = *G. Tetrahit* C. Allioni, *Flora pedemontana*, n° 107 (1785) = *G. cannabina*, Balbis, *Miscell. botan.*, I, p. 29 et All. herb.! non Willd. = *G. versicolor* de Notaris, *Repertorium fl. Ligust.*, p. 325 et herb. (sub *G. cannabina*). — *Icones.* Reichenbach f., *l. c.*, tab. 30, IV.

Folia saepius ampla basi ± rotundata, subcordata vel truncata, vel breviter attenuata, glabrescentia vel ± pubescentia. Caulis minus hispidus quam in subsp. *speciosa*, saepe fere glaber; internodia vulgo parte inferiore exsudatione cerosa ± abundante obtecta, qua aliq. glaucescentia fiunt. Verticillastri inferiores saepe aliq. distantes. Corolla pallide sulfurea, labiolo violaceis maculis punctulatus in formis typicis, caeterum colore facile in variis stationibus varians. Planta in mensibus Julio et Augusto locis silvestribus, in nemorobus casis et saltibus montium, raro in agris.

Area. — *Bulgaria* (Nyman, *Conspectus supplementum secundum*, p. 251). — *Austro-Hungaria.* Mehadia (Banat.) in umbrosis : leg. Boissier in h. Boiss. propr., h. Barb.; prope Mühlenwald (Bohem.) : leg. Opiz in h. Deless. gen.; in Austria loco non indicato : h. Deless. gen. (h. Ventenat). — *Germa-*

Digitized by Google

nia. Ad Schöneberg prope Berlin : leg. Körnicke (2 Aug. 1851) in h. Berol. eur.; ad pagum Nimkau prope Breslau : leg. v. Uechtritz in h. Brux. gen. — *Italia valdensis.* In silvis umbrosis prope Ceresole : leg. Lisa in h. suo. — *Alpes maritimae italicae.* In monte Galero : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in monte Armetta versus Ormeam : leg. Burnat in h. Alp. mar.; inter Viozene et Ponte di Nava : leg. Burnat in h. Alp. mar., leg. Leresche, Burnat in h. Boiss. propr.; circa Rezzo : leg. Gennari in h. univ. Gen.; circa Dolcedo : leg. Berti in h. univ. Gen.; colla Rinella ad sept. a Cosio d'Arroscia : leg. Burnat in Alp. mar.; inter montem Prearbam et Pornassio : leg. Burnat in h. Alp. mar.; Poniarocca in monte Fronte : leg. Burnat in h. Alp. mar.; circa Upega : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in monte Tanarello : leg. Bicknell in h. suo; in valle Frabosa : leg. Lisa in h. suo; inter Roccaforte et Rastello : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle Pesio : h. Thuret, leg. Burnat in h. Alp. mar., h. Burn., h. Barb., h. Jäggi, h. Ayasse; circa Valdieri : leg. Reuter in h. Barb.; ad S^{t}-Dalmas de Tende : h. Nic., leg. Leresche in h. Alp. mar., leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb.; in valle de la minière de Tende : leg. Lisa in h. suo, leg. Reuter in h. Boiss. propr., leg. Beyer in h. suo, leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope Vinadio in valle Riofreddo : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Alpes maritimae gallicae.* In alpibus Fontan : leg. Lisa in h. suo; in monte Anan (err. Nanan) prope Fontan : leg. Reverchon (Pl. de France, 1886, n° 231) in h. Alp. mar., h. Barb.; in monte Belvedere : h. Nic. — *Gallia.* In agris aux Charpennes dictis prope Lyon : leg. Jordan in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. DC. nov., h. Brux. gen., h. Briquet, leg. Martin (Pl. des env. de Lyon, 1851) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., leg. Chabert in h. Ayasse.

Observatio 1. — Indicatio nostra (*Labiées des Alpes maritimes*, p. 177) hujus varietatis in Delphinatu provenit ex speciminibus incompletis circa la G^{de}-Chartreuse repertis de quibus sub varietate speciosa agitur.

Observatio 2. — Inter formas ad var. *speciosam* vergentes citemus. — *Helvetia.* Circa Tarasp (specimen omnino intermedium) in h. Brux. gen. — *Gallia.* Prope S^{t}-Dalmas de Tende (Alp. mar.), h. Nic.; ex cultis cl. Grenier (Billot, n° 1302) in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. Deless. gall.;

Digitized by Google

praeterea in alpibus maritimis non omnes stationes praebent specimina omnino typica.

β. **Var. hispidior** Frivaldsky, incd. in h. Boiss ; Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 29 (1891).

Planta elata. Caulis robustus, ramosus, hispidissimus, internodiis mediis circa 4 cm. longis. Folia ovato-lanceolata, apice acuminata, basi rotundata, petiolo in foliis infer. ad 3,5 cm. longo, superficie 6 × 2,7 cm., hispidissima, ad nervos subtus pilis setaceis horridula; serratura constans ex dentibus crebris, trigonos intus rectos, extus undulatos, culminibus 1-1,5 mm. altos et 3-5 mm. distantibus, constituentibus. Verticillastri conferti valde hispidi. Corollae color ex spec. sicco haud discernendus.

Area. — In agris Rumeliae : leg. Frivaldsky in h. Boiss. propr.

2. Subsp. speciosa Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 173 (1891).

De caracteribus et synonymia vide, sub varietate speciosa.

γ. **Var. speciosa** = *G. speciosa* Mill., *l. c.* (1768), *G. Tetrahit* L. β et *G. Tetrahit* var. *cannabina* L. (1771), locis citatis sensu stricto = *G. versicolor* Curtis, *Flora londinensis*, fasc. II, tab 38 (1777-1787) non Spenner (1826); Smith, *Flora britannica*, II, p. 630 (1800) = *Tetrahit grandiflorum* Gilibert, *Flora lithuanica*, II, p. 83 (1781) = *G. cannabina* Roth, *Tentamen flor. germ.*, I, p. 254 (1788), non Pollich (1777,) nec Gmelin (1806), nec Ballbis (1804-1806); Willdenow, *Species plant.*, III, p. 93 (1800) = *G. Tetrahit* var. *grandiflora* Bentham, *Labiatarum gen. et spec.*, I, p. 524 (1832-36) et in DC. *Prodr.*, XII, p. 497 (1848) ; Mutel, *Flore française*, III, p 29 (1836) = *G. versicolor*. cum var. *subalpina* Schur, *Enumeratio plantarum Transsilv.*, p. 537 (1866) = *G. Tetrahit* var. *versicolor* Kuntze, *Taschenflora von Leipzig*, p. 110 (1887) = ? *G speciosa* var. *leiotricha* Borbas, *Békésmegye Floraja*, p. 8 (1881) = *G. flavescens* Borbas, *Geogr. atque enum. plant. comit. Castriferrei in Hungaria*, p. 221 (1887) = ? *G. leiotricha* Borbas, in *Oesterr. bot. Zeitschr.*, 1889, p. 54 = *G. speciosa* cum var. *nana* Beyer, *Beiträge zur Flora der Thäler Grisanche und Rhêmes*, p. 26 (1891). — *Icones.* Palmstruch, etc., *Svensk Botanik*, 446; Curtis, *l. c.*; Smith et Sowerby, *English Botany*, 10, 667; Baxter, *Brit. phaenog. Botan.*, I, 75; Sturm, *Deutschland's Flora*, 14, 62; Dietrich, *Flora regni boruss.*, 2, 75; Reichenbach, *Iconographia botanica*, I, tab. LVII; Reichenbach fil., *Icones fl. germ. et helvet.*, t. XVIII, tab. 30, III et fig. 1-3; Thomé, *Flora von Deutschland*, 522.

Caulis hispidus, rarissime glaber, parte inferiore mediorum merithallorum vulgo exsudationibus cerosis destitutus, ideo non glaucescens. Folia magis

Digitized by Google

lanceolata, apice longe acuminata, basi cuneiformia et in petiolum extenuata. Verticillastri omnes in summis axibus ± conglomeratis. Corolla pallide flavescens, labiolo pulchre violaceo, caeterum ut in subsp. *sulfurea* varians. Planta in sepibus, secus vias et in camporum locis agrestibus praecipue crescens.

Area. — Praeter districtus et regiones sub specie collectiva memorata, e locis sequentibus varietatem hanc studere in herbariis potuimus. — *Sibiria.* In Sibiria occidentali : leg. Ehrenberg in h. Berol. gen. — *Rossia.* Ssergiewskaja prope Moscou : leg. Barbey in h. Barb.; prope Lachte haud procul a St-Petersbourg : leg. Körnicke in h. Berol. eur.; prope Dorpat : leg. Ledebour in h. Berol. gen.; Montenegro : in rupe Konska : Szyszylowicz in h. Engler. — *Austro-Hungaria.* Ad Fültak (Transs.) : leg. Stoitzer in h. Berol. gen.; in insula danubiali Csepel (Hung.) : leg. Tauscher in h. Burn.; Sziget-Ujfalü prope Pest : leg. Tauscher in h. Brux. gen.; in declivibus montis Hochschar (Morav.) : leg. Engler in h. suo; ad Presburg : leg. Schneller in h. Brux. gen.; ad Hütteldorf prope Wien : leg. Huguenin in h. Tur. gen.; ad Reichenberg (Bohem.) : leg. Siegmund in h. Burn.; Splugelmugl (? Niederoesterr.) : leg. Luthner in h. Deless. gen.; ad Gabhorn et Wilneren (Niederoesterr.) : leg. de Cloet in h. Brux. gen.; Fassa in Tyr. or. : leg. Facchini in h. Boiss. propr., h. Barb., h. Perrier; imo monte Rynken (Styr.) : leg. Reuter in h. Barb.; prope Admant (Styr.) : leg. Steininger (f. reducta) in h. Käser. h. Chenevard; prope Reichenau et Seckau (Styr.) : leg. Leresche in h. Burn.; prope Salzburg : leg. Schimper et v. Strampf in h. Berol. eur.; in Tyrol. austr. loco non indicato : leg. Ambrosi in h. Barb.; in cultis circa Kitzbübel (Tyrol) : leg. Traunsteiner in h. Berol. gen.; in monte Ritten prope Bozen (Tyrol. austr.) : leg. Haussmann in h. Berol. gen; ad Patznau prope Landeck (Tyr.) : leg. Brügger in h. Tur. helv. — *Germania.* Prope Striegau (Siles.) : leg. Zimmermann in h. Engler; ad Oberglogau (Siles.) : leg. Rimber in h. Burn.; ad Neisse (Siles.) : leg. Winkler in h. Brux. gen.; prope Landeck (Siles.) : leg. Callier in h. suo; prope Trebnitz et ad Kansdorf prope Breslau : leg. Engler in h. suo; Jacobsdorf prope Schweidnitz : leg. Callier in h. Briquet, leg. Felsmann in

Digitized by Google

h. Chenevard; Berlin ad viam Kurfürstendamm dictam (olim! 1848) : leg. Delosea in h. Burn., h. Tur. gen.; Schöneberg prope Berlin : leg. Körnicke (Billot, n° 832) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. Perrier; ad Lychen (Uckermark) : leg. Heyland in h. Briquet; Steinbeck prope Hamburg : leg. Sonder (Billot, n° 499) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. DC. Prodr.; in arenosis prope Lübeck : leg. Haussknecht in h. suo; ad Braunschweig : h. Tur. helv.; prope Hannover : h. Brux. gen.; prope Dresden : leg. Reichenbach (Reichb., n° 450) in h. Boiss. propr., h. Berol. gen., h. Brux. gen.; in Thüringia sine loco natali : leg. Wallroth in h. DC. prodr.; Höllenthal prope Lichtenberg (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; Pfalzdorf et Louisendorf prope Cleve (Rheinl.) : leg. Herrenkohl (Herb. pl. crit. rhen., fasc. XI, n° 622) in h. Berol. eur., h. Brux. gen., leg. idem in exsicc. iisd. sub n° 81 in h. Berol. eur.; Goarshausen usque ad Lurlei (Rheinl.) : leg. Molendo in h. Brux. gen.; prope Herford (Westph.) : leg. Weihe in h. Brux. gen.; circa Zweibrücken : leg. Fauché (? f. reducta) in h. Boiss. propr.; circa Derning (Bad.) : leg. Brügger in h. Tur. gen.; circa Schomdorf ad flum. Rems (Württ.) : h. Tur. gen.; in silvis prope Ober- Güschach (Württ.) : leg. Kemmler in h. Berol. eur.; ad Schussenried (Württ.) : leg. v. Martens in h. Berol. eur.; in agris prope Schlehdorf (Bavar.) : leg. Martins in h. Brux. gen.; Taegernsee prope München : leg. C. H. Schulz in h. Berol. gen., Molendo in h. Brux. gen., Braun in h. Berol. eur., Godet in h. Jäggi; prope Glensburg (?) : leg. Froelich in h. Berol. eur.; prope Hevingedirt (?) : leg. Hanstein in h. Berol. eur. — *Helvetia*. Sorenthal prope Hauptwyl (St-Gallen) : leg. Gatzwiller in h. Tur. helv.; Conters im Oberhalbstein (Graübünd.) : leg. Salis in h. Tur. helv.; in via versus Urschein (Graubünd.) : leg. Heer in h. Tur. helv.; inter Fettau et Ardetz (Unterengad., Graub.) : leg. Käser in h. suo; inter Sus et Schnols (Graubünd.) : leg. Leresche in h. Boiss. propr.; prope Guarda (Graubünd.) : leg. Thomas in h. Boiss. propr., h. Barb., h. Deless. helv.; circa Tarasp vulgatissima : leg. Muret in h. Boiss. propr., h. Burn., leg. Leresche in h. Barb., leg. Morthier in h. Romieux, leg. Killias in h. Brux. gen., h. Jäggi; prope Krüttli (Graubünd.) : leg. Muret in h. Tur. helv. — *Italia*. In subalpinis Pedemontii loco non indicato : leg. Morn in h. Barb.; prope Firenze : leg. Turgioni-Tozetti in h. Deless. gen.;

Digitized by Google

in via a vico Eglise versus La Betuz (val Grisanche, f. reducta) : leg. Beyer in h. suo. — *Gallia.* Ad introitum in desertum de la G^de^-Chartreuse aliq. infra Fourvoirie (Delph.) : leg. Chaboisseau (Soc. dauph., n° 927) in h. Burn. eur., leg. Chabert et Huguenin in h. Perrier; in silvis infra S^t^-Laurent du Pont ad la G^de^-Chartreuse (Delph.) : leg. Glastien in h. Burn., h. Jäggi; prope Morlaix (Finistère) : leg. Gay (ann. 1847) in h. Berol. eur.; circa Plouigneau (Finistère) : leg. Miciol (Soc. dauph., n° 3008) in h. Boiss. nov., h. Barb., h. Burn., leg. idem (Fl. select., n° 117) in h. Deless. gen., h. Burn., h. Ayasse, leg. Ledansec in h. Burn.; circa Brest (Lloyd, *Flore de l'ouest de la France,* p. 354). — *Belgium.* In segetibus prope Kessel-Loo : leg. Baguet in h. Brux. belg. et gen., leg. Baguet in h. Brux. gen. — *Luxemburgia.* Circa Cokelscheuer : leg. Tinant in h. Brux. gen. — *Hollandia.* Prope Nykerk : leg. Stolz (Herb. pl. crit. rhen., fasc. III, n° 81) in h. Berol. eur.; ad Amersfoort : leg. Bondam (Herb. pl. crit. rhen., n° 622^bis^) in h. Brux. gen., Doom en Neerlangbroek : leg. Oudemans in h. Brux. gen. — *Scandinavia.* Ad Diosgiör (Suec.) : leg. Lang in h. Deless. gen.; prope Carlskoga (Succ. mer.) : leg. Reuterman in h. Burn., h. Jäggi, h. Chenevard; Widsköfle (Suec.) : leg. Brown in h. Burn., h. Ayasse; Upsaliae : leg. Anderson in h. Berol. gen.; ad Jonkofrang (Samaland) : leg. Zetterstedt in h. Brux. gen.; prope Zuichjock (Lapponia) : leg. Andersson in h. DC. nov. — *Britannia.* Prope Harderwich : h. Brux. gen.; Rumcliff prope Scarborough : leg. Bean in h. Brux. gen.; circa Newcastle : leg. Winck in h. DC. prodr.; Balton-Bridge (York) : leg. Stevens in h. Tur. gen.; prope Thirsk (York) : leg. Foggett in h. Brux. gen.; circa Glasgow : leg. Gourlie in h. Burn.; Killin prope Perth : leg. Linton in h. Romieux.

8. Subsp. pallens Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis,* p. 30 (1891).

De caracteribus et synonymia vide sub unica varietate.

δ. **Var. pallens** Briquet, *Résumé,* p. 30 (1891) = *G. Tetrahit* var. *pallens* Fries, *Flora hallandica,* p. 100 (1818) = *G. Tetrahit* subsp. *bifida* var. *pallens* Fries, *Novitiarum fl. suec. mantissa altera,* p. 39 (1839).

Planta vix 2 dcm. alta, caule ramoso vulgo hispido. Folia lanceolata apice acuta vel breviter acuminata, basi cuneiformia in petiolum 0,5-1 cm. longum

Digitized by Google

extenuata, utrinque pubescentia, superficie circa 4 × 2 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, trigonos intus rectiusculos, extus gibbos, culminibus 1-1,5 mm. altis et 3-5 mm. distantibus, constituentibus. Verticillastri hispidi. Corolla parva calicis dentes vix 5 mm. excedens, labioli lobo medio angusto evidenter emarginato pleuridiis duobus lateralibus acuto-rotundatis et marginibus subtus recurvulis; color corollae ex sicco haud describenda sec. cl. Fries versicolor.

Area. — *Scandinavia.* Prope Upsaliam : leg. E. Fries (Herb. norm., fasc. VII, n° 8) in h. Boiss. propr.; circa Sodertelje-Rynildsberg (Sodermanland) : leg. Clever in h. Brux. gen.

Observatio 1. — Vide in capite praecedente quod de hac varietate nobis adhuc dubia scripsimus (p. 235).

Observatio 2. — Crebras formas transitivas de quibus Bentham et alii loquuntur nusquam vidimus et formae hybridae inter *G. speciosam* et alias subgen. *Tetrahit* species perrarae videntur. In botanophilorum mentem autem revocemus cl. Brügger talem hybridam, i. e. *G. speciosa* × *Tetrahit,* in Austriae prov. Vorarlberg (*Beobacht. üb. wildwachs. Bastarde der Schweizer- und Nachbarfloren,* p. 102, 1881) indicavisse et fore ut alibi verisimillime inveniatur.

7. G. Tetrahit Linn.

Linné, *Species plantarum,* ed. 1, p. 579 (1753); ed. 2, p. 810 (1763) = *Lamium Tetrahit* Crantz, *Stirpes austriacae,* p. 261 (1769) = *Tetrahit purpurascens* Gilibert, *Flora lithuanica,* II, p. 83 (1781) = *Tetrahit nodosum* Moench, *Methodus plantas horti et agri Marburg.,* etc., p. 393 (1794) = *G. tetrachista* Wimmer et Grabowski, *Flora Silesiae,* pars 2, II, p. 193 (1828) = *G. Tetrahit* var. *parviflora* et *major* Visiani, *Flora dalmatica,* II, p. 214 (1847) = *G. Tetrahit* var. *parviflora* Bentham, *Labiatarum gen. et spec.,* p. 524 (1832-36) et in DC., *Prodr.,* XII, p. 498 (1848) = *G. Tetrahit* var. *grandiflora, agrestis, parviflora* et *aspera* Kuntze, *Taschenflora von Leipzig,* p. 111 (1867) = *G. nodosa* St-Lager, *Catalogue de la flore du bassin du Rhône* (*Ann. Soc. bot. de Lyon,* III, n° 2, p. 626, 1881) = *Ladanum Tetrahit* Kuntze, *Revisio generum plant.,* p. 521 (1891).

Morphologia. — Planta semper ramis tenuibus et gracilibus *G. pubescentis* destituta. Folia lanceolata, ovato-lanceolata vel ovata, apice acuta vel acuminata, utrinque ± pubescentia, dentibus vel crenis frequentibus praedita.

Digitized by Google

Calix glabrescens vel hispidus, sed nunquam molliter pubescens, nervis vulgo evidentibus; dentes longitudine variantes, sed saepius longiores quam in specie praecedente. Corolla mediocris vel parva, dentes calicinales non valde excedens, purpurea et macula labiolari lutea, vel alba macula labiolari atrofusca. — *Histologia.* Nodositates motrices robustae, pilis setaceis dense obtectae. — *Biologia.* Floret a Julio usque ad Decembrum secus vias et locis agrestibus camporum montiumque. — *Affinitates.* Valde affinis *G. speciosae* et *pubescenti,* sed indumento et corolla sat distincta.

Area. — Hymalaia, Sibiria tota, Caucasus (C. A. Meyer, *Verzeichn. der Pflanzen Caucas.*, etc. p. 92), Asia minor sept., Europa usque ad Irlandiam et insulas Faroënses (Trevelyan, *Veget. Faroë.*, p. 8); in Americam introducta.

1. **Subsp. genuina** = *G. Tetrahit* var. *genuina* Mutel, *Fl. franç.*, III, p. 29 (1836) = *G. Tetrahit* subsp. *primaria* Fries, *Nov. Fl. suec. mant. altera*, p. 39 (1839) excl. var. β et γ. = *G. Tetrahit* subsp. *Tetrahit* Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 174 (1891).

Labioli lobus medius fere tam longus quam latus, apice quadratus vel rotundatus, planus, irregularis, crenulatus vel pleuridiis duobus ± distinctis praeditus.

α. **Var. arvensis** Schlechtendal, *Flora berolinensis*, p. 320 (1823); Lejeune et Courtois, *Compendium Florae belgicae*, II, p. 241 (1831); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 175 (1891) = *G. leucantha, Gacogaei*, et *alpicola* Jordan in *Bull. Soc. bot. de France*, t. III, p. 606 (1860) = *G. Tetrahit* var. *acuta* Briquet ined. in herb. nonnullis.

Folia sat lata, basi breviter attenuata vel rotundata, apice acuta nec longe acuminata, superficie 8-8,5 × 4-4,5 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, regularibus, mediocribus, trigonos, extus rectos vel ± gibbos, culminibus obtusiusculis 2 mm. altis et circa 7 mm. distantibus, constituentibus. Calix tubo aliq. hispido, dentibus tubo aeque longis, ad 9 mm. longis, arista alba rigida 1,5 mm. longa praedita. Labioli corollini lobus medius quadratus.

Area. — *Macedonia.* Supra Brusnik prope Bitolia : leg. Orphanides in h. Boiss. propr. — *Austro-Hungaria.* Prope Carlsbad : leg. de Cloët in h. Brux. gen. — *Germania.* In regione berolinensi : leg. Schlechtendal in h. Berol. gen.; prope Charlottenburg : h. Berol. eur.; circa München : leg. de Cloët in h. Brux. gen.; prope Carlsruhe : leg. Braun in h. Berol. eur.; prope

Digitized by Google

Saarbrück : leg. Voydt in h. Engler. — *Helvetia.* Prope Pontresina (Graubünden) : leg. v. Strampf in h. Berol. eur.; ad vicum Matt (Glarus) : leg. Heer in h. Tur. helv.; prope Zürich : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; prope Morges (Vaud) : leg. Ayasse in h. suo; prope Genolliers (Vaud) : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; in sepibus vici Chavanne-des-Bois (Vaud) : leg. Briquet in h. suo; ad vicum Meyrin (Genève) : leg. Déséglise in h. Brux. gen.; in sepibus ad Pregny (Genève) : leg. Reuter in h. Boiss. propr. — *Italia.* Prope Cuneo in via versus Mondovi (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope Upega (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; prope balneas Valdieri in valle Valasco (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; — *Gallia.* In arvis ad la minière de Ciriegia in valle Borion (Alp. mar.) : h. Thuret; la Maïris prope Nice : h. Nic.; prope Beaufort (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; S^{t}-Maurice prope S^{t}-Maurice d'Alvey (Sabaud.) : leg. Bertet in h. Perrier; circa Grignon (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; prope Pringy (Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier; ad vicum Habère (Chablais, Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier; P^{te}-d'Alaï prope Lyon : leg. Boullu (Billot, n° 3456) in h. Perrier, h. Deless. gall., h. Brux. gen.; circa Marmagne (Cher) : leg. Déséglise in h. Ayasse; ad Ivré-l'Évêque (Sarthe) : leg. Boreau in h. Perrier; prope Bar-sur-Aube (Aube) : leg. Désétangs in h. Barb.; ad vicum Bairon (? Vosges) : leg. Callay in h. Brux. gen.

Observatio. — Formis crebris sensim in varietatem *silvestrem* Schlecht. transit, ut sequitur. *Germania.* Prope Goettingen : leg. Regel in h. Tur. gen.; Coblenz ad ripas Mosellae : leg. Wirtgen in h. Berol. eur.; prope Zweibrücken (Alsat.) : leg. Fauché in h. Boiss. propr. — *Helvetia.* Bündner Oberland (Graubünd.) : leg. Heer in h. Tur. helv.; ad vicum Matt (Glarus) : leg. Heer in h. Tur. helv.; circa Chavannes-des-Bois (Vaud) : leg. Briquet in h. suo. — *Italia.* In monte Ceneri prope Bironico : leg. Beyer in h. suo; boschi di stupinigi prope Torino : leg. Berrino in h. Taur.; in colle S. Vito prope Torino : leg. Ferrari in h. Taur.; prope San Bartolommeo di Pesio (Alp. mar.) : leg. Bicknell in h. Alp. mar. — *Gallia.* Prope Nice : leg. Maunoir in h. DC. prodr.; circa Chambéry : leg. Paris (Billot, n° 3757) in h. Perrier; inter vicos Queiges et les Roingers (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa S^{t}-Sigismond (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; ad montem

Digitized by Google

Margériaz (Sabaud.) : leg. Songeon in h. Perrier; ad Laval-d'Isère prope Conflans : leg. Perrier in h. suo; circa Dreux (Eure-et-Loire) : leg. Daenen in h. Deless. gall.; in silvis ad Viroflay prope Paris : leg. Chaubard in h. Deless. gall.; circa Vagney (Vosges) : leg. Perrin (Billot, n° 3757bis) in h. Perrier; Arrentières prope Bar-sur-Aube (Aube) : leg. Désétangs in h. Barb. — *Belgium.* Circa Verviers : leg. Lejeune in h. DC. prodr. — *America.* Granberry Summit (W. Va, U. S.) : leg. Meets in h. Barb.; Boston (U. S.) : leg. M^{rs} Dutton in h. DC. prodr.; in America boreali loco non indicato : leg. Hooker in h. Deless. gen.

3. **Var. silvestris** Schlechtendal, *Flora berolinensis*, p. 320 (1823); Lejeune et Courtois, *Compendium florae belgicae*, II, p. 241 (1831); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 175 (1891) = *G. urticifolia* Ortmann in *Weitenweber's Beiträge zur gesammten Natur- und Heilwissenschaft*, III, p. 217 (1838) et in *Linnaea*, XIII, *Litteraturber.*, p. 17; Wolfner in *Flora*, XXXIX, p. 546 (1856) = *G. Tetrahit* var. *vulgaris* Grenier, *Flore de la chaine jurass.*, p. 627 (1865).

Caracteres generales ut in var. α, sed folia angustiora magis lanceolata, apice longe acuminata, basi cuneiformia et in petiolum extenuata, superficie 7-8,5 × 3-3,8 cm. in speciminibus bene evolutis; serratura saepe magis aperta.

Area. — *Sibiria.* In montibus Altaïcis : leg. Ledebour in h. Brux. gen. — *Caucasus.* In Caucaso loco non indicato : leg. K. Koch in h. Berol. gen. — *Rossia.* In ruderatis prope S^t-Petersburg : leg. Regel in h. Boiss. nov. — *Austro-Hungaria.* Prope Pressburg : leg. Schneller in h. Brux. gen.; circa Prag : leg. Mann in h. Berol. eur.; ad Kitzbübel (Tyrol.) : leg. Traunsteiner in h Berol. gen., h. Brux. gen. — *Germania.* Ad Obernigk prope Breslau : leg. Uechtritz in h. Engler; ad Görbersdorf (Siles.) : leg. Firle in h. Engler; circa Berlin : leg. Regel in h. Tur. gen.; circa Waldau (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; prope Münden : leg. Zabel in h. Brux. gen.; in catena Eifel (Westph.) : leg. Dieudonné in h. Brux. gen.; ad vicum Schlehdorf (Bavar.) : leg. Martins in h. Brux. gen.; circa Stuttgart : leg. v. Martens in h. Berol. eur.; prope Carlsruhe : leg. Braun in h. Berol. eur.; prope Heidelberg : ipse vidimus. — *Helvetia.* Weisstannenthal (S^t-Gallen) : leg. Salis in h. Tur. helv.; prope Vuss-Hof (Graubünd.) : leg. Salis in h.

Digitized by Google

Tur. helv.; prope Zürich : leg. Schulthess in h. Tur. helv.; Eschenberg prope Winterthur : leg. Siegfried in h. Käser; inter Waedenschwyl et Hütten (Zürich) : leg. Burnat in h. suo; prope Aarau : leg. Jäggi in h. suo; in territ. Fribourg loco non indicato : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; prope Münster (Valais) : leg. Daenen in h. Deless. gen.; prope balneas Louesche (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; ad vicum Bouveret (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; in valle des Ormonds (Vaud) : leg. Fauconnet in h. Deless. helv.; circa Valeyres (Vaud) : leg. Boissier et Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb..; circa Neuchâtel : leg. Godet in h. Deless. helv., leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv.; prope Au Plan (Neuchât.) : leg. Jeanjaquet in h. Tur. helv.; ad Pregny (Genève) : leg. Reuter in h. Barb.; prope Vernier (Genève) : leg. Briquet in h. suo; Grand-Sacconex (Genève) : leg. Déséglise in h. Brux. gen., La Paumière, Troinex, inter Choulex et Sionnet (Genève) : leg. Romieux in h. suo; prope Bellerive (Genève) : leg. Chenevard in h. suo. — *Italia.* Ponte di Nava (Alp. mar.) : leg. Bicknell in h. suo; in vallis Pesio parte superiore : h. Thuret; S. Luigi de Pornassio prope Pieve di Teco : leg. Gennari in h. univ. gen. — *Gallia.* Prope S^t^-Martin d'Entraunes (Alp. mar.) : leg. Reverchon in h. Alp. mar.; ad fontes riv. Tinée prope Bouzièyas (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; in valle Soleilhas prope S^t^-Auban (Alp. mar.) : leg. Goaty in h. Thuret; prope Nîmes : leg. Lorniser in h. Deless. gen.; ad Gavarnie (H^te^-Garonne) : leg. Bordère in h. Deless. gen.; Les Préaux prope S^t^-Firmin-en-Valgaudemar (H^tes^-Alpes) : leg. Darnaud (Soc dauph., n° 5663) in h. Boiss. nov.; prope Grenoble : leg. Verlot in h. Barb.; circa les Alle us (Tarentaise, Sabaud.) : leg. Perrier in h. Deless. helv., h. suo; ad Biorges prope La Bathie (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo, h. Deless. helv.; ad le Châtelard prope Porrette (Sabaud.) : leg. Perrier in h. Deless. helv., h. suo; circa Conflans (Sabaud.) : leg. Perrier in h. Deless. helv.; ad S^t^-Sigismond (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa Beaufort (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa Belleville et Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; inter Queige et Roingers (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa Grignon (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa Venthon et Gilly (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; prope Monnetier (Sabaud.) : leg. Ayasse in h. suo; in monte Saleva supra Mornex (Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo; in ripis loci

Digitized by Google

Lemani prope Thonon (Sabaud.) : leg. Déséglise in h. Brux. gen.; prope Mijoux (Ain) : leg. Déséglise in h. Brux. gen.; ad Grilly prope Gex et in consensu montis Faucille (Ain) : leg. Briquet in h. suo; Aprey in via versus Villiers (H^te^-Marne) : leg. Désétangs in h. Barb.; circa Bar-sur-Aube (Doubs) : leg. Désétangs in h. Barb.; in silva Rhin-du-Bois (Cher) : leg. Déséglise in h. Ayasse; circa La Motte prope Bourges (Cher) : leg. Ayasse in h. suo; in silvis Oisène (Eure-et-Loire) : leg. Vigineix in h. Deless. gall.; in silvis de Butard : leg. Brice in h. Deless. gall.; prope S^t^-Germain : leg. Kunth in h. Berol. gen.; circa Montmorency : h. DC. Prodr.; in silvis circa Compiègne : leg. Boivin in h. Deless. gen., leg. Graves in h. Deless. gall.; circa Nantes : leg. Lloyd in h. Brux. gen.; prope le Faubourg S^t^-Gilles ad Abbeville : leg. Bruttelette in h. Burn.; in silvis Mazarin : leg. Callay in h. Brux. gen. — *Belgium*. Circa Gand et circa Melle : leg. Scheldweyler in h. Brux. belg.; in Flandria, loco non indicato : leg. Dumortier in h. Brux. belg. — *Luxemburgia*. Circa Luxemburg, Diekirch, Longsdorf, etc. : leg. Dumortier in h. Brux. gen. — *Hollandia*. Ad Doom prope Amsterdam : leg. Oudemans in h. Brux. gen.; circa Borkoop : leg. Broers in h. Brux. gen. — *Anglia*. Circa Ecclesfield : leg. Fauconnet in h. Deless. gen.; prope Claygate (Surrey) : leg. Syme in h. Brux. gen. — *Scandinavia*. Prope Bahusiam (Suec.) : leg. Andersson in h. Boiss. propr.; circa Upsaliam : leg. Andersson in h. Berol. gen. et eur.; circa Stockholm : leg. Nyman in h. Deless. gen.; prope Zuichjock (Lappon) : leg. Andersson in h. DC. nov. — *America*. Hastings (Canada) : leg. Macoun in h. Barb., h. DC. nov.; in Canada, loco non indicato : leg. lady of Dalhousie in h. Deless. gen.; in Newfoundland, loco non indicato : leg. de la Pylaie in h. DC. Prodr.; in monte Oquago (U. S.) : leg. Rafinesque in h. Deless. gen.; in prov. Arkansas, loco non indicato : leg. Rafinesque in h. Deless. gen.; circa Springfield (Mss.) : leg. Thurle in h. Berol. eur.; in insulis Schrals (New Hampsh., U. S.) : leg. Gongdon in h. Tur. gen.; in America boreali, loco non indicato : leg. Hooker in h. Berol. gen.

Observatio 1. — Quod in opere nostro (*Labiées des Alpes maritimes*, p. 176) de *G. neglecta* Schultes diximus nunc, studio hujus speciei criticae denuo suscepto, emendandum est. Specimina in horto Bruxelles asservata non ad var. *silvestrem* pertinent, sed analysi corollae in pluribus floribus perfecta

Digitized by Google

potius ad var. *bifidam*. Ideo si verum esset *G. neglectam* in h. Bruxelles a cl. Schultes determinatam esse, prioritatis causa var. *silvestris* in var. *neglectam* anabaptizanda esset. Schedulae autém manu cl. de Cloët scriptae sunt, itaque non decidi potest quo usque nomina pro authenticis haberi possunt, et nomen *G. neglecta* negligendum erit.

Observatio 2. — Non varietatem *arvensem* cl. John olim cum *G. bifida* v. Boenn. comparavit, ut lapsu calami diximus (*l. c.*), sed var. *silvestrem;* error levioris ponderis jam ex ipso texto patet.

Observatio 3. — Descriptiones dubia nulla permittunt quin *G. urticaefolia* Ortm. huc pertineat.

γ. Var. idiotropa Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 176 (1891).

Folia oblongo-ovata, apice acuta, basi cuneiformia in petiolum extenuata. A varietatibus praecedentibus differt serratura foliorum; serratura enim constat ex crenis elongatis et depressis, arcus vel trigonos irregulares, extus gibbos, formantibus, cujus culmina obtusissima vel orbicularia, 0,5-0,8 mm. alta et 5-9 mm. distantia.

Area. — In locis lapidosis montis Salevae supra Monnetier (Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo.

Observatio. — Forma serratura in eam var. *silvestris* omnino abeunte circa Vevey (Vaud, Helvet.) : leg. Burnat in h. suo.

δ. Var. lazistanica Briquet, *Résumé d'une monographie du genre Galeopsis*, p. 30 (1891).

Planta circa 50 cm. alta. Caulis robustus, erectus, ± ramosus, hirtus, internodiis mediis 7-12 cm. longis. Folia late lanceolata, apice acuminata, marginibus infra medium convexioribus, basi cuneiformibus in petiolum verticillastris breviorem attenuatis viridia, supra et subtus pilosa, superficie in fol. evolut. 9-10 × 4-5 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, valde robustis, trigonos extus convexiusculos intus rectos, culminibus 2-3 mm. altis et 5-9 mm. distantibus, constituentibus. Verticillastri hirti omnes petiolos superantes vel aequantes. Calix hirtus, dentibus acerosis 7 mm. longis. Corolla normalis, labioli lobo medio quadratulo leviter bipleuridiato.

Digitized by Google

Area. — *Lazistania.* Circa Djimil, alt. 2032 m. : leg. Balansa (Plantes d'Orient n° 1520) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen. — Specim. in h. Delessert asservatum jam valde ad var. *silvestrem* vergit.

ε. **Var. praecox** Rapin, *Guide du botaniste dans le canton de Vaud*, ed. 2, p. 465 (1862); Grenier, *Fl. de la chaine jurassique*, p. 628 (1865); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 176. = *G. praecox* Jordan in *Bill. Annot. à la Fl. de France et d'Allemagne* (1855), p. 21.

Planta statura reducta, in glareosis et arenosis montium, saepe usque ad altitudinem magnam vegetans, foliis parvis, latis, ovato-lanceolatis, apice acutis vel acuminatis, basi ± breviter in petiolum extenuatis vel rotundatis, superficie (cum statura reducta) circa 5-5,5 × 2,2-3 cm.; serratura constans ex dentibus crebris trigonos circa 1-1,3 mm. altos, extus gibbos, culminibus acutiusculis 2-4 mm. distantibus, constituentibus. Dentes calicini aeque longi vel saepe breviores ac tubus, parum robusti. Labioli corollini lobus medius rotundatus, ± crenulatus. Nuculae majores quam in varietatibus praecedentibus.

Area. — *Austro-Hungaria.* In descensu ab alpe Agnerola versus Primiero (Tyr. mer.) : leg. Burnat et Leresche in h. Burn.; in agris montis Ritten : leg. v. Haussmann in h. Brux. gen.; Gonnensan (Tyr.) : leg. Haussknecht in h. suo. — *Germania.* In agris montis Hohneck (Vosges) : leg. Billot in h. Brux. eur. — *Helvetia.* Circa Süss (Unterengad., Graubünd.) : leg. Lehmann in h. Tur. helv.; in rupibus ad hospitium Simplon (Valais) : leg. Chenevard in h. suo; circa Allmagell in valle Saas (Valais) : leg. Romieux in h. suo; prope Oberwald (Valais) : leg. Mortier in h. Burn., h. Jäggi; supra Haudeyres in valle Hérens et in valle Evolena : leg. Chenevard in h. suo; in valle Illiers (Valais) : leg. Beyer in h. suo; circa les Mayens de Sion (Valais) : leg. Christ in h. Tur. helv. — *Italia.* In monte Gd St-Bernard supra St-Remy : leg. Reuter in h. Barb.; in alpibus Pramol (Alp. vald.) : leg. Rostan (Exsicc. ped., n° 45) in h. Boiss. propr., h. DC. nov.; circa Val St-Martin (Alp. vald.) : leg. Rostan (F. Schultz Herb. norm., n° 1204 in h. Deless. gen., h. Burn., h. Berol. eur., h. DC. nov.; in montibus supra Gennam : h. de Notaris; in valle de la Minière de Tende (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.

Digitized by Google

— *Gallia.* Circa Eaux-Bonnes (Pyren.) : leg. général de Feistmantel in h. Deless. gen.; circa Bagnères-de-Luchon (Pyren.) : leg. Dieudonné in h. Brux. gen.; in monte Mirantin ad l'Haut-de-Pré (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; ad lacum Girottaz (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in silva Belleville prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in summo monte Forchiat supra Habère-Poche (Chablais, Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier; ad radices montis Roc d'Enfer (Chablais, Sabaud) : leg. Puget in h. Brux. gen.; in summo monte Voirons (Sabaud.) : leg. Chenevard in h. suo; in agris circa Monnetier (Sabaud.) : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; in monte Saleva ad les Pitons (Sabaud.) : leg. Rapin in h. DC. nov.; in schistosis calcareis montis Pic de la Corne (Chablais, Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo. — *Scandinavia.* Circa Jonkoping (Smaland) : leg. Zetterstedt in h. Brux. gen.

Observatio. — Transit in varietatem *silvestrem* in Gallia. In monte La Faucille (Ain) : leg. Durand in h. Brux. gen.

ζ. Var. Verloti Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 177 (1891) = *G. Verloti* Jordan in Billot, *Fl. Gall. et Germ. exsicc.*, n° 1946 (1856) et *Bull. Soc. bot. de France*, t. VII, p. 606 (1860).

A varietate praecedente differt foliis angustioribus, apice longius et magis acuminatis, basi regulariter cuneiformibus, lanceolatis, superficie 4,5-2 cm.; serratura constans ex dentibus crebris, regularibus, trigonos extus rectos vel convexiusculos, culminibus acutis prorsus versis 1-1,5 mm. altis et 4-5 mm. distantibus, constituentibus.

Area. — *Asia centralis.* Sikkim, in montibus hymalaiensibus, alt. 10-12000 ped. : leg. Hooker in h. Berol. gen. — *Armenia.* In Armenia loco non indicato : leg. C. Koch in h. Berol. cur. — *Austro-Hungaria.* In agris montis Ritten (Tyr.) : leg. Haussmann in h. Berol. gen. — *Helvetia.* Circa Les Plans (Vaud) : leg. R. Masson in h. Jäggi; circa Ormonds-dessus (Vaud) : leg. A. DC. in h. Deless. helv.; inter Martigny et jugum col de Balme (Valais) : leg. Beyer in h. suo; ad jugum Tête Noire (Valais) : leg. A. DC. in h. Deless. helv.; ad Vandœuvre (Genève, statio omnino anomala) : leg. Ayasse in h. suo. — *Gallia.* Ad Prémol (Isère) : leg. Verlot (Soc. dauph., n° 206bis) in h. Arvet-Touvet; supra rupes de l'Arc prope Grenoble : leg.

Digitized by Google

Verlot in h. Barb.; ad St-Nizier prope Grenoble : leg. Verlot (Billot, n° 1946) in h. Deless. gall., h. Perrier, h. Brux. gen., h. Boiss. propr., idem leg. (Soc. dauph., n° 206) in h. Arvet-Touvet; ad Les Granges prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. Barb.; in monte Mirantin ad l'Haut-de-Pré (Sabaud.) : leg. Perrier in h. Barb., h. suo; circa Biorges prope La Bâthie, leg. Perrier in h. Delessert helv.; inter pontem Pélissier et moles glaciales Bosson (Sabaud.) : leg. A. DC. in h. Deless. helv.; in valle Abundantiaca (Chablais, Sabaud.) : leg. Mélingue in h. Barb.; in monte Forchiat supra Habère-Poche (Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier; in monte Saleva (Sabaud.) : leg. Chavin in h. Perrier; in arvis vallis Monnetier : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb.; in agris jugi la Faucille (Ain) : leg. Romieux in h. suo. — *Italia.* In monte S. Bernard supra St-Remy : leg. Boissier in h. Boiss. propr. — *Hispania.* Puerto de Laitariegos (Asturies) : leg. Bourgeau (Pl. d'Espagne, 1864) in h. Deless. gen.

Observatio 1. — Cum varietate *praecoce* formis transitoriis continuis jungitur, ut sequitur. — *Gallia.* Prope lacum Girottaz (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in summo monte Forchiat supra Habère-Poche (Chablais, Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier; in arvis imi montis Voirons (Sabaud.) : leg. Reuter in h. Perrier; in agris vallis Monnetier (Sabaud.) : leg. Reuter in h. Boiss. propr. — *Scandinavia.* Circa Jonkoping (Smaland) : leg. Zetterstedt in h. Brux. gen.

Observatio 2. — In varietatem *silvestrem* transit in Gallia. In monte Saleva (Sabaud.) : leg. Puget in h. Perrier.

η. Var. Reichenbachii Rapin, *Guide du bot. Vaud*, ed. 2, p. 246 (1862); Grenier, *Flore de la chaine jurass.*, p. 628 (1865); Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 177 = *G. Reichenbachii* Reuter in *Bull. Soc. Haller.*, II, p. 27 (1854) et *Cat. pl. vasc. des env. de Genève*, ed. 2, p. 174 (1861).

Caulis reductior quam in α. Folia ovata, pilosa, apice acuta, basi breviter extenuata vel rotundata, superficie ad 8 × 4,5 cm., sed saepe minora; serratura constans ex dentibus grossis, robustis ± crebris, trapezos vel trigonos extus gibbos culminibus ± obtusis 2-4 mm. altis et circa 8 mm.

Digitized by Google

distantibus, constituentibus. Calix ut et bracteae valde hispidae, dentibus mollibus arista longissima, vulgo tubo multo longiore, praeditis. Labioli corollini lobus medius truncatus, quadratulus. Nuculae maculis atris quae saepe in aliis varietatibus observantur destitutae.

Area. — *Helvetia.* Circa Müfenen (Graubünd.) : leg. Heer in h. Tur. helv.; in Engadina (Graub.) loco non indicato : leg. Heer in h. Tur. helv.; Cresta in valle Avers (Graubünd.) : leg. Käser in h. suo; in alpibus circa Münster (Valais) : leg. Daenen in h. Deless. gen.; in tuguriis Alpienrung prope Simplon : leg. Chenevard in h. suo; circa Bourg S^{t}-Pierre (Valais) : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb., leg. Déséglise in h. Brux. gen.; ad tuguria jugi Chaude supra Villeneuve (Vaud) : leg. Favrat in h. Burn.; in monte Jura supra Valeyres (Vaud) : leg. Reuter in h. Barb. — *Italia.* Inter Eglise et Beauregard in valle Grisanche : leg. Beyer in h. suo; ad tuguria vallis Carmino (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar.; ad rupes editas prope jugum Carbone versus Limone (Alp. mar.) : leg. Burnat in h. Alp. mar. — *Gallia.* Ad montem Muntis supra Fontan (Alp. mar.) : leg. Reverchon (Plantes de France, 1886, n° 232, haud typica) in h. Alp. mar.; Colombe prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in valle Poncellamont prope Beaufort (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in monte Cenisio ad la Barrière de Savoie : leg. Perrier in h. suo; in monte Nivolet prope Chambéry (Sabaud., forma vix typica) : leg. Songeon in h. Perrier; in monte Chaire prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; circa tuguria ad Roselin (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo; in monte Cré du Maure supra Annecy : leg. Puget in h. Perrier; abunde circa tuguria Flaine in alpibus Platet (Sabaud.) : leg. Briquet in h. suo; in monte Saleva ad les Pitons : leg. Reuter in h. Boiss. propr., h. Barb.; in jugo juratensi Faucille (Ain) : leg. Reuter in h. Boiss. propr.; in valleculo juratensi Ardran et ad montem Reculet : leg. Reuter in h. Barb., h. Boiss. propr., h. Deless. helv., leg. Fauconnet, leg. Fillon in h. Deless. helv., leg. Ayasse in h. suo., leg. Ducommun in h. Berol. eur. — *America.* Specimen plantae nostrae valde approximatum vidimus ex Newfoundland : leg. Lesson (1845) in h. Deless. gen.

Digitized by Google

Observatio. — Varietas *Reichenbachii* cum aliis fere omnibus formis transitivis crebris continue jungitur. ut sequitur :

Cum var. *arvensi.* — *Gallia.* In monte Saleva (Sabaud.) : leg. Chavin (Billot, n° 2898) in h. Boiss. propr., h. Perrier, h. Brux. gen. ; in monte Saleva ad les Pitons (Sabaud.) : leg. Reuter in h. Barb. ; in jugo juratensi Faucille : leg. Genty (Fl. select., n° 2023) in h. Deless. gen. ; in valle Lacour, Mont Dore-les-Bains, Puy-de-Dôme : leg. Azenon (Fl. select., n° 2063 et F. Sch., Herb. norm., 2063) in h. Deless. gen., h. Brux. gen., h. Burn. ; prope Colombey ad Bar-sur-Aube (Aube) : leg. Désétangs in h. Barb.

Cum var. *silvestri.* — *Gallia.* La Maïris et l'Authion prope Nice : h. Nice ; in monte Saleva ad les Pitons (Sabaud.) : leg. Fillion in h. Deless. helv. ; in monte Crêt du Maure supra Annecy : leg. Puget in h. Perrier.

Cum var. *praecoce.* — *Helvetia.* Circa Zermatt (Valais) : leg. Favrat in h. Jäggi, h. Tur. helv. — *Gallia.* Belleville prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo ; in agris la Croisette in monte Saleva (Sabaud.) : leg. Reuter in h. Barb.

Cum var. *Verloti.* — *Gallia.* Circa Belleville prope Hauteluce (Sabaud.) : leg. Perrier in h. suo ; in locis locis lapidosis supra Chézery in monte Jura : leg. Chenevard in h. suo.

2. Subsp. bifida Fries, *Novit. fl. suec. mant. alt.*, p. 58 (1839) ; Briquet, *Labiées des Alpes maritimes*, p. 178.

De caracteribus et area hujus subspeciei, vide sub unica varietate.

α. **Var. bifida** Lejeune et Courtois, *Choix de plantes*, n° 772 (1825-1827) et in *Compend. fl. belg.*, t. II, p. 259 (1831) ; Schönheit, *Phytographische Bemerkungen* (*Flora*, XV, pp. 593-560, 1832) ; Mutel, *Fl. française*, III, p. 29 (1836) ; Schultz in *Bot. Zeitung*, II, p. 845 (1844) = *G. bifida* von Boenninghausen, *Prodromus fl. monast.*, p. 178 (1824) = *G. Tetrahit* subsp. *bifida* var. *virens* Fries, *l. c.* (1839) = *G. bifida* var. *subalpina* Schur, *Enumeratio plant. Transs.*, pp. 536-537 (1866).

Planta formis campestribus subsp. *genuinae* debilior. Folia lanceolata, apice acuta vel acuminata, basi cuneiformia et in petiolum extenuata, viridia et in formis typicis ita pubescentia vel pilosa ut foliorum pagina superior aliq. niteat. Verticillastri hispidi. Flores parvi ; corollae dentes calicinales vix

Digitized by Google

excedentes. Labioli carollini lobus medius longior quam latus, preuridiis terminalibus duobus vulgo valde distinctis, sinu acuto et profundo separatis, marginibus ad finem anthesis infra revolutis.

Area. — *Sibiria.* Ad fllumen Amur in Dahuria : leg. Maximowicz in h. Berol. gen.; in Sibiria altaïca : leg. Politow in h. Brux. gen., h. Tur. gen ; in Sibiria uralensi (Ledebour, *Flora rossica,* III, p. 422). — *Asia minor.* In montibus Ponticis : leg. C. Koch in h. Berol. gen. — *Rossia.* Circa Sarepta : leg. Becker (Plant. Astrachanicae) in h. Burn., h. Brux. gen.; prope Lachte : leg. Körnicke in h. Berol. eur.; prope St-Petersburg : h. Barb. (Herb. Florae Ingricae, n° 497). — *Austro-Hungaria.* Circa Kitzbübel (Tyr.) : leg. Traunsteiner in h. Berol. gen.; prope Opocno (Bohem.) : leg. Freyn in h. Jäggi; circa Polichno (Hung.) : leg. P. Rell in h. Beyer (ad var. silvestrem vergens). — *Germania.* Ad Scheiteich et Ohlau prope Breslau : leg. Uechtritz in h. Callier, h. Engler; Schmolz (Siles.) : leg. Engler in h. suo; Laeben (Siles.) : leg. Figert in h. Callier; prope Randonatschen (Boruss. orient.) : leg. Körnicke in h. Berol. eur.; in ambulacro Thiergarten prope Berlin : leg. Thiebaut in h. Berol. gen., leg. Regel in h. Tur. gen.; circa Hamburg : leg. Sonder (Billot, n° 498) in h. Deless. gen., h. DC. prodr., h. Tur. gen.; circa Lübeck : leg. Hacker in h. Barb.; Mittelweg v. d. Wendenthore prope Braunschweig : leg. Kummel in h. Chenevard; prope Schleusingen (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; circa Saalburg (Thür.) : leg. Haussknecht in h. suo; in agris circa Allenringen : leg. Haussknecht in h. suo; circa Tröbsdorf (Thüring.) : leg. Haussknecht in h. suo (f. pinguis); circa Herford (Westf.) : leg. Weihe (Reichb., n° 236) in h. Boiss. propr., h. Berol. gen.; prope Minden (Westf.) : leg. Weihe in h. Brux. gen.; in montibus circa Coblenz : leg. Wirtgen (Billot, n° 1301bis) in h. Boiss. propr., h. Deless. gen., h. Brux. gen., in h. Perrier, h. Berol. eur.; prope Aachen : leg. Dumortier in h. Brux. gen.; circa Ems : leg. Wirtgen in h. Brux. gen.; ad vicum Pfohren (Bad.) : leg. Schalch in h. Tur. gen.; in silva Hartwald prope Carlsruhe : leg. Doell (Billot, n° 1301) in h. Boiss. propr., h. Deless. gall., h. Perrier, h. Brux. gen., leg. Braun in h. Berol. eur.; circa München : leg. Brügger in h. Tur. gen.; prope Trèves : leg. Loehr (Billot, n° 498bis) in h. DC. prodr., h. Boiss. propr.; circa Bitche : leg. F. Schultz (Billot

Digitized by Google

addente ad n° 498) in h. Boiss. propr., h. DC. prodr.; circa Weissenburg : leg. F. Schultz (Herb. norm., n° 1203) in h. Deless. gen., h. Burn., h. Berol. eur., h. DC. nov. — *Gallia.* Prope Granges (Vosges) : leg. Gérard (Fl. select., n° 1772) in h. Deless. gen.; in arvis ad Chagay (?) : leg. Callay in h. Brux. gen.; ad la Rotte prope Bourges (Cher) : leg. Boreau in h. Perrier. — *Dania.* Prope Helsinger in Sjollandia : leg. Lange in h. Brux. gen. — *Scandinavia.* Södertelje-Rynildsberg (Sodermanland) : leg. Clever in h. Brux. gen.; ad Barkeryd (Smoland.) : leg. Montelen in h. Chenevard.

Observatio 1. — Formae dubiae et fertiles inter subsp. *bifidam* et caeteras varietates campestres (praecipue var. *silvestrem*) subsp. *genuinae* haud rarae sunt. In Helvetia vidimus specimina ex S^t-Gallen : leg. Brügger in h. Tur. helv., atque ex Galgenen (Schwyz) : leg. Brügger in h. Tur. helv., quibus micranthia et habitus verticillastrorum subsp. *bifidae* inhaerent, sed quae dispositionem labioli typicam nequaquam ostendunt. Prope torrentem Giessbach (Bern) aliam talem formam legit cl. Chenevard (in herb. suo) quae labiolo magis ad typicam *bifidam* vergit. Caeterum formae inter var. *bifidam* et *silvestrem* mediae huc et illuc occurrunt in Germania.

Observatio 2. — Cl. Haussknecht nobis benigne specimina suae *G. Ludwigii* seu *G. Tetrahit* × *bifida* misit. Exemplaribus exacte scrutatis nihil aliud ex eis trahere possumus quam veram var. *bifidam* caracteribus typicis, ut ex. foliorum paginae superioris indumento, ornatam. Plantae juniores sunt ut cl. botanophili indicationes de sterilitate examinare potuerimus (Haussknecht, in *Mittheil. des bot. Ver. f. Gesammtthüringen,* 1884, p. 8).

SPECIES EXCLUSAE.

G. frutescens, Mill., *Gardener's diction.*, ed. 6 (1771).	= *Prasium majus,* Linn., *Sp. pl.*, ed. 1, p. 601 (1753).
G. fusca, Moench, *Meth. plant. horti et agri Marburg*, p. 397 (1794).	= *Stachys alpina,* Linn., *Sp. pl.*, ed. 1, p. 581 (1753).
G. Galeobdolon, Linn, *Sp. pl.*, ed. 1, p. 580 (1753).	= *Lamium Galeobdolon,* Crantz, *Stirp. austr.*, p. 262 (1769).
G. hirsuta, All. ap. Benth, *Lab. gen. et spec*, p. 525 (1836). Cfr. p. 200 op. nostri.	= *Stachys hirta,* Linn., *Sp. pl.*, ed. 2, p. 813 (1763).
G. hirsuta, Linn., *Sp. pl.*, ed. 1, p. 580 (1753).	= *Stachys hirta,* L.

Digitized by Google

SPECIES EXCLUSAE (suite).

G. hispanica, Mill. ex stendel, *Nomencl. botan.*, ed. 1, p. 351 (1821).	= *Stachys hirta*, L., secundum Steudel, *l. c.*
G. hispida, Thunb., *Flora capensis*, p. 446 (1823).	= *Stachys Thunbergii*, Benth., *Lab. gen. et spec.*, p. 550 (1836)
G. maculosa, Lam., *Encycl. méth.*, II, p. 601 (1786).	= *Plectranthus punctatus*, L'Hérit., *Stirp.*, 87, t. XLII (1785).
G. orientalis, Mill. ex stendel, *Nomencl. botan.*, ed. 1, p. 351 (1821).	= *Stachys spinulosa*, Sibth. et Smith, *Fl. graec. prodr.*, I, p. 410 (1806).

SPECIES DELENDAE.

G. latifolia, Kitaibel ap. Kanitz, *Reliq. Kitaib.* (*Abhandl. d. zool.-bot. Ges. in Wien*, XIII, 1863, p. 76.)	Absque diagnosi.
G. pallida, Jord. ap. Saint-Lager, *Catal. de la fl. du bassin du Rhône.* (*Ann. soc. bot. de Lyon*, VIII, 1881, pp. 626-627.)	Absque diagnosi.
G. saligna, Kitaibel ap. Kanitz, *l. c.*	Absque diagnosi.
G. Tetrahit × *ochroleuca*, Wirtg. in *Verhandl. des bot. Ver. der preuss. Rheinl.*, etc., XI, 1854, pp. 438-448.	Hybrida hujus originis nunquam exstitit.
G. tridentata, Opiz, in *Flora*, XXIII, 1839. (*Intelligenzbl.*, n° 1, p. 13.)	Absque diagnosi.
G. tuberosa, Kitaibel ap. Kanitz, *l. c.*	Absque diagnosi.

Observatio ultima.

Operi finem faciens, auctori liceat collectorum attentionem in rationem incompletam et miserabilem qua saepius schedulas in herbariis depositas digerunt convertere. Ejus culpa, errores plures in indicationes nostras de distributione geographica formarum subrepuisse persuasum habemus. Schedulae plures enim completae vero sunt, sed tam abominandum in modum scriptae, ut interpretationes diversas facile tolerent vel omnino inextricabiles sint. Aliae nomina locorum parvorum omnino ignotorum, atque de quibus in vocabulariis geographicis mentio nulla fit, commemorant, nec regionem vel minime provinciam addunt in qua loci dicti siti sint. Auctor monographus ob collectorum negligentiam dein horas pretiosas permultas in scrutationibus aridis sterilibusque perdere cogitur, nec semper ejus contentiones exitum felicem habent. Opinamur igitur hic magnum abusum inductum esse, quem summa vi denuntiare tam botanices systematicae quam phytogeographiae valde interest !

Digitized by Google

CHAPITRE XXXI.

TABULAE SYNOPTICAE AD SPECIES VARIETATESQUE DETERMINANDAS.

I.

Caulis nodositatibus motricibus destitutus; trichoma constans ex solis pilis tectoribus (*Ladanum*).

- Epiderma in caule glabrum (exceptis supremis superioribus internodiis, ubi indumento tenue cinereo obtectum), superficie, praesertim in nodorum vicinitate ceram exsudans, qua caulis glaucescit : *G. Reuteri.*
- Epiderma in caule glabrum vel pilis praeditum, sed ceram in superficie non exsudans; ideo caulis nunquam glaucescens.
  - Calix et folia superiora glabra, pilosa, vel glanduloso-pilosa; corolla purpurascens : *G. Ladanum* II
  - Calix et folia superiora glanduloso-velutina, sericea quidem.
    - Folia oblonga vel oblongo-lanceolata, apice acuta vel obtusiuscula, basi extenuata et cuneiformia; corolla vulgo ochroleuca : *G. dubia* III
    - Folia ovata, apice obtusa vel obtusiuscula, basi brevissime extenuata, rotundata vel cordata; corolla vulgo purpurascens : *G. pyrenaïca* IV

Caulis nodositatibus motricibus praeditus; trichoma constans ex pilis tectoribus et pilis setaceis basi in pulvillo pluricellulari sitis (*Tetrahit*).

- Indumentum nodositatum motricium constans ex pilis tectoribus et setaceis (vulgo rarioribus vel subnullis) mollibus et adpressis crebris; corolla mediocris, purpurascens, tubi parte superiore lutescente : *G. pubescens* V
- Indumentum nodositatum motricium constans modo fere exclusivo ex pilis setaceis rigidioribus; corolla purpurascens, versicolor vel sulfurea.
  - Dentes calicinales, ad corollae medium tubum attingentes (excepta var. *pallente*); corolla versicolor vel sulfurea : *G. speciosa.* . VI
  - Dentes calicinales ultra corollae medium tubum attingentes; corolla purpurascens vel alba : *G. Tetrahit* VII

II.

Folia anguste lanceolata vel oblongo-lanceolata; serratura constans ex dentibus sparsis 1-4 in folii utroque margine rarius crebriores. Calix saepius pilis adpressis ornatus, albescens : *subsp. angustifolia.*

Digitized by Google

Calicis tubus indumento albescente appresso obtectus, vulgo subglandulosus vel glaber, sed certe pilis patulis et glandulis longe et patentius stipitatis non hirsutus; dentes calicinales saepius inaequales (formae typicae).

Dentes calicinales immoderate elongati, saepe arista magna spinescente ultra 8 mm. longi. Bracteolae fere omnes ± longe spinescentes : *v. spinosa.*

Dentes calicinales vulgo ad 5 mm. longi.

Foliorum serratura constans ex dentibus crebris, 4-6 in foliorum utroque margine, trigonos extus convexos, intus rectiusculos, apice vulgo obtusos vel rotundatos, culminibus 1 mm. altis et 2-4 mm. distantibus, constituentibus. Calicis tubus viridescens : *v. Filholiana.*

Foliorum serratura constans in folii utroque margine ex 3-4 dentibus parum robustis, trigonos 0,5-1 mm. altos, extus rectos, undulatos vel aliquot convexos, culminibus rectis vel aliq. obtusis, circa 5 mm. distantibus, constituentibus. Calix canescens : *v. orophila.*

Dentes calicinales vulgo circa 2-3 mm. longi.

Plantae rami viridescentes, pilosi vel glabri, sed indumento incano non obtecti.

Planta pilosa.

Foliorum serratura constans ex dentibus parum evidentibus, irregularibus (saepe subnullis), trigonos infra 1 mm. altos constituentibus : *v. Kerneri.*

Foliorum serratura constans ex dentibus robustioribus, regularioribus, trigonos 1-1,5 mm. altos constituentibus.

Folia anguste lanceolata, basi longe in petiolum longum eleganter extenuata; serratura constans in folii utroque margine ex 4 dentibus robustis, trigonos 1-1,2 mm. altos, extus rectos vel leviter undulatos, culminibus acutis et prorsus versis 5 mm. distantibus, constituentibus : *v. Berteti.*

Folia magna, latiora quam in var. praecedente, basi rotundius in petiolum brevem extenuata; serratura constans in folii utroque margine ex dentibus 4 magnis, trigonos 1-1,3 mm. altos, extus rectos, culminibus rectis vel acutis 4-8 mm. distantibus, constituentibus : *v. odontota.*

Planta ommino glabra, cujus caulis, folia et calices habitum cuprosum et metallicum characteristicum praebent : *v. glabra.*

Plantae rami pilositate spissa et crebra adornati qua in caule, foliis, bracteolis et calicibus omnino et crassius canescentes fiunt : *v. canescens.*

Digitized by Google

Calix viridescens vel ejus tubus non indumento albescente non exclusive adpresso obtectus, sed etiam pilis crebris patulis et glandulis stipitatis adornatus, nervatura saepe evidente, dentibus calicinalibus parum inaequalibus (formae ad subsp. *intermediam* vergentes).

Calicis tubus 5-6 mm. longus, nervis parum evidentibus; dentes ad longitudinem mediam tubi attingentes, i. e. ad 3-3,5 mm. longi, arista alba 1 mm. longa praediti : *v. calcarea.*

Calicis tubus ad 7 et 8 mm. longus, nervis sat evidentibus; dentes longiores ad 7-8 mm. attingentes, arista alba, acerosa, saepe dejecta, ad 1,5-1,7 mm. longa praediti : *v. carpetana.*

Folia ovata, ovato-lanceolata, oblonga vel oblongo-lanceolata, latiora quam in subsp. praecedente; serratura constans ex dentibus vulgo robustis, crebris, in folii utroque margine 4-8. Calix pilis patentibus obtectus, viridescens, ± glandulosus : *subsp. intermedia.*

Folia majora, ± late ovato-oblonga vel ovato-lanceolata; serratura constans ex dentibus robustis ad 1 mm. altis et ultra. Calix tubo vulgo ultra 5 vel 6 mm. longo, dentibus vulgo breviter aristatis ultra 2 mm. longis nervatione evidentiore : *v. intermedia.*

Folia minima, oblonga vel elliptica; serratura constans ex dentibus ad 0,2-0,5 mm. altis. Calix tubo ad 5 mm. longo, dentibus arista destitutis, vel arista quam in var. praecedente breviore ornatis, 1-2 mm. circa longis : *v. abundantiaca.*

III.

Folia majora, lanceolata, ovato-lanceolata, oblonga vel ovato-oblonga, superficie vulgo circa 2,5-4 × 0,7-2 cm.; serratura constans ex dentibus trigonos 1 mm. altos et 2-5 mm. distantes constituentibus. Calicis tubus circa 7 mm. longus : *subsp. et v. dubia.*

Folia minora, lanceolata vel oblonga, superficie 1-2 × 0,4-0,5 cm ; serratura constans ex dentibus trigonos 0,3-0,7 mm. altos et 1-2 mm. distantes constituentibus. Calicis tubus circa 4 mm. longus : *subsp. et v. nepetaefolia.*

IV.

Flores purpurei : *subsp. pyrenaïca.*

Planta vulgo 75-90 mm. alta. Folia majora lata, serratura robusta. Calicis tubus ad 8 mm. longus, dentibus longe subulato-acuminatis, superiore vulgo longiore ad 6-7 mm. longo, arista alba 1-2 mm. longa : *v. genuina.*

Digitized by Google

Planta vulgo 10-20 cm. alta. Folia reducta, angustiora, serratura debiliore. Calicis tubus circa 5 mm. longus, dentibus breviter lanceolatis, ad 1,5 mm. longis, arista brevissima praeditis : *v. nana.*

Flores ochroleuci ± flavescentes, vel versicolores : *subsp. et v. brevifolia.*

V.

Folia lata, basi rotundata vel cordata : *v. genuina.*

Folia angustiora, basi cuneiformia et in petiolum extenuata : *v. Carthusianorum.*

VI.

Flores majores; labioli corollini lobus medius quadratus ± planus.

Folia latiora, basi brevissime extenuata, rotundata vel subcordiformia : *subsp. sulfurea.*

Folia glabescentia vel ± pubescentia : *v. sulfurea.*

Folia hispidissima, ad nervos subtus pilis setaceis horridula : *v. hispidior.*

Folia angustiora, basi cuneiformia et in petiolum longe extenuata : *subsp. et v. speciosa.*

Flores minores; labioli corollini lobus medius profundius emarginatus, angustatus, marginibus subtus saepe revolutis : *subsp. et v. pallens.*

VII.

Flores majores; labioli corollini lobus medius quadratulus et parum emarginatus vel rotundatus, ± planus : *subsp. genuina.*

Formae elatae, habitu robusto, floribus saepius purpureis quam albis, praesertim in planitiebus vel in locis infer. habitantibus.

Folia apice acuta vel brevius acuminata, basi brevissime extenuata, rotundata vel subcordiformia : *v. arvensis.*

Folia apice longius acuminata, basi cuneiformia et in petiolum extenuata.

Serratura foliorum constans ex dentibus trigonos ± regulares constituentibus.

Foliorum dentes constantes ex trigonis ad 2 mm. altis. Petioli verticillastris longiores : *v. silvestris.*

Foliorum dentes constantes ex trigonis typice circa 2-3 mm. altis. Verticillastri petiolos aequantes vel superantes : *v. lazistanica.*

Serratura foliorum constans ex crenis elongatis et depressis : *v. idiotropa.*

Formae reductae, habitu debiliore, foliis minoribus, floribus saepius albis quam purpureis, praesertim in montibus et subalpibus vegetantes.

Calix et bracteae mediocriter hispida. Dentes calicinales corollae tubo aequilongi vel breviores. Serratura constans ex dentibus trigonos culminibus vulgo 1-1,5 mm. altis constituentibus.

Digitized by Google

Folia latiora, apice acuta, basi brevius extenuata saepe aliq. rotundata. Serratura foliorum constans, in foliis ramealibus caulinaribusque mediis, ex dentibus crebris, trigonos extus rectos vel aliq convexos, culminibus acutis prorsus versis : *v. Verloti.*

Folia angustiora, apice acuminata, basi in petiolum cuneiformiter extenuata. Serratura foliorum constans, in foliis superioribus caulinaribusque mediis ex dentibus crebris, trigonos extus valde gibbos, apice acutius culos constituentibus : *v. praecox.*

Calix et bracteae valde hispida. Dentes calicinales vulgo tubi longitudinem excedentes, immoderate elongati, molliores. Folia ampla, apice acuta, basi brevius extenuata vel rotundata; serratura constans ex dentibus trigonos 2, 3 et 4 mm. altos valde robustos constituentibus : *v. Reichenbachii.*

Flores minores, labioli corollini lobus medius angustus, elongatus, distincte bipleuridiatus, marginibus subtus revolutis : *subsp. et v. bifida.*

CHAPITRE XXXII.

GALEOPSES EXSICCATAE NOBIS NOTAE AD MONOGRAPHIAM NOSTRAM DETERMINATAE.

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	1. Baenitz, *Herbarium europaeum.*			
30	ochroleuca.		dubia.	dubia.
	2. Balansa, *Plantes d'Orient.*			
1520	Tetrahit.		Tetrahit.	lazistanica.
	3. Becker, *Plantae astrachanicae.*			
	bifida.		Tetrahit.	bifida.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	4. BILLOT, *Flora Galliae et Germaniae exsiccata.*			
498	bifida.		Tetrahit.	bifida.
add. ad 498	bifida.		Tetrahit.	bifida.
498bis	bifida.		Tetrahit.	bifida.
499	versicolor.		speciosa.	speciosa.
609	ochroleuca.		dubia	dubia.
609bis	dubia.		dubia.	dubia.
610	pubescens.		pubescens.	genuina.
610bis	pubescens.		pubescens.	genuina.
712	pubescens.		pubescens.	genuina
831	pyrenaïca.		pyrenaïca.	genuina.
832	versicolor.		speciosa.	speciosa.
916	ochroleuca.		dubia.	dubia.
1049	angustifolia.		Ladanum.	calcarea.
1049bis	angustifolia.		Ladanum.	calcarea.
1299	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
add. ad 1299	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
1299bis	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
1299ter	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
1300	canescens.		Ladanum.	orophila.
1301	bifida.		Tetrahit.	bifida.
1301bis	bifida.		Tetrahit.	bifida.
1302	sulfurea.		speciosa.	f. inter speciosam et sulfuream ambigens.
1946	Verloti.		Tetrahit.	Verloti.
2341	arvatica.		Ladanum.	calcarea.
2341bis	arvatica.		Ladanum.	calcarea.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS
	4. Billot, *Flora Galliae et Germaniae exsiccata* (suite)			
2897	Filholiana.		Ladanum.	Filholiana.
2898	Reichenbachii.		Tetrahit.	f. inter silvestrem et Reichenbachii ambigens.
3454	grandiflora.		dubia.	dubia.
3455	nepetaefolia.		dubia.	nepetaefolia.
3456	leucantha.		Tetrahit.	arvensis.
3757	acuminata.		Tetrahit.	f. inter arvensem et silvestrem ambigens.
3757bis	acuminata.		Tetrahit.	f. inter arvensem et silvestrem ambigens.
	5. Bordère, *Plantes des Pyrénées*, édit. Hohenacker.			
109	Filholiana.		Ladanum.	f. inter Filholianam et calcaream ambigens.
	6. Bourgeau, *Plantes des Alpes maritimes*, 1861.			
	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
	7. Bourgeau, *Plantes d'Espagne*, 1864.			
	Galeopsis, sine nomine.		Tetrahit.	Verloti.
	8. Dickson, *Hortus siccus britannicus.*			
15	villosa.		dubia.	dubia.
	9. Durieu, *Plantarum selectarum hispano-lusitanicarum.* Sect. 1. Asturicae, anno 1834 collectae.			
247	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
	10. Fries, *Herbarium normale.*			
VII. 8	Tetrahit.	pallens.	speciosa.	pallens.
XVI. 19	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
XII. 33	dubia.		dubia.	dubia.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	11. Günther, *Exsiccata plant. siles. medicin.*			
	angustifolia.		Ladanum.	orophila.
	cannabina.		speciosa.	speciosa.
	pubescens.		pubescens.	genuina.
	Tetrahit.		Tetrahit.	silvestris.
	12. *Herbarium Florae Ingricae.*			
497	Tetrahit.		Tetrahit.	bifida.
	13. *Herbier des flores locales de France.*			
107	dubia.		dubia.	dubia.
	14. Hohenacker, *Arznei- und Handelspflanzen.*			
91	ochroleuca.		dubia.	dubia.
334	Ladanum.	latifolia.	dubia.	dubia.
1067	Tetrahit.		Tetrahit.	bifida.
	15. Huet du Pavillon, *Plantes des Pyrénées.*			
	pyrenaïca.		pyrenaïca.	genuina.
	16. Kerner, *Flora exsiccata austro-hungarica.*			
942	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
943	angustifolia.		Ladanum.	Kerneri.
944	canescens.		Ladanum.	Kerneri.
	17. Lejeune et Courtois, *Choix de plantes.*			
29	Ladanum.		Ladanum.	calcarea.
295	ochroleuca.		dubia.	dubia.
772	Tetrahit.	bifida.	Tetrahit.	bifida.
773	Tetrahit.		Tetrahit.	silvestris.
910	Ladanum.	β	Ladanum.	orophila.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	18. MAGNIER, *Flora selecta exsiccata.*			
37	angustifolia.		Ladanum.	calcarea.
117	versicolor.		speciosa.	speciosa.
118	nepetaefolia.		dubia.	nepetaefolia.
371bis	angustifolia.		Ladanum.	calcarea.
938	Ladanum.		Ladanum.	f. inter Kerneri et calcaream ambigens.
939	Ladanum.		Ladanum.	calcarea.
920	Ladanum.	monticola.	Ladanum.	calcarea.
1266	dubia.		Wirtgeni.	
1267	dubia.		Wirtgeni.	
1512	arvatica.		Ladanum.	calcarea.
1513	longiflora.		Ladanum.	intermedia.
1772	bifida.		Tetrahit.	bifida.
2023	Reichenbachii.		Tetrahit.	f. inter silvestrem et Reichenbachii ambigens.
	19. MAGNIER, *Plantae Galliae septentr. et Belgii.*			
29	angustifolia.	littoralis.	Ladanum.	canescens.
217	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
	20. MARTINS, *Plantes des environs de Lyon,* 1851.			
	sulfurea.		speciosa.	sulfurea.
	21. PAILLOT, *Flora sequaniae exsiccata.*			
116	arvatica.		Ladanum.	Kerneri.
117	dubia.		dubia.	dubia.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	22. Reichenbach, *Flora German. exsiccata.*			
235	pubescens.		pubescens.	genuina.
236	bifida.		Tetrahit.	bifida.
450	versicolor.		speciosa.	speciosa.
991	intermedia		Ladanum.	intermedia.
1674	angustifolia		Ladanum.	f. inter orophilam et Kerneri ambigens.
	23. *Reliquiae Mailleanae.*			
760	dubia		dubia.	dubia.
1582	dubia.		dubia.	dubia.
1583	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
	24. Reverchon, *Plantes de France,* 1886			
106	glaucescens.		Reuteri.	
231	sulfurea.		speciosa.	sulfurea.
232	Tetrahit.		Tetrahit.	Reichenbachii non typ.
	25. Reverchon et Derbez, *Plantes de France,* 1888.			
107	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
	26. Rigo, *Plantae ex Italia boreali,* 1878.			
	Ladanum.		pubescens.	genuina.
	27. Rostan, *Exsiccata Pedemontana*			
	praecox.		Tetrahit.	praecox.
	28. F. Schultz, *Herbarium normale.*			
728	pubescens.		pubescens.	genuina.
889	ochroleuca.		dubia.	dubia.
1202	pyrenaïca.		pyrenaïca.	genuina.
1203	Tetrahit.	bifida.	Tetrahit.	bifida.
1204	praecox.		Tetrahit.	praecox.
1452	Filholiana.		Ladanum.	Filholiana.
2063	Reichenbachii		Tetrahit.	f. inter silvestrem et Reichenbachii ambigens.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	29. *Société dauphinoise*, 1re série.			
204	nepetaefolia.		dubia.	nepetaefolia.
205	orophila.		Ladanum.	f. inter orophilam et Kerneri ambigens.
206	Verloti.		Tetrahit	Verloti.
206bis	Verloti.		Tetrahit	Verloti.
544	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
927	sulfurea.		speciosa.	speciosa.
1809	angustifolia.	littoralis.	Ladanum	canescens.
3005	angustifolia.	genuina.	Ladanum.	orophila.
3006	arvatica		Ladanum.	calcarea.
3007	dubia.		dubia.	dubia.
3008	versicolor.		speciosa.	speciosa.
3859	Reuteri.		Reuteri.	
4645	Ladanum.	campestris.	Ladanum.	orophila.
4806	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
5005	amaurophylla		Ladanum.	amaurophylla.
5663	Tetrahit.		Tetrahit.	silvestris.
	30. *Société dauphinoise*, 2e série.			
179	longiflora.		Ladanum.	intermedia.
	31 Thielens et Devos, *Kickxia belgica*.			
256	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
	32. Van Heurck et Martinis, *Herbier des plantes rares ou critiques de Belgique*.			
176	Ladanum.		Ladanum.	calcarea.
223	intermedia.		Ladanum.	intermedia.

Digitized by Google

NUMERI.	NOMINA AUCTORUM.		DETERMINATIO NOSTRA.	
	SPECIES.	VARIETAS.	SPECIES.	VARIETAS.
	33. WILLKOMM, *Iter hispanicum secundum.*			
417	Ladanum.		Ladanum.	intermedia.
	34. WIRTGEN, *Herbarium plantarum selectarum criticarum vel hybridarum florae rhenanae.*			
81	versicolor.		speciosa.	speciosa.
291 *a*	ochroleuca.		Wirtgeni.	
291 *b*	ochroleuca.		Wirtgeni.	
313	intermedia.		Ladanum.	intermedia.
622	versicolor.		speciosa.	speciosa.
622bis	versicolor.		speciosa.	speciosa.

CHAPITRE XXXIII.

INDEX NOMINUM IN CAP. « SYSTÉMATIQUE ANALYTIQUE » TITULATO PROVENIENTIUM [1].

	Pages.		Pages.
Galeopsis, Linn. (genus).	240	*Galeopsis angustifolia v. glabrescens*, Gremli	253
— acuminata, Reichb. . .	282	— *angustifolia v. littoralis*, Vicq. et Brutt.	254
— *alpicola*, Jord.	291	— *angustifolia* × *latifolia*, Haussk.	266
— *amaurophylla*, Timb. . .	258	— *arvatica*, Jord.	235
— *angustifolia*, Ehrh. . . .	246	— *Berteti*, Perr. et Song. . .	252
— *angustifolia*, Kern. . . .	250	— *bifida*, v. Boenn.	301
— *angustifolia v. arenaria*, Gren. et Godr. . . .	255	— *bifida v. subalpina*, Schur.	301
— *angustifolia v. glabrescens*, Favrat	253		

[1] Nomina in monographia nostra accepta cum typis ordinariis impressa; synonyma, exclusa vel delenda cum *italicis*. Cum typis italicis etiam scribuntur nomina ad alia genera vel aliorum generum species pertinentia et in cap. nostro passim citata.

Digitized by Google

	Pages.
Galeopsis *calcarea*, Schoenh . . .	255
— *canescens*, Kern.	250
— *canescens*, Schult. . . .	254
— *cannabina*, Balb.	284
— *cannabina*, Gmel. . . .	277
— *cannabina*, Poll.	268
— *cannabina*, Roth.	286
— *carpetana*, Willk. . . .	258
— *divergens*, Timb.	255
— dubia, Leers	268
— *dubia v. brevifolia*, Willk. .	276
— dubia subsp. dubia, Briq. .	269
— dubia subsp. nepetaefolia, Briq.	273
— dubia v. dubia, Briq. . .	269
— dubia v. nepetaefolia, Briq.	273
— dubia × Ladanum, Briq. .	266
— *eglandulosa*, Timb. . . .	247
— *elegans*, Bor.	268
— *Filholiana*, Timb. . . .	247
— *flavescens*, Borb.	286
— *Frehi*, Borb.	273
— *frutescens*, Mill.	303
— *fusca*, Moench.	303
— *Gacognei*, Jord.	291
— *Galeobdolon*, Linn. . . .	303
— *glabra*, Dését.	253
— *glandulosa*, C. Koch. . .	259
— *glaucescens*, Reut. . . .	243
— *grandiflora*, Bluff. et Fing.	246
— *grandiflora*, Roth. . . .	268
— *Haussknechtii*, Ludw. . .	266
— *hirsuta*, All.	303
— *hirsuta*, Linn.	303
— *hispanica*, Mill.	304
— *hispida*, Thunb.	304
— *intermedia*, Heidenr. . .	282
— *intermedia*, Vill.	259
— *intermedia v. pumila*, Beyer.	259
— *Ladano-ochroleuca*, Crép. .	266
— *Ladanum*, All. p. p. . .	243

	Pages.
Galeopsis Ladanum, Linn.	245
— Ladanum subsp. angustifolia, Gaud.	246
— Ladanum subsp. intermedia, Briq.	259
— *Ladanum subsp. latifolia*, Gaud.	259
— *Ladanum v. angustifolium*, Wallr.	246
— Ladanum v. Berteti, Perr. et Song.	252
— Ladanum v. calcarea, Briq.	255
— *Ladanum v. campestre*, Timb.	248
— Ladanum v. canescens, Reichb.	254
— Ladanum v. carpetana, Briq.	258
— *Ladanum v. chloropsis*, Briq.	248
— *Ladanum v. exilis* Gaud. (vide errata)	322
— Ladanum v. Filholiana, Briq.	247
— Ladanum v. glabra, Briq. .	253
— *Ladanum v. glandulosa*, Löhr.	259
— *Ladanum v. grandiflora*, Rigo.	277
— Ladanum v. intermedia, Mutel	260
— Ladanum v. Kerneri, Briq.	250
— *Ladanum v. latifolia*, Wallr.	259
— *Ladanum v. marrubiastrum*, Reichb.	259
— *Ladanum v. monticola*, Launes	253
— *Ladanum v. ochroleuca*, Kuntze	268
— Ladanum v. odontota, Briq.	253
— Ladanum v. orophila, Briq.	248
— *Ladanum v. simplex*, C. Koch.	259

Digitized by Google

	Pages.
Galeopsis Ladanum v. spinosa, Benth.	246
— *Ladanum sv. umbrosa*, Asch.	268
— *Ladanum sv. viridis*, Griessel.	259
— *Ladanum v. villosa*, Asch.	268
— *Laramberguei*, Martr.	258
— *latifolia*, Hoffm.	259
— *latifolia v. glandulifera*, Bamb.	259
— *latifolia*, Kit.	304
— *leiotricha*, Borb.	286
— *leucantha*, Jord.	291
— *longiflora*, Timb. et Març.	259
— *Ludwigii*, Hauskn.	303
— *maculosa*, Lam.	304
— *monticola*, Jord.	258
— *neglecta*, Schultes.	295
— *nodosa*, Saint-Lager	290
— *ochroleuca*, Lam.	268
— *ochroleuca v. minor*, Gaud.	268
— *ochroleuca v. purpurea*, Gaud.	268
— *ochroleuca* × *angustifolia*, Ludw.	266
— *ochroleuca* × *intermedia*, Ludw.	266
— *nepetaefolia*, Timb.	275
— *orientalis*, Mill.	304
— *orophila*, Timb.	248
— *pallida*, Jord.	304
— *parviflora*, Lam.	259
— *Poolii*, Brügg.	282
— *praecox*, Jord.	297
— *prostrata*, Vill.	268
— pubescens, Bess.	277
— pubescens v. Carthusianorum, Briq.	281
— pubescens v. genuina, Metsch.	278
— *pubescens v. glandulosa*, Reichb.	278
Galeopsis *pubescens v. minor*, Gaud.	278
— *pubescens v. mollis*, Gaud.	278
— *pubescens v. setosa*, Schur.	278
— *pubescens v. setulosa*, Borb. (vide errata)	278
— *pubescens v. tristis*, Briq.	278
— pubescens × Tetrahit, Hellw.	282
— pyrenaïca, Bartl.	275
— pyrenaïca subsp. brevifolia, Briq.	276
— pyrenaïca subsp. pyrenaïca, Briq.	274
— pyrenaïca v. brevifolia, Briq.	276
— pyrenaïca v. genuina, Debeaux	274
— *pyrenaïca v. mediterranea*, Debeaux.	274
— pyrenaïca v. nana, Willk et Costa.	275
— *Reichenbachii*, Reut.	299
— Reuteri, Reichb. fil.	243
— *saligna*, Kit.	304
— *segetum*, Reich.	268
— speciosa, Mill.	283
— speciosa subsp. pallens, Briq.	289
— speciosa subsp. speciosa, Briq.	286
— speciosa subsp. sulfurea, Briq.	284
— speciosa v. hispidior, Friv.	284
— *speciosa v. leiotricha*, Borb.	286
— *speciosa v. nana*, Beyer	286
— speciosa v. pallens, Briq.	289
— speciosa v. speciosa, Briq.	286
— speciosa v. sulfurea, Briq. (vide errata)	284
— *speciosa* × *Tetrahit* Brügg.	290
— *stricta*, John.	282
— *tetrachista*, Wimm. et Grab.	290
— Tetrahit, Linn.	290
— *Tetrahit*, C. All.	284

Digitized by Google

	Pages.
Galeopsis Tetrahit subsp. bifida, Fries.	301
— Tetrahit subsp. genuina, Briq..	291
— *Tetrahit subsp. primaria*, Fries.	291
— *Tetrahit subsp. Tetrahit*, Briq..	291
— *Tetrahit v. acuminata*, Mutel.	282
— *Tetrahit v. acuta*, Briq.	291
— *Tetrahit v. agrestis*, Kuntze.	290
— Tetrahit v. arvensis, Schlecht.	291
— *Tetrahit v. aspera*, Kuntze.	290
— Tetrahit v. bifida, Lej. et Court.	301
— *Tetrahit v. cannabina*, Linn.	283
— *Tetrahit v. genuina*, Mutel.	291
— *Tetrahit v. grandiflora*, Benth.	286
— *Tetrahit v. grandiflora*, Kuntze	290
— Tetrahit v. idiotropa, Briq.	296
— Tetrahit v. lazistanica, Briq.	296
— *Tetrahit v. major*, Vis.	298
— *Tetrahit v. pallens*, Fries	289
— *Tetrahit v. parviflora*, Vis. et Benth.	290
— Tetrahit v. praecox, Rapin.	297
— *Tetrahit v. pubescens*, Benth.	277
— Tetrahit v. Reichenbachii, Rapin	299
— *Tetrahit v. setoso-hispida*, Griessel. (vide errata)	322
— Tetrahit v. silvestris, Schlecht.	295
— Tetrahit v. Verloti, Briq.	298
— *Tetrahit v. versicolor*, Kuntze.	286
— *Tetrahit v. virens*, Fries.	301
— *Tetrahit v. vulgaris*, Gren.	293
— *Tetrahit* × *bifida*, Hausskn.	305
— *Tetrahit* × *ochroleuca*, Wirtg.	304
— *tridentata*, Op.	304

	Pages.
Galeopsis tuberosa, Kit.	304
— *urticifolia*, Ortm.	293
— *Verloti*, Jord.	298
— *versicolor*, Curt.	286
— *versicolor*, De Not.	284
— *versicolor*, Spenn.	277
— *versicolor v. subalpina*, Schur.	286
— *versicolor v sulfurea*, Reich. fil. (vide errata)	284
— *villosa*, Huds.	268
— *Walterina*, Schlecht.	277
— Wirtgeni, Ludw.	266
Galeopsideae, Vis. (tribus)	240
Ladanum, Gilib. (genus)	240
— Kuntze (genus)	240
— Reichb. (subgenus)	243
Ladanum dubium, Kuntze	246 et 268
— *luteum*, Gilib.	268
— *purpureum*, Gilib.	245
— *Tetrahit*, Kuntze	290
Lamium, Linn. (genus)	242
Lamium Galeobdolon, Crantz	303
— *Ladanum*, Crantz	245
— *Tetrahit*, Crantz	290
Leonurus, Linn. (genus).	242
Plectranthus punctatus, L'Hérit.	304
Prasium majus, Linn.	303
Stachydeae, Benth. (tribus).	242
Stachys alpina, Linn.	303
— *hirta*, Linn.	303 et 304
— *spinulosa*. Sibth. et Sm.	304
— *Thunbergii*, Benth.	304
Tetrahit, Gilib. (genus).	240
— Moench. (genus)	240
— Reichb. (subgenus)	276
Tetrahit grandiflorum, Gilib.	286
— *Ladanum*, Moench.	245
— *longiflorum*, Moench.	268
— *nodosum*, Moench.	290
— *purpurascens*, Gilib.	290

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.

Pages 7. Ajouter aux travaux parus en 1882, une note de M. Ad. Meyer [1] sur la structure du *G. ochroleuca* (*dubia*), comparé aux *G. Ladanum* et *versicolor* (*speciosa*). L'auteur s'étend surtout sur les dimensions et la forme des glandes et des poils dans ces trois espèces ; les caractères différentiels qu'il indique ne sont pas absolus. M. Ad. Meyer n'a pas vu les coussinets basilaires des poils sétacés du *G. speciosa*.

— 7, note 2, ligne 5. Au lieu de *Elsholzia*, lire *Elsholtzia*.

— 8, ligne 2. Au lieu de *hederacca*, lire *hederacea*.

— 8. Ajouter, après les travaux parus en 1888, une note très intéressante de M. Büsgen sur le tanin dans le genre *Galeopsis* [2], laquelle nous avait entièrement échappé. L'auteur signale le fait que chez le *G. ochroleuca* (*dubia*), l'épiderme et la gaine phloeotermique de l'hypocotyle contiennent beaucoup de tanin. Placée quelques jours à l'obscurité, pendant lesquels les premières feuilles se développèrent, on ne put obtenir, dans cette plantule, les réactions du tanin que pour les parties de l'hypocotyle qui avaient crû à l'obscurité. L'auteur en conclut que le tanin, dans ce cas, n'émigre pas, n'est pas utilisé dans la croissance à l'obscurité et se comporte en tous points comme une excrétion.

— 9, ligne 23. Au lieu de *torrus*, lire *torus*.

— 13, note 4. Au lieu de *Ibidem*, lire *Idem*.

— 33, ligne 2. Au lieu de *cousinet*, lire *coussinet*.

— 37, ligne 6. Au lieu de *criblées*, lire *criblés*.

— 39, fig. 8, note. Au lieu de *Pr*, lire *Pci* ; au lieu de *Pci*, lire *Ph*.

— 42, ligne 25. Après *avec*, ajouter *les*.

— 43, ligne 3. Avant *jamais*, intercaler *car*.

— 43, note 1. Au lieu de *Anardnung*, lire *Anordnung*.

[1] Ad. Meyer, *Anatomische Charakteristik officineller Blätter und Kräuter*, p. 41-42 (Abhandl. der naturforsch. Gesellsch. zu Halle, t. XV, 1882).

[2] Büsgen, *Beobachtungen über das Verhalten des Gerbstoffes in den Pflanzen*, p. 19. Jena, 1889.

Digitized by Google

Pages 55, ligne 12. Au lieu de *criblées*, lire *criblés*.

— 62, ligne 1. Au lieu de *tubercules*, lire *renflements*.

— 67, note. Au lieu de *Hoselacque*, lire *Hovelacque*.

— 67, fig. 17, note. Au lieu de *phloeothermique*, lire *phloeotermique*.

— 68, fig. 18, note. Au lieu de *Pa*, lire *Px*.

— 69, ligne 29. Placer le ; après le mot *moteurs*.

— 75, tableau II, colonnes 7 et 8. Au lieu de *convexe*, lire *concave*.

— 79, note 3. Au lieu de *Ambromn*, lire *Ambronn*.

— 80, note 3. Après *forcément*, ajouter *au moins*.

— 82, lignes 1, 6 et 9. Au lieu de *m*, lire *m'*.

— 87, ligne 34 de la note. Au lieu de *vegetalischer*, lire *vegetabilischer*.

— 97, fig. 21. Au-dessous de *15°*, lire *14°* et non *16°*.

— 101, note, ligne 7. Au lieu de *Krümmungverscheinungen*, lire *Krümmungserscheinungen*.

— 106, tableau IX, dernière ligne. Au lieu de *7,141* %, lire *2,141* %.

— 118, note, ligne 3. Au lieu de *de*, lire *des* (stomates).

— 146, ligne 22. Au lieu de *en plus grande quantité*, lire *en très petite quantité*

— 154, ligne 2. Au lieu de *leptocarpéi nnervié*, lire *leptocarpe innervié*.

— 155, ligne 29. Au lieu de *opposition*, lire *apposition*.

— 161, ligne 7. Au lieu de (*1891*), lire (*1890*).

— 167, ligne 22. Au lieu de *opuscules*, lire *opercules*.

— 189, ligne 15. Au lieu de *le pourmésophylle*, lire *pour le mésophylle*.

— 196, ligne 29, Au lieu de *libriformes*, lire *libriforme*.

— 200, ligne 12. Au lieu de *hirta*, lire *hirsuta*.

— 201, ligne 8. Au lieu de *verticolor*, lire *versicolor*.

— 215, ligne 8. Au lieu de *Verarlberg*, lire *Vorarlberg*.

— 215, ligne 10. Au lieu de *Prätigau*, lire *Prättigau*.

— 222, n° 22. Au lieu de *Hausthnecht*, lire *Haussknecht*.

— 236, ligne 22. Au lieu de *Gazistanica*, lire *lazistanica*.

— 238, fig. 54. Au lieu de *pyrenaïcum*, lire *pyrenaïca*.

— 240, ligne 8. Au lieu de (1784), lire (1794).

— 242, ligne 27. Avant *montes Altaïci*, intercaler *Hymalaia*

Digitized by Google

Pages 244, ligne 15. Au lieu de *Alpis*, lire *Alpibus*.

— 245, ligne 7 de l'art. *G. Ladanum*. Après *p. p.*, biffer *I.*

— 246, ligne 1. Après (1829), ajouter : incl. var. *exili*.

— 247, ligne 21. Au lieu de *arenariam*, lire *calcaream*.

— 258, ligne 23. Au lieu de *arenariae*, lire *calcareae*.

— 260, ligne 2. Au lieu de « Caucas, », lire « Caucas., ».

— 265, ligne 4. Au lieu de **abundantica**, lire **abundantiaca**.

— 268, ligne 14. Au lieu de « *umbrosa*. Ascherson », lire « *umbrosa* Ascherson ».

— 275, ligne 2 avant la fin. Au lieu de *geminam*, lire *genuinam*.

— 278, ligne 27. Au lieu de « *setosa* Borbas », lire « *setulosa* Borbas ».

— 290, ligne 5 de l'art. *G. Tetrahit*. Après (1828), ajouter : = *G. Tetrahit* v. *setosa-hispida* Griesselich, *Kleine botanische Schriften*, I, p. 152 (1836).

En outre, p. 256, ligne 2 ; p. 259, ligne 11 ; p. 260, ligne 26 ; p. 287, ligne 7 avant la fin ; p. 297, ligne 14 avant la fin ; p. 298, ligne 7 avant la fin. Au lieu de *Haussmann*, lire *Hausmann*.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

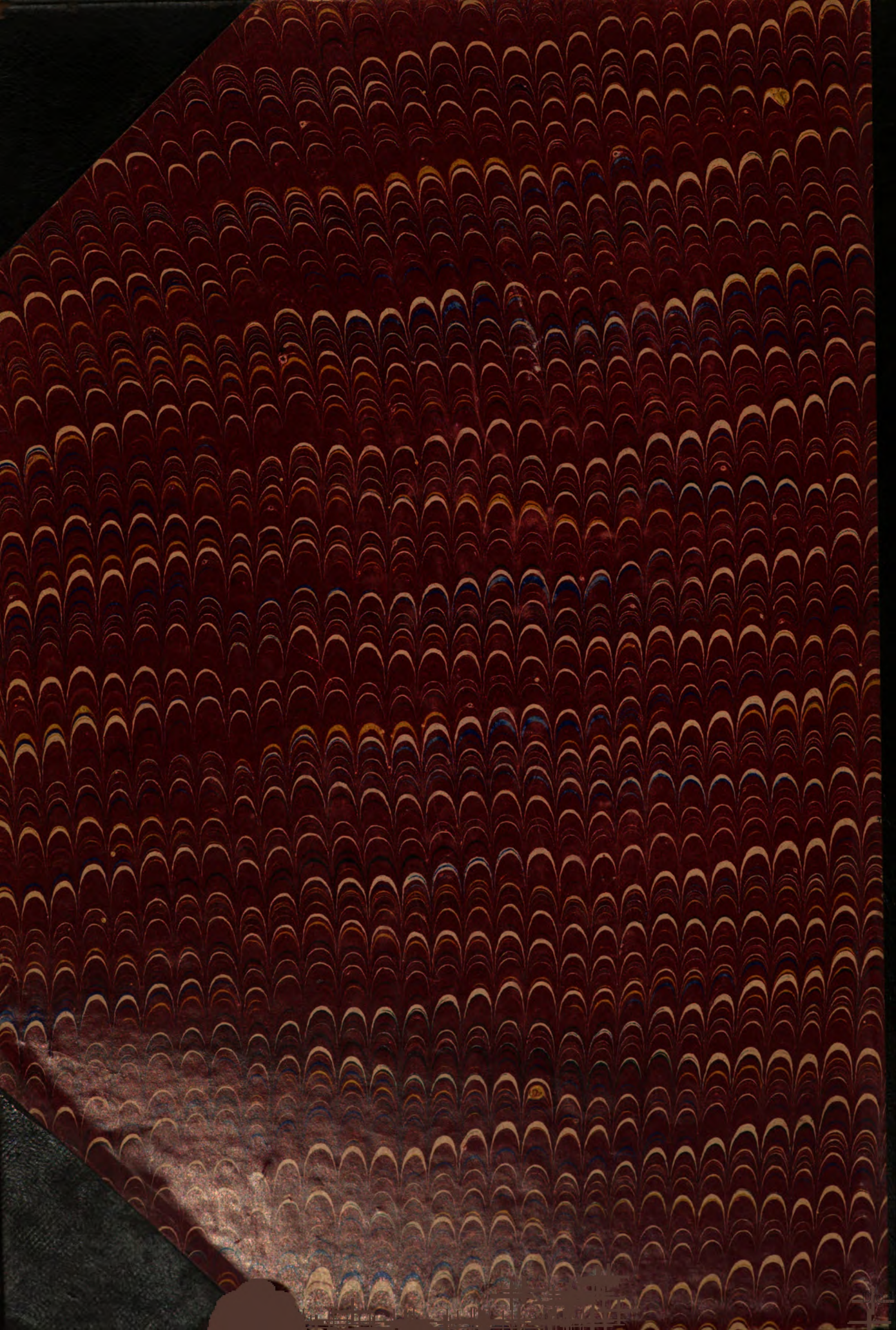
Digitized by Google

Digitized by Google

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ

This book is due on the last **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **429-2756**
Books not returned or renewed within 14 days
after due date are subject to billing.

STORED AT NRLF

Digitized by Google

Digitized by Google